Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 517.9

О ПСЕВДОСПЕКТРАХ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ СТЕПЕНИ $-n$ ЯДРАМИ

О. Г. Авсянкин, Н. К. Карапетянц

Аннотация: Изучается предельное поведение спектральных характеристик усеченных многомерных интегральных операторов, ядра которых однородны степени $-n$ и инвариантны относительно группы вращений $SO(n)$. Доказывается, что предел при $\tau \to 0$ ε-псевдоспектров усеченных операторов K_τ равен объединению ε-псевдоспектра исходного оператора K и ε-псевдоспектра оператора $\widetilde{K}$, где $\widetilde{K}$ — «транспонированный» оператор.

Ключевые слова: многомерный интегральный оператор, однородное ядро, спектр, псевдоспектр, усеченный оператор.

Введение. Работа посвящена изучению многомерных интегральных операторов с однородными степени $-n$ и инвариантными относительно всех вращений в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ядрами в скалярном и матричном случаях. Основная цель работы — исследовать связь между спектральными характеристиками исходного оператора K и «усеченных» операторов K_τ. Отметим, что для операторов Винера — Хопфа, Теплица, свертки предельное поведение спектральных характеристик «усеченных» операторов изучено достаточно полно (см. [1–3], а также библиографию в этих работах). Для многомерных интегральных операторов с однородными ядрами аналогичные вопросы рассматривались в [4]. При этом предполагалось, что операторы действуют в пространстве L_2, что позволяло существенно использовать технику C^*-алгебр. В данной статье результаты работы [4] на основе схемы, предложенной в [2], обобщаются на случай операторов, действующих в пространстве L_p. Основными результатами являются теоремы 6 и 8, описывающие предельное поведение псевдоспектров операторов K_τ, а также теорема 7, устанавливающая предельное поведение спектров операторов K_τ при некоторых дополнительных условиях на ядро оператора K.

Ниже использованы следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $x' = x/|x|$, $dx = dx_1 \dots dx_n$, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 1\}$; $\mathscr{L}(X)$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X; $\Pi\{P_\tau\}$ — класс линейных ограниченных операторов, к которым применим проекционный метод по системе проекторов (P_τ, P_τ).

1. В пространстве $L_p(\Omega_n)$, $1 < p < \infty$, рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\Omega_n} k(x, y)\varphi(y)\, dy, \quad x \in \Omega_n, \tag{1}$$

предполагая, что функция $k(x,y)$, определенная на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, удовлетворяет условиям

1°) однородности степени $-n$, т. е.

$$k(\alpha x,\alpha y)=\alpha^{-n}k(x,y)\quad\forall\alpha>0;$$

2°) инвариантности относительно группы $SO(n)$ вращений пространства $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$k(\omega(x),\omega(y))=k(x,y)\quad\forall\omega\in SO(n);$$

3°) суммируемости, т. е.

$$k=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|k(e_1,y)||y|^{-n/p}\,dy=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|k(x,e_1)||x|^{-n/p'}\,dx<\infty.$$

Теория таких операторов достаточно полно изложена в монографии [5] (см. также [6–8]). В частности, в [5, с. 70] доказано, что оператор K ограничен в пространстве $L_p(\Omega_n)$, причем $\|K\|\leqslant k$. Приведем в удобном для дальнейшего виде один из результатов, полученных в [5, с. 380–381].

Теорема 1. *Пусть K_1 и K_2 — операторы вида* (1). *Тогда*

$$K_1K_2=K+T,\quad K_2K_1=K+T_1,$$

где K — оператор вида (1), *а T и T_1 — компактные в $L_p(\Omega_n)$ операторы.*

Определим в пространстве $L_p(\Omega_n)$ проектор P_τ $(0<\tau<1)$ формулой

$$(P_\tau\varphi)(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \tau<|x|<1,\\ 0, & |x|<\tau.\end{cases}\tag{2}$$

Очевидно, что $\|P_\tau\|=1$ и $s\text{-}\lim\limits_{\tau\to0}P_\tau=I$. Зададим также оператор R_τ $(0<\tau<1)$ равенством

$$(R_\tau\varphi)(x)=\begin{cases}\left(\frac{\tau}{|x|^2}\right)^{n/p}\varphi\left(\tau\frac{x}{|x|^2}\right), & \tau<|x|<1,\\ 0, & |x|<\tau.\end{cases}\tag{3}$$

Изучим свойства оператора R_τ. Непосредственно проверяется

Свойство 1. *Справедливы равенства $R_\tau^2=P_\tau$, $R_\tau P_\tau=P_\tau R_\tau=R_\tau$.*

Свойство 2. *Норма оператора R_τ равна единице.*

Доказательство. Производя замену переменных $x=\tau y/|y|^2$, получим

$$\|R_\tau\varphi\|_p^p=\int\limits_{\tau<|x|<1}\frac{\tau^n}{|x|^{2n}}\left|\varphi\left(\tau\frac{x}{|x|^2}\right)\right|^p dx=\int\limits_{\tau<|y|<1}|\varphi(y)|^p\,dy\leqslant\|\varphi\|_p^p.$$

Отсюда вытекает, что $\|R_\tau\|\leqslant1$. С другой стороны, используя свойство 1, имеем $1=\|P_\tau\|=\|R_\tau^2\|\leqslant\|R_\tau\|^2$. Следовательно, $\|R_\tau\|=1$.

Свойство 3. *Операторы R_τ и R_τ^* слабо сходятся к нулю при $\tau\to0$.*

Доказательство. Докажем, что $(R_\tau\varphi,f)\to0$ при $\tau\to0$ для любых $\varphi\in L_p(\Omega_n)$ и $f\in L_{p'}(\Omega_n)$. Приблизим функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ функциями из пространства $C_0^\infty(\Omega_n)$ (здесь $C_0^\infty(\Omega_n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых на Ω_n функций, носители которых не содержат нуля). По числу $\varepsilon>0$ найдем функцию $\varphi_0\in C_0^\infty(\Omega_n)$ такую, что $\|\varphi-\varphi_0\|_p<\varepsilon/(2\|f\|_{p'})$, и зафиксируем $\varphi_0(x)$. Затем найдем функцию $f_0\in C_0^\infty(\Omega_n)$ такую, что $\|f-f_0\|_{p'}<$

$\varepsilon/(2\|\varphi_0\|_p)$. Элементарными рассуждениями устанавливается, что $|(R_\tau\varphi, f)| \leqslant |(R_\tau\varphi_0, f_0)| + \varepsilon$. Отсюда следует, что доказательство достаточно провести на функциях из $C_0^\infty(\Omega_n)$.

Итак, пусть функции φ, f принадлежат $C_0^\infty(\Omega_n)$. Выберем число $\tau_0 \in (0,1)$ так, чтобы $\sup\limits_{|x|\leqslant\tau_0} |f(x)| = 0$. Тогда, считая $\tau < \tau_0$, получим

$$|(R_\tau\varphi, f)| \leqslant \tau^{n/p}\tau_0^{-2n/p} \int\limits_{\tau_0<|x|<1} \left|\varphi\left(\tau\frac{x}{|x|^2}\right)\right| |f(x)|\,dx \underset{\tau\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Докажем, что операторы R_τ^* слабо сходятся к нулю при $\tau \to 0$. Так как $(R_\tau^*\varphi, f) = (\varphi, R_\tau f)$ и правая часть по доказанному выше стремится к нулю при $\tau \to 0$, то и $(R_\tau^*\varphi, f) \to 0$ при $\tau \to 0$. Свойство доказано.

В дальнейшем нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. *Если $0 < \tau < \beta < \alpha < 1$ и $\tau < \alpha\beta$, то $P_\alpha R_\tau P_\beta = 0$.*

Доказательство. Непосредственно усматриваем, что

$$(R_\tau P_\beta\varphi)(x) = \begin{cases} \left(\frac{\tau}{|x|^2}\right)^{n/p}\varphi\left(\tau\frac{x}{|x|^2}\right), & \tau < |x| < \tau/\beta, \\ 0, & |x| < \tau \quad \text{или} \quad \tau/\beta < |x| < 1. \end{cases}$$

Поскольку $\tau/\beta < \alpha$, то $P_\alpha R_\tau P_\beta = 0$.

Лемма 2. *Если K — оператор вида (1), то*

$$R_\tau K R_\tau = P_\tau \widetilde{K} P_\tau, \tag{4}$$

где оператор $\widetilde{K}$ определяется равенством

$$(\widetilde{K}\varphi)(x) = \int\limits_{\Omega_n} k(y,x)\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{\frac{n}{p}-\frac{n}{p'}} \varphi(y)\,dy, \quad x \in \Omega_n. \tag{5}$$

Доказательство. Учитывая определение оператора R_τ, производя замену переменных $y = \tau z/|z|^2$, а затем пользуясь однородностью функции $k(x,y)$, получим

$$\begin{aligned}(R_\tau K R_\tau\varphi)(x) &= \left(\frac{\tau}{|x|^2}\right)^{n/p} \int\limits_{\tau<|y|<1} k\left(\tau\frac{x}{|x|^2}, y\right)\left(\frac{\tau}{|y|^2}\right)^{n/p} \varphi\left(\tau\frac{y}{|y|^2}\right) dy \\ &= |x|^{-\frac{2n}{p}} \int\limits_{\tau<|z|<1} k\left(\tau\frac{x}{|x|^2}, \tau\frac{z}{|z|^2}\right)|z|^{\frac{2n}{p}}\varphi(z)\frac{\tau^n}{|z|^{2n}}\,dz \\ &= \int\limits_{\tau<|z|<1} k(|z|x', |x|z')\left(\frac{|z|}{|x|}\right)^{\frac{n}{p}-\frac{n}{p'}} \varphi(z)\,dz, \quad \tau < |x| < 1.\end{aligned}$$

Далее, так как функция $k(z,x)$ удовлетворяет условию 2°, то существует такая функция $\ell(r,\rho,t)$, что $k(z,x) = \ell(|z|^2, |x|^2, z'\cdot x')$, где $z'\cdot x'$ — скалярное произведение векторов z' и x' (см., например, [5, с. 68]). Отсюда следует, что $k(z,x) = k(|z|x', |x|z')$. Тогда при $\tau < |x| < 1$ имеем

$$(R_\tau K R_\tau\varphi)(x) = \int\limits_{\tau<|z|<1} k(z,x)\left(\frac{|z|}{|x|}\right)^{\frac{n}{p}-\frac{n}{p'}} \varphi(z)\,dz = (P_\tau\widetilde{K}P_\tau\varphi)(x).$$

Лемма доказана.

Далее, рассмотрим усеченный оператор $K_\tau = P_\tau K P_\tau$. Изучим композиции таких операторов.

Теорема 2. *Пусть K_1 и K_2 — операторы вида (1) с ядрами $k_1(x,y)$ и $k_2(x,y)$ соответственно. Тогда*

$$K_{1\tau}K_{2\tau} = K_\tau + P_\tau T P_\tau + R_\tau L R_\tau, \tag{6}$$

где K — оператор вида (1), а T и L — компактные в $L_p(\Omega_n)$ операторы.

Доказательство. Запишем равенство

$$K_{1\tau}K_{2\tau} = P_\tau K_1 P_\tau K_2 P_\tau = P_\tau K_1 K_2 P_\tau - P_\tau K_1 Q_\tau K_2 P_\tau,$$

где $Q_\tau = I - P_\tau$. Учитывая теорему 1, получаем

$$K_{1\tau}K_{2\tau} = P_\tau K P_\tau + P_\tau T P_\tau - P_\tau K_1 Q_\tau K_2 P_\tau. \tag{7}$$

Рассмотрим оператор $P_\tau K_1 Q_\tau K_2 P_\tau$. При $\tau < |x| < 1$ имеем

$$(P_\tau K_1 Q_\tau K_2 P_\tau \varphi)(x) = \int\limits_{\tau<|t|<1} \varphi(t)\,dt \int\limits_{|y|<\tau} k_1(x,y) k_2(y,t)\,dy.$$

Производя во внешнем интеграле замену $t = \tau z/|z|^2$, а во внутреннем — замену $y = \tau u/|u|^2$ и учитывая, что функции $k_1(x,y)$ и $k_2(x,y)$ удовлетворяют условиям 1° и 2°, приходим к цепочке равенств

$$\begin{aligned}
&(P_\tau K_1 Q_\tau K_2 P_\tau \varphi)(x) \\
&\quad= \int\limits_{\tau<|z|<1} \frac{\tau^n}{|z|^{2n}} \varphi\left(\tau\frac{z}{|z|^2}\right) dz \int\limits_{|u|>1} k_1\left(x, \tau\frac{u}{|u|^2}\right) k_2\left(\tau\frac{u}{|u|^2}, \tau\frac{z}{|z|^2}\right) \frac{\tau^n}{|u|^{2n}}\,du \\
&\quad= \int\limits_{\tau<|z|<1} \frac{\tau^n}{|z|^{2n}} \varphi\left(\tau\frac{z}{|z|^2}\right) dz \int\limits_{|u|>1} \frac{|z|^n}{|x|^n} k_1\left(|u|x', \tau\frac{u'}{|x|}\right) k_2(|z|u', |u|z')\,du \\
&= \int\limits_{\tau<|z|<1} \frac{\tau^n}{|z|^n} \varphi\left(\tau\frac{z}{|z|^2}\right) dz \int\limits_{|u|>1} \frac{1}{|x|^n} k_1\left(u, \tau\frac{x}{|x|^2}\right) k_2(z,u)\,du = -(R_\tau L R_\tau \varphi)(x),
\end{aligned}$$

где оператор L определяется по формуле

$$(L\varphi)(x) = -\int\limits_{|z|<1} \varphi(z)\,dz \int\limits_{|u|>1} k_2(z,u)\,k_1(u,x) \left(\frac{|z|}{|x|}\right)^{\frac{n}{p}-\frac{n}{p'}} du, \quad x \in \Omega_n.$$

Докажем, что оператор L компактен в $L_p(\Omega_n)$. Заметим, что $L = -L_1 L_2$, где

$$(L_1\varphi)(x) = \int\limits_{|u|>1} k_1(u,x) \left(\frac{|u|}{|x|}\right)^{\frac{n}{p}-\frac{n}{p'}} \varphi(u)\,du, \quad x \in \Omega_n,$$

$$(L_2\varphi)(x) = \int\limits_{|z|<1} k_2(z,x) \left(\frac{|z|}{|x|}\right)^{\frac{n}{p}-\frac{n}{p'}} \varphi(z)\,dz, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_n.$$

Так как операторы L_1 и L_2 компактны [5, с. 380], оператор L также компактен. Тогда из (7) получаем (6). Теорема доказана.

В заключение установим еще одно полезное утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $A \in \mathscr{L}(L_p(\Omega_n))$ *и* $A_\tau = P_\tau A P_\tau$. *Тогда норма* $\|A_\tau\|$ *является невозрастающей функцией переменной* τ, *предел* $\lim\limits_{\tau\to 0}\|A_\tau\|$ *существует и справедливо неравенство*

$$\lim_{\tau\to 0}\|A_\tau\| \leqslant \|A\|. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$. Тогда

$$P_{\tau_2}AP_{\tau_2} = P_{\tau_2}P_{\tau_1}AP_{\tau_1}P_{\tau_2}.$$

С учетом того, что $\|P_{\tau_2}\| = 1$, получаем неравенство

$$\|P_{\tau_2}AP_{\tau_2}\| \leqslant \|P_{\tau_2}\|\|P_{\tau_1}AP_{\tau_1}\|\|P_{\tau_2}\| = \|P_{\tau_1}AP_{\tau_1}\|,$$

что и доказывает невозрастание $\|A_\tau\|$. Далее, поскольку $\|A_\tau\| \leqslant \|A\|$ для любого $\tau \in (0,1)$, существует предел $\lim\limits_{\tau\to 0}\|A_\tau\|$, причем справедливо неравенство (8).

2. Основному результату этого пункта — теореме 3 — предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Пусть D и G — некоторые области в $\mathbb{R}^n$, причем $G \subset D$. Обозначим через P_G оператор умножения на характеристическую функцию множества G, и пусть $Q_G = I_D - P_G$ — дополнительный проектор.

Лемма 4. *Пусть* $A, B \in \mathscr{L}(L_p(D))$. *Тогда*

$$\|P_GAP_G + Q_GBQ_G\| \leqslant \max\{\|A\|, \|B\|\}. \tag{9}$$

Доказательство. Учитывая, что $P_G + Q_G = I_D$ и $P_G \cdot Q_G = 0$, получаем

$$\|(P_GAP_G + Q_GBQ_G)\varphi\|_p^p = \int\limits_G |(AP_G\varphi)(x)|^p\,dx + \int\limits_{D\setminus G} |(BQ_G\varphi)(x)|^p\,dx$$

$$\leqslant \|A\|^p \int\limits_G |(P_G\varphi)(x)|^p\,dx + \|B\|^p \int\limits_{D\setminus G} |(Q_G\varphi)(x)|^p\,dx$$

$$\leqslant (\max\{\|A\|, \|B\|\})^p \int\limits_D |\varphi(x)|^p\,dx = (\max\{\|A\|, \|B\|\})^p\|\varphi\|_p^p.$$

Отсюда следует неравенство (9).

Лемма 5. *Пусть числа* $\tau, \tau_0 \in (0,1)$ *таковы, что* $\tau < \tau_0^4$, *и пусть функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\tau<|x|<1} |\varphi(x)|^p\,dx = 1.$$

Тогда найдется такое число $\delta > \tau/\tau_0$, *что*

$$\int\limits_{\delta<|x|<\delta/\tau_0} |\varphi(x)|^p\,dx < \frac{2\ln\tau_0}{\ln\tau - 2\ln\tau_0}. \tag{10}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что справедливы неравенства

$$1 = \int\limits_{\tau<|x|<1} |\varphi(x)|^p\,dx > \int\limits_{\tau^{3/4}<|x|<\tau^{1/4}} |\varphi(x)|^p\,dx > \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{G_i} |\varphi(x)|^p\,dx, \tag{11}$$

где $G_i = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\tau^{3/4}}{\tau_0^i} < |x| < \frac{\tau^{3/4}}{\tau_0^{i+1}}\right\}$, а $n \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\frac{\tau^{3/4}}{\tau_0^n} \leqslant \tau^{1/4}, \quad \frac{\tau^{3/4}}{\tau_0^{n+1}} > \tau^{1/4}.$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$\frac{\ln \tau - 2\ln \tau_0}{2\ln \tau_0} < n \leqslant \frac{\ln \tau}{2\ln \tau_0}.$$

Так как в правой части (11) n слагаемых, то хотя бы одно из них меньше $1/n$. Следовательно, найдется такое число i_0 $(0 \leqslant i_0 \leqslant n-1)$, что

$$\int\limits_{G_{i_0}} |\varphi(x)|^p\,dx < \frac{1}{n}.$$

Полагая $\delta = \frac{\tau^{3/4}}{\tau_0^{i_0}} > \frac{\tau}{\tau_0}$, получим

$$\int\limits_{\delta<|x|<\delta/\tau_0} |\varphi(x)|^p\,dx < \frac{1}{n} < \frac{2\ln\tau_0}{\ln\tau - 2\ln\tau_0}.$$

Лемма доказана.

В пространстве $P_\tau(L_p(\Omega_n))$ рассмотрим семейство операторов

$$A_\tau = (\lambda I - K)_\tau + P_\tau T P_\tau + R_\tau L R_\tau, \tag{12}$$

где T и L — компактные в $L_p(\Omega_n)$ операторы. В силу леммы 3 существует предел $\lim\limits_{\tau\to 0}\|A_\tau\|$. Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы найти этот предел.

Лемма 6. *Если A_τ — операторы вида* (12), *то*

$$\varliminf_{\tau\to 0}\|A_\tau\| \geqslant \max\{\|\lambda I - K + T\|, \|\lambda I - \widetilde{K} + L\|\}. \tag{13}$$

Доказательство. Так как операторы R_τ слабо сходятся к нулю при $\tau \to 0$ и L — компактный оператор, операторы LR_τ сильно сходятся к нулю (см., например, [9, с. 37]). Тогда $s\text{-}\lim\limits_{\tau\to 0} A_\tau = \lambda I - K + T$. Следовательно,

$$\|\lambda I - K + T\| \leqslant \varliminf_{\tau\to 0}\|A_\tau\|. \tag{14}$$

Далее, учитывая свойство 1 оператора R_τ и лемму 2, получаем

$$R_\tau A_\tau R_\tau = (\lambda I - \widetilde{K})_\tau + R_\tau T R_\tau + P_\tau L P_\tau,$$

где $\widetilde{K}$ — оператор вида (5). Тогда $s\text{-}\lim\limits_{\tau\to 0} R_\tau A_\tau R_\tau = \lambda I - \widetilde{K} + L$. Значит,

$$\|\lambda I - \widetilde{K} + L\| \leqslant \varliminf_{\tau\to 0}\|R_\tau A_\tau R_\tau\| \leqslant \varliminf_{\tau\to 0}\|A_\tau\|. \tag{15}$$

Из (14) и (15) вытекает неравенство (13).

Теорема 3. *Пусть A_τ — оператор вида* (12). *Тогда предел $\lim\limits_{\tau\to 0}\|A_\tau\|$ существует, причем справедливо равенство*

$$\lim_{\tau\to 0}\|A_\tau\| = \max\{\|\lambda I - K + T\|, \|\lambda I - \widetilde{K} + L\|\}. \tag{16}$$

Доказательство разобьем на несколько этапов.

1. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как

$$s\text{-}\lim_{\tau\to 0} P_\tau T P_\tau = T, \quad s\text{-}\lim_{\tau\to 0} P_\tau L P_\tau = L$$

и функция $k(x,y)$ удовлетворяет условию 3°, по выбранному $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\tau_0 \in (0,1)$, что справедливы неравенства

$$\|P_{\tau_0} T P_{\tau_0} - T\| < \varepsilon/8, \quad \|P_{\tau_0} L P_{\tau_0} - L\| < \varepsilon/8, \tag{17}$$

$$\int\limits_{|x|<\tau_0} |k(x,e_1)||x|^{-n/p'}\,dx < \frac{\varepsilon}{8k^{p/p'}}, \qquad \int\limits_{|x|>1/\tau_0} |k(x,e_1)||x|^{-n/p'}\,dx < \frac{\varepsilon}{8k^{p/p'}}. \tag{18}$$

Зафиксируем число τ_0. Пусть теперь $\tau < \tau_0^4$. Возьмем произвольную функцию $\varphi \in P_\tau(L_p(\Omega_n))$ такую, что $\|\varphi\|_p = 1$. Тогда по лемме 5 найдется такое число $\delta > \tau/\tau_0$, что будет выполнено неравенство (10). Зафиксируем число δ.

2. Введем проектор $P_{\tau,\delta} := P_\tau - P_\delta$ и запишем равенство

$$A_\tau = P_\tau A_\tau P_\tau = P_\delta A_\tau P_\delta + P_{\tau,\delta} A_\tau P_{\tau,\delta} + P_{\tau,\delta} A_\tau P_\delta + P_\delta A_\tau P_{\tau,\delta}. \tag{19}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части (19).

Так как $P_\delta P_\tau = P_\delta$, для первого слагаемого имеем

$$\begin{aligned} P_\delta A_\tau P_\delta &= P_\delta(\lambda I - K)P_\delta + P_\delta T P_\delta + P_\delta R_\tau L R_\tau P_\delta \\ &= P_\delta(\lambda I - K + T)P_\delta + P_\delta R_\tau P_{\tau_0} L P_{\tau_0} R_\tau P_\delta + P_\delta R_\tau (L - P_{\tau_0} L P_{\tau_0}) R_\tau P_\delta. \end{aligned}$$

В силу леммы 1 будет $P_{\tau_0} R_\tau P_\delta = 0$. Следовательно,

$$P_\delta A_\tau P_\delta = P_\delta(\lambda I - K + T)P_\delta + C_\tau^{(1)}, \tag{20}$$

где

$$\big\|C_\tau^{(1)}\big\| = \|P_\delta R_\tau (L - P_{\tau_0} L P_{\tau_0}) R_\tau P_\delta\| \leqslant \|L - P_{\tau_0} L P_{\tau_0}\| < \varepsilon/8$$

согласно (17).

Перейдем ко второму слагаемому. Так как $P_\tau P_{\tau,\delta} = P_{\tau,\delta}$ и $P_{\tau_0} P_{\tau,\delta} = 0$, то

$$\begin{aligned} P_{\tau,\delta} A_\tau P_{\tau,\delta} &= P_{\tau,\delta}(\lambda I - K)_\tau P_{\tau,\delta} + P_{\tau,\delta} T P_{\tau,\delta} + P_{\tau,\delta} R_\tau L R_\tau P_{\tau,\delta} \\ &= P_{\tau,\delta}(P_\tau(\lambda I - K)P_\tau + R_\tau L R_\tau)P_{\tau,\delta} + P_{\tau,\delta}(T - P_{\tau_0} T P_{\tau_0})P_{\tau,\delta}. \end{aligned}$$

По лемме 2 имеем $P_\tau(\lambda I - K)P_\tau = R_\tau(\lambda I - \widetilde{K})R_\tau$. Значит,

$$P_{\tau,\delta} A_\tau P_{\tau,\delta} = P_{\tau,\delta} R_\tau (\lambda I - \widetilde{K} + L) R_\tau P_{\tau,\delta} + C_\tau^{(2)}, \tag{21}$$

причем

$$\big\|C_\tau^{(2)}\big\| = \|P_{\tau,\delta}(T - P_{\tau_0} T P_{\tau_0})P_{\tau,\delta}\| \leqslant \|T - P_{\tau_0} T P_{\tau_0}\| < \varepsilon/8$$

в силу (17).

Рассмотрим третье слагаемое в равенстве (19):

$$\begin{aligned}P_{\tau,\delta}A_\tau P_\delta = P_{\tau,\delta}(\lambda I - K)P_\delta + P_{\tau,\delta}TP_\delta + P_{\tau,\delta}R_\tau LR_\tau P_\delta \\ = -P_{\tau,\delta}KP_\delta + P_{\tau,\delta}(T - P_{\tau_0}TP_{\tau_0})P_\delta \\ + P_{\tau,\delta}R_\tau P_{\tau_0}LP_{\tau_0}R_\tau P_\delta + P_{\tau,\delta}R_\tau(L - P_{\tau_0}LP_{\tau_0})R_\tau P_\delta.\end{aligned}$$

Поскольку $P_{\tau_0}R_\tau P_\delta = 0$, то

$$P_{\tau,\delta}A_\tau P_\delta = -P_{\tau,\delta}KP_\delta + C_\tau^{(3)}, \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}\left\|C_\tau^{(3)}\right\| = \|P_{\tau,\delta}(T - P_{\tau_0}TP_{\tau_0})P_\delta + P_{\tau,\delta}R_\tau(L - P_{\tau_0}LP_{\tau_0})R_\tau P_\delta\| \\ \leqslant \|T - P_{\tau_0}TP_{\tau_0}\| + \|L - P_{\tau_0}LP_{\tau_0}\| < \varepsilon/4.\end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$P_\delta A_\tau P_{\tau,\delta} = -P_\delta KP_{\tau,\delta} + C_\tau^{(4)}, \tag{23}$$

где $\left\|C_\tau^{(4)}\right\| < \varepsilon/4$.

Объединение равенств (20)–(23) приводит к равенству

$$A_\tau = P_\delta(\lambda I - K + T)P_\delta + P_{\tau,\delta}R_\tau(\lambda I - \widetilde{K} + L)R_\tau P_{\tau,\delta} - P_{\tau,\delta}KP_\delta - P_\delta KP_{\tau,\delta} + C_\tau,$$

где $C_\tau = C_\tau^{(1)} + C_\tau^{(2)} + C_\tau^{(3)} + C_\tau^{(4)}$. Следовательно, $\|C_\tau\| < 3\varepsilon/4$.

Далее, если функция $\varphi \in P_\tau(L_p(\Omega_n))$ и $\|\varphi\|_p = 1$, то

$$\begin{aligned}\|A_\tau\varphi\|_p \leqslant \|(P_\delta(\lambda I - K + T)P_\delta + P_{\tau,\delta}R_\tau(\lambda I - \widetilde{K} + L)R_\tau P_{\tau,\delta})\varphi\|_p \\ + \|P_{\tau,\delta}KP_\delta\varphi\|_p + \|P_\delta KP_{\tau,\delta}\varphi\|_p + 3\varepsilon/4.\end{aligned}$$

Используя теперь лемму 4, где $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \delta < |x| < 1\}$, $P_G = P_\delta$, а $Q_G = P_{\tau,\delta}$, приходим к оценке

$$\begin{aligned}\|A_\tau\varphi\|_p \leqslant \max\{\|\lambda I - K + T\|, \|\lambda I - \widetilde{K} + L\|\} \\ + \|P_{\tau,\delta}KP_\delta\varphi\|_p + \|P_\delta KP_{\tau,\delta}\varphi\|_p + 3\varepsilon/4.\end{aligned} \tag{24}$$

3. Оценим $\|P_{\tau,\delta}KP_\delta\varphi\|_p$ и $\|P_\delta KP_{\tau,\delta}\varphi\|_p$. Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}|(KP_\delta\varphi)(x)| \leqslant \int\limits_{\delta<|y|<1} |k(x,y)||\varphi(y)|\,dy \\ \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)||y|^{-n/p}\,dy\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\delta<|y|<1} |k(x,y)||y|^{n/p'}|\varphi(y)|^p\,dy\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Производя в первом интеграле замену переменных $y = |x|t$ и используя свойства 1°–3° функции $k(x,y)$, имеем

$$|(KP_\delta\varphi)(x)| \leqslant k^{1/p'}|x|^{-n/(pp')}\left(\int\limits_{\delta<|y|<1} |k(x,y)||y|^{n/p'}|\varphi(y)|^p\,dy\right)^{1/p}.$$

Тогда

$$\|P_{\tau,\delta}KP_\delta\varphi\|_p^p \leqslant k^{p/p'} \int\limits_{\tau<|x|<\delta} |x|^{-n/p'}\,dx \int\limits_{\delta<|y|<1} |k(x,y)||y|^{n/p'}|\varphi(y)|^p\,dy$$

$$= k^{p/p'} \int\limits_{\delta<|y|<1} |\varphi(y)|^p|y|^{n/p'}\,dy \int\limits_{\tau<|x|<\delta} |k(x,y)||x|^{-n/p'}\,dx$$

$$\leqslant k^{p/p'} \int\limits_{\delta<|y|<\delta/\tau_0} |\varphi(y)|^p|y|^{n/p'}\,dy \int\limits_{|x|<\delta} |k(x,y)||x|^{-n/p'}\,dx$$

$$+ k^{p/p'} \int\limits_{\delta/\tau_0<|y|<1} |\varphi(y)|^p|y|^{n/p'}\,dy \int\limits_{|x|<\delta} |k(x,y)||x|^{-n/p'}\,dx.$$

Выполняя во внутренних интегралах замену переменных $x = |y|t$ и используя свойства 1°, 2° функции $k(x,y)$, получим

$$\|P_{\tau,\delta}KP_\delta\varphi\|_p \leqslant k^{p/p'} \int\limits_{\delta<|y|<\delta/\tau_0} |\varphi(y)|^p\,dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,e_1)||x|^{-n/p'}\,dx$$

$$+ k^{p/p'} \int\limits_{\delta/\tau_0<|y|<1} |\varphi(y)|^p\,dy \int\limits_{|x|<\delta/|y|} |k(x,e_1)||x|^{-n/p'}\,dx$$

$$\leqslant k^{p/p'}k \int\limits_{\delta<|y|<\delta/\tau_0} |\varphi(y)|^p\,dy + k^{p/p'} \int\limits_{\delta/\tau_0<|y|<1} |\varphi(y)|^p\,dy \int\limits_{|x|<\tau_0} |k(x,e_1)||x|^{-n/p'}\,dx$$

$$\leqslant k^p \int\limits_{\delta<|y|<\delta/\tau_0} |\varphi(y)|^p\,dy + k^{p/p'}\|\varphi\|_p^p \int\limits_{|x|<\tau_0} |k(x,e_1)||x|^{-n/p'}\,dx.$$

Учитывая (18) и (10), окончательно имеем

$$\|P_{\tau,\delta}KP_\delta\varphi\|_p \leqslant k^p \frac{\ln\tau_0}{\ln\tau - 2\ln\tau_0} + \frac{\varepsilon}{8}. \tag{25}$$

Переходом к сопряженному оператору доказывается, что

$$\|P_\delta KP_{\tau,\delta}\varphi\|_p \leqslant k^p \frac{\ln\tau_0}{\ln\tau - 2\ln\tau_0} + \frac{\varepsilon}{8}. \tag{26}$$

4. Подставляя (25) и (26) в (24), приходим к неравенству

$$\|A_\tau\| \leqslant \max\{\|\lambda I - K + T\|, \|\lambda I - \widetilde{K} + L\|\} + 2k^p \frac{\ln\tau_0}{\ln\tau - 2\ln\tau_0} + \varepsilon.$$

Но тогда

$$\varlimsup_{\tau\to 0} \|A_\tau\| \leqslant \max\{\|\lambda I - K + T\|, \|\lambda I - \widetilde{K} + L\|\} + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε заключаем, что

$$\varlimsup_{\tau\to 0} \|A_\tau\| \leqslant \max\{\|\lambda I - K + T\|, \|\lambda I - \widetilde{K} + L\|\}. \tag{27}$$

Из (27) и (13) вытекает равенство (16). Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Справедливо равенство*

$$\lim_{\tau\to 0}\|(\lambda I-K)_\tau\| = \|\lambda I-K\| = \|\lambda I-\widetilde{K}\|. \tag{28}$$

Доказательство. По лемме 3 имеем

$$\varlimsup_{\tau\to 0}\|(\lambda I-K)_\tau\| \leqslant \|\lambda I-K\|.$$

Далее, учитывая свойства операторов R_τ, получим

$$\|(\lambda I-K)_\tau\| = \|R_\tau(\lambda I-\widetilde{K})_\tau R_\tau\| \leqslant \|\lambda I-\widetilde{K}\|.$$

Отсюда следует, что $\varlimsup_{\tau\to 0}\|(\lambda I-K)_\tau\| \leqslant \|\lambda I-\widetilde{K}\|$. Тогда в силу теоремы 3 имеем

$$\max\{\|\lambda I-K\|, \|\lambda I-\widetilde{K}\|\} \leqslant \|\lambda I-K\|, \quad \max\{\|\lambda I-K\|, \|\lambda I-\widetilde{K}\|\} \leqslant \|\lambda I-\widetilde{K}\|.$$

Следовательно, $\|\lambda I-K\| = \|\lambda I-\widetilde{K}\|$, и справедливо (28).

3. Обозначим через $\mathfrak{K}$ наименьшую замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathscr{L}(L_p(\Omega_n))$, содержащую все операторы вида $\lambda I-K$, где K — оператор вида (1), а $\lambda\in\mathbb{C}$. Алгебра $\mathfrak{K}$ изучена в работе [6]. Пусть $\mathfrak{T}$ — множество всех компактных операторов, содержащихся в $\mathfrak{K}$. Известно [6], что множество $\mathfrak{K}_0=\{\lambda I-K+T\}$, где $T\in\mathfrak{T}$, всюду плотно в алгебре $\mathfrak{K}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — множество всех семейств $\{A_\tau\}$ операторов A_τ, действующих в пространстве $P_\tau(L_p(\Omega_n))$, таких, что

$$\|\{A_\tau\}\| := \sup_{0<\tau<1}\|A_\tau\| < \infty. \tag{29}$$

Относительно обычных алгебраических операций:

$$\{A_\tau\}+\{B_\tau\} := \{A_\tau+B_\tau\}, \quad \{A_\tau\}\cdot\{B_\tau\} := \{A_\tau B_\tau\}, \quad \alpha\{A_\tau\} := \{\alpha A_\tau\},$$

и нормы (29) множество $\mathfrak{F}$ образует банахову алгебру. Нетрудно видеть, что множество $\mathfrak{F}_0=\{\{C_\tau\}\in\mathfrak{F} : \|C_\tau\|\to 0 \text{ при } \tau\to 0\}$ является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{F}$. Рассмотрим фактор-алгебру $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0$. Норма элемента $\{A_\tau\}+\mathfrak{F}_0\in\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0$ определяется равенством

$$\|\{A_\tau\}+\mathfrak{F}_0\|_{\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0} = \varlimsup_{\tau\to 0}\|A_\tau\|. \tag{30}$$

Обозначим через $\mathfrak{N}$ наименьшую замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0$, содержащую все элементы $\{(\lambda I-K)_\tau\}+\mathfrak{F}_0$, где K — оператор вида (1). Она представляет собой замыкание по норме алгебры $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0$ множества

$$\mathfrak{N}_0 = \Big\{\sum_i\prod_j(\{(\lambda_{ij}I-K_{ij})_\tau\}+\mathfrak{F}_0)\Big\},$$

где суммы и произведения конечны. В силу теоремы 2 множество $\mathfrak{N}_0$ имеет вид

$$\mathfrak{N}_0 = \{\{(\lambda I-K)_\tau+P_\tau TP_\tau+R_\tau LR_\tau\}+\mathfrak{F}_0\},$$

где T и L принадлежат $\mathfrak{T}$.

Лемма 7. *Пусть* $\{A_\tau\} + \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{N}$. *Тогда пределы*

$$A = s\text{-}\lim_{\tau\to 0} A_\tau \quad \text{и} \quad \widetilde{A} = s\text{-}\lim_{\tau\to 0} R_\tau A_\tau R_\tau$$

существуют и принадлежат алгебре $\mathfrak{K}$.

Доказательство. Так как множество $\mathfrak{N}_0$ всюду плотно в алгебре $\mathfrak{N}$, доказательство достаточно провести для элемента $\{(\lambda I - K)_\tau + P_\tau T P_\tau + R_\tau L R_\tau\} + \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{N}_0$. Поскольку

$$s\text{-}\lim_{\tau\to 0}((\lambda I - K)_\tau + P_\tau T P_\tau + R_\tau L R_\tau) = \lambda I - K + T,$$
$$s\text{-}\lim_{\tau\to 0} R_\tau((\lambda I - K)_\tau + P_\tau T P_\tau + R_\tau L R_\tau)R_\tau = \lambda I - \widetilde{K} + L$$

и $T, L \in \mathfrak{T}$, операторы $\lambda I - K + T$ и $\lambda I - \widetilde{K} + L$ принадлежат алгебре $\mathfrak{K}$. Лемма доказана.

Следующая теорема является естественным обобщением теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть* $\{A_\tau\} + \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{N}$. *Тогда предел* $\lim\limits_{\tau\to 0}\|A_\tau\|$ *существует, причем справедливо равенство*

$$\lim_{\tau\to 0}\|A_\tau\| = \max\{\|A\|, \|\widetilde{A}\|\}. \tag{31}$$

Доказательство. Так как $A = s\text{-}\lim\limits_{\tau\to 0} A_\tau$ и $\widetilde{A} = s\text{-}\lim\limits_{\tau\to 0} R_\tau A_\tau R_\tau$, то

$$\|A\| \leqslant \varliminf_{\tau\to 0}\|A_\tau\| \quad \text{и} \quad \|\widetilde{A}\| \leqslant \varliminf_{\tau\to 0}\|R_\tau A_\tau R_\tau\| \leqslant \varliminf_{\tau\to 0}\|A_\tau\|.$$

Следовательно,

$$\max\{\|A\|, \|\widetilde{A}\|\} \leqslant \varliminf_{\tau\to 0}\|A_\tau\|. \tag{32}$$

Докажем, что

$$\max\{\|A\|, \|\widetilde{A}\|\} = \varlimsup_{\tau\to 0}\|A_\tau\|. \tag{33}$$

Для элемента $\{A_\tau\} + \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{N}_0$ равенство (33) (и даже равенство (31)) уже доказано в теореме 3. Пусть $\{A_\tau\} + \mathfrak{F}_0 \in \mathfrak{N} \setminus \mathfrak{N}_0$. Тогда найдется такая последовательность $\{\{(\lambda_j I - K_j)_\tau + P_\tau T_j R_\tau + R_\tau L_j R_\tau\} + \mathfrak{F}_0\} \subset \mathfrak{N}_0$, что

$$\begin{aligned}\|\{(\lambda_j I - K_j)_\tau + P_\tau T_j P_\tau + R_\tau L_j R_\tau\} - \{A_\tau\} + \mathfrak{F}_0\|_{\mathfrak{N}} \\ = \varlimsup_{\tau\to 0}\|(\lambda_j I - K_j)_\tau + P_\tau T_j P_\tau + R_\tau L_j R_\tau - A_\tau\| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned} \tag{34}$$

Тогда тем более

$$\varliminf_{\tau\to 0}\|(\lambda_j I - K_j)_\tau + P_\tau T_j P_\tau + R_\tau L_j R_\tau - A_\tau\| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

и в силу неравенства (32)

$$\max\{\|(\lambda_j I - K_j + T_j) - A\|,\ \|(\lambda_j I - \widetilde{K}_j + L_j) - \widetilde{A}\|\} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{35}$$

Далее, по теореме 3 с учетом (30) имеем

$$\begin{aligned}\|\{(\lambda_j I - K_j)_\tau + P_\tau T_j P_\tau + R_\tau L_j R_\tau\} + \mathfrak{F}_0\|_{\mathfrak{N}} \\ = \max\{\|\lambda_j I - K_j + T_j\|, \|\lambda_j I - \widetilde{K}_j + L_j\|\}.\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$ и учитывая (34) и (35), получаем, что

$$\|\{A_\tau\} + \mathfrak{F}_0\|_{\mathfrak{N}} = \max\{\|A\|, \|\widetilde{A}\|\}.$$

Вспоминая определение нормы в алгебре $\mathfrak{N}$, приходим к равенству (33). Теорема доказана.

Рассмотрим банахову алгебру $\mathfrak{K} \oplus \mathfrak{K}$ с нормой

$$\|(B_1, B_2)\| = \max\{\|B_1\|, \|B_2\|\}.$$

Определим отображение $\gamma : \mathfrak{N} \to \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{K}$ формулой

$$\gamma(\{A_\tau\} + \mathfrak{F}_0) = (A, \widetilde{A}).$$

Очевидно, что γ является гомоморфизмом. Из теоремы 4 вытекает

Следствие 2. *Гомоморфизм γ является изометрией.*

Для дальнейшего нам необходимо найти $\lim\limits_{\tau\to 0}\big\|(\lambda I - K)_\tau^{-1}\big\|$, что представляет также и самостоятельный интерес.

Теорема 5. *Пусть операторы $\lambda I - K$ и $\lambda I - \widetilde{K}$ обратимы. Тогда найдется такое число $\tau_0 \in (0,1)$, что для всех $0 < \tau < \tau_0$ операторы $(\lambda I - K)_\tau$ обратимы в $P_\tau(L_p(\Omega_n))$, причем*

$$\lim_{\tau\to 0}\big\|(\lambda I - K)_\tau^{-1}\big\| = \max\{\|(\lambda I - K)^{-1}\|, \|(\lambda I - \widetilde{K})^{-1}\|\}. \tag{36}$$

Доказательство. Так как оператор $\lambda I - K$ обратим, то $\lambda I - K \in \Pi\{P_\tau\}$ (см. [6]). Следовательно, существует такое число $\tau_0 \in (0,1)$, что для всех $0 < \tau < \tau_0$ операторы $(\lambda I - K)_\tau$, действующие в $P_\tau(L_p(\Omega_n))$, обратимы и элемент $\{(\lambda I - K)_\tau\} + \mathfrak{F}_0$ обратим в фактор-алгебре $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}_0$ [10, с. 278]. Рассмотрим элемент $\{(\lambda I - K)_\tau^{-1}\} + \mathfrak{F}_0$ и найдем $s\text{-}\lim\limits_{\tau\to 0}(\lambda I - K)_\tau^{-1}$ и $s\text{-}\lim\limits_{\tau\to 0} R_\tau(\lambda I - K)_\tau^{-1}R_\tau$.

Поскольку $\lambda I - K \in \Pi\{P_\tau\}$, по определению проекционного метода

$$s\text{-}\lim_{\tau\to 0}(\lambda I - K)_\tau^{-1}P_\tau = (\lambda I - K)^{-1}.$$

Заметим, что оператор $R_\tau(\lambda I - K)_\tau R_\tau$ обратим в $P_\tau(L_p(\Omega_n))$, причем

$$(R_\tau(\lambda I - K)_\tau R_\tau)^{-1} = R_\tau(\lambda I - K)_\tau^{-1}R_\tau.$$

Используя лемму 2, получим

$$\begin{aligned} s\text{-}\lim_{\tau\to 0} R_\tau(\lambda I - K)_\tau^{-1}R_\tau = s\text{-}\lim_{\tau\to 0}(R_\tau(\lambda I - K)_\tau R_\tau)^{-1}P_\tau \\ = s\text{-}\lim_{\tau\to 0}(\lambda I - \widetilde{K})_\tau^{-1}P_\tau = (\lambda I - \widetilde{K})^{-1}. \end{aligned}$$

В силу результатов работы [6] операторы $(\lambda I - K)^{-1}$ и $(\lambda I - \widetilde{K})^{-1}$ принадлежат алгебре $\mathfrak{K}$. Учитывая следствие 2, получаем, что элемент $\{(\lambda I - K)_\tau^{-1}\} + \mathfrak{F}_0$ принадлежит алгебре $\mathfrak{N}$. Применяя к элементу $\{(\lambda I - K)_\tau^{-1}\} + \mathfrak{F}_0$ теорему 4, приходим к равенству (36).

4. Прежде чем доказать основную теорему, сформулируем два определения.

Определение 1. Пусть $\{E_\tau\}$ — семейство множеств $E_\tau \subset \mathbb{C}$ $(0 < \tau < 1)$. *Пределом множеств* E_τ при $\tau \to 0$ назовем множество E, состоящее из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для каждого из которых найдутся убывающая последовательность $\{\tau_s\} \subset (0,1)$ такая, что $\lim\limits_{s\to\infty} \tau_s = 0$, и последовательность $\{\lambda_s\} \subset \mathbb{C}$ такая, что $\lambda_s \in E_{\tau_s}$ и $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda_s = \lambda$ (обозначаем $E = \lim\limits_{\tau\to 0} E_\tau$).

Определение 2. Пусть X — банахово пространство, $A \in \mathscr{L}(X)$ и $\varepsilon > 0$. *ε-псевдоспектром оператора* A называется множество

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \ \text{ или } \ \|(A-\lambda I)^{-1}\| \geqslant 1/\varepsilon\}. \tag{37}$$

Полагая $\|(A-\lambda I)^{-1}\| = \infty$, если оператор $A - \lambda I$ необратим, перепишем (37) в виде

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \|(A-\lambda I)^{-1}\| \geqslant 1/\varepsilon\}.$$

Теорема 6. *Пусть K — оператор вида* (1). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство*

$$\lim_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}_\varepsilon(K_\tau) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(K) \cup \mathrm{Sp}_\varepsilon(\widetilde{K}). \tag{38}$$

Доказательство. Известно [1–3], что

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(K) \subset \lim_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}_\varepsilon(K_\tau).$$

(В [1–3] этот факт доказан в самом общем виде.)

Учитывая, что $s\text{-}\lim\limits_{\tau\to 0} R_\tau K_\tau R_\tau = \widetilde{K}$, получаем вложение

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(\widetilde{K}) \subset \lim_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}_\varepsilon(R_\tau K_\tau R_\tau). \tag{39}$$

Поскольку $R_\tau K_\tau R_\tau - \lambda P_\tau = R_\tau(K_\tau - \lambda P_\tau)R_\tau$, оператор $R_\tau K_\tau R_\tau - \lambda P_\tau$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $K_\tau - \lambda P_\tau$, причем

$$\|(R_\tau K_\tau R_\tau - \lambda P_\tau)^{-1}\| = \|(K_\tau - \lambda P_\tau)^{-1}\|.$$

Следовательно, $\mathrm{Sp}_\varepsilon(R_\tau K_\tau R_\tau) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(K_\tau)$. Тогда (39) принимает вид

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(\widetilde{K}) \subset \lim_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}_\varepsilon(K_\tau).$$

Таким образом, доказано вложение

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(K) \cup \mathrm{Sp}_\varepsilon(\widetilde{K}) \subset \lim_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}_\varepsilon(K_\tau). \tag{40}$$

Докажем обратное вложение. Пусть $\lambda \notin \mathrm{Sp}_\varepsilon(K) \cup \mathrm{Sp}_\varepsilon(\widetilde{K})$. Тогда операторы $\lambda I - K$ и $\lambda I - \widetilde{K}$ обратимы, причем $\|(\lambda I - K)^{-1}\| < 1/\varepsilon$ и $\|(\lambda I - \widetilde{K})^{-1}\| < 1/\varepsilon$. Положим

$$\max\{\|(\lambda I - K)^{-1}\|, \|(\lambda I - \widetilde{K})^{-1}\|\} = 1/\varepsilon - 2\delta,$$

где δ — некоторое положительное число. Тогда по теореме 5 найдется такое число $\tau_0 \in (0,1)$, что для всех $0 < \tau < \tau_0$ операторы $(\lambda I - K)_\tau$ обратимы в $P_\tau(L_p(\Omega_n))$ и $\left\|(\lambda I - K)_\tau^{-1}\right\| < 1/\varepsilon - \delta$. Если теперь $\tau < \tau_0$ и $\mu \in \mathbb{C}$ таково, что $|\mu - \lambda| < \varepsilon\delta(1/\varepsilon - \delta)^{-1}$, то

$$\begin{aligned}\left\|(K-\mu I)_\tau^{-1}\right\| &= \|((\lambda-\mu)P_\tau - (\lambda I - K)_\tau)^{-1}\| \\ &\leqslant \frac{\left\|(\lambda I - K)_\tau^{-1}\right\|}{1 - |\lambda-\mu| \cdot \left\|(\lambda I - K)_\tau^{-1}\right\|} < \frac{1/\varepsilon - \delta}{1 - \varepsilon\delta(1/\varepsilon-\delta)^{-1}(1/\varepsilon-\delta)} = \frac{1}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\mu \notin \mathrm{Sp}_\varepsilon(K_\tau)$. Тогда $\lambda \notin \lim\limits_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}_\varepsilon(K_\tau)$. Таким образом, доказано, что

$$\lim_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}_\varepsilon(K_\tau) \subset \mathrm{Sp}_\varepsilon(K) \cup \mathrm{Sp}_\varepsilon(\widetilde{K}). \tag{41}$$

Из (40) и (41) следует (38). Теорема доказана.

В заключение сделаем некоторые уточнения, относящиеся к случаю, когда оператор K действует в пространстве $L_2(\Omega_n)$. Обозначим через K^* сопряженный оператор, т. е.

$$(K^*\varphi)(x) = \int\limits_{\Omega_n} \overline{k(y,x)}\varphi(y)\,dy, \quad x \in \Omega_n.$$

Следствие 3. *Пусть оператор K вида (1) действует в пространстве $L_2(\Omega_n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство*

$$\lim_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}_\varepsilon(K_\tau) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(K). \tag{42}$$

Доказательство. Рассмотрим изометрический оператор $(U\varphi)(x) = \overline{\varphi(x)}$. Поскольку $\lambda I - \widetilde{K} = U(\bar{\lambda} I - K^*)U$, оператор $\lambda I - \widetilde{K}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\bar{\lambda} I - K^*$, причем $(\lambda I - \widetilde{K})^{-1} = U(\bar{\lambda} I - K^*)^{-1}U$. Тогда

$$\|(\lambda I - \widetilde{K})^{-1}\| = \|(\bar{\lambda} I - K^*)^{-1}\| = \|(\lambda I - K)^{-1}\|.$$

Следовательно, $\mathrm{Sp}_\varepsilon(\widetilde{K}) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(K)$, и (38) превращается в (42).

Замечание. Следует подчеркнуть, что для спектра аналогичный результат, вообще говоря, не имеет места. В самом деле, если ядро $k(x,y)$ оператора K кроме условий 1°–3° удовлетворяет еще условию

$$k(x,y) = 0, \quad |y| < |x| \quad (\text{или} \ \ k(x,y) = 0, \quad |y| > |x|),$$

то $\mathrm{Sp}(K_\tau) = \{0\}$ для любого $\tau \in (0,1)$. Значит, $\lim\limits_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}(K_\tau) = \{0\}$. При этом в силу результатов [5] спектр оператора K имеет вид

$$\mathrm{Sp}(K) = \bigcup_{m=0}^{\infty} (\{\lambda\colon \lambda = \sigma_m(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^1\} \\ \cup \{\lambda : \lambda \neq \sigma_m(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^1,\ \mathrm{ind}(\lambda - \sigma_m(\xi)) = 0\}),$$

где

$$\sigma_m(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k(e_1,y) P_m(e_1 \cdot y')|y|^{-n/p+i\xi}\,dy,$$

а $P_m(t)$ — многочлены Лежандра.

5. Выше говорилось, что спектр оператора K, вообще говоря, не аппроксимируется спектрами операторов K_τ. Однако при некоторых дополнительных условиях на ядро $k(x,y)$ спектр оператора K, действующего в $L_2(\Omega_n)$, все же является пределом спектров операторов K_τ.

Лемма 8. *Пусть ядро $k(x,y)$ оператора K кроме условий 1°–3° удовлетворяет также условию*

$$\overline{k(y,e_1)} = k(e_1,y). \tag{43}$$

Тогда

$$\lim_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}(K_\tau) = \mathrm{Sp}(K). \tag{44}$$

Доказательство. В силу свойств 1° и 2° ядра $k(x,y)$ условие (43) равносильно условию $\overline{k(y,x)} = k(x,y)$. Следовательно, операторы K и K_τ являются самосопряженными. Поскольку спектр самосопряженного оператора является вещественным, ниже всюду считаем, что $\lambda \in \mathbb{R}$.

Если $\lambda \notin \lim\limits_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}(K_\tau)$, то найдутся такие числа $\delta > 0$ и $\tau_0 \in (0,1)$, что для всех $\mu \in \bigcup\{\mathrm{Sp}(K_\tau) : 0 < \tau < \tau_0\}$ выполняется неравенство $|\lambda - \mu| > \delta$. Тогда для всех $0 < \tau < \tau_0$ оператор $(\lambda I - K)_\tau$ обратим в $P_\tau(L_2(\Omega_n))$, причем оператор $(\lambda I - K)_\tau^{-1}$ также является самосопряженным и

$$\left\|(\lambda I - K)_\tau^{-1}\right\| = \max_{\mu\in\mathrm{Sp}(K_\tau)} \frac{1}{|\lambda-\mu|} \leqslant \frac{1}{\delta}. \tag{45}$$

Тем самым $\lambda I - K \in \Pi\{P_\tau\}$. Тогда оператор $\lambda I - K$ обратим, т. е. $\lambda \notin \mathrm{Sp}(K)$. Таким образом, доказано вложение

$$\mathrm{Sp}(K) \subset \lim_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}(K_\tau). \tag{46}$$

Обратно, пусть $\lambda \notin \mathrm{Sp}(K)$. Тогда $\lambda I - K \in \Pi\{P_\tau\}$ (см. [6]). Следовательно, найдется такое число $\tau_0 \in (0,1)$, что для всех $0 < \tau < \tau_0$ операторы $(\lambda I - K)_\tau$ обратимы в $P_\tau(L_2(\Omega_n))$ и

$$\frac{1}{\delta} := \sup_{\tau<\tau_0} \left\|(\lambda I - K)_\tau^{-1}\right\| < \infty.$$

Тогда из (45) следует, что неравенство $|\lambda - \mu| > \delta$ справедливо для всех $\mu \in \bigcup\{\mathrm{Sp}(K_\tau) : 0 < \tau < \tau_0\}$. Значит, $\lambda \notin \lim\limits_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}(K_\tau)$, откуда

$$\lim_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}(K_\tau) \subset \mathrm{Sp}(K). \tag{47}$$

Из (46) и (47) вытекает (44).

Теорема 7. *Пусть ядро $k(x,y)$ оператора K кроме условий 1°–3° удовлетворяет также условию*

$$\overline{k(y,e_1)} = e^{i\theta} k(e_1,y), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Тогда имеет место равенство (44).

Доказательство. Положим $b(x,y) = e^{i\theta/2} k(x,y)$ и рассмотрим оператор B вида (1) с ядром $b(x,y)$. Поскольку $\overline{b(y,e_1)} = b(e_1,y)$, по лемме 8

$$\lim_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}(B_\tau) = \mathrm{Sp}(B). \tag{48}$$

Далее, так как $\lambda I - B = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}\lambda I - K)$, имеем

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(B) \iff e^{-i\theta/2}\lambda \in \mathrm{Sp}(K), \quad \lambda \in \mathrm{Sp}(B_\tau) \iff e^{-i\theta/2}\lambda \in \mathrm{Sp}(K_\tau).$$

Тогда из (48) сразу следует (44). Теорема доказана.

6. Обозначим через $L_p^s(\Omega_n)$, $1 < p < \infty$, пространство s-мерных вектор-функций $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_s(x))$ с компонентами из $L_p(\Omega_n)$ и нормой

$$\|\varphi\|_{L_p^s(\Omega_n)} = \left\| \left(\sum_{m=1}^{s} |\varphi_m|^p \right)^{1/p} \right\|_p . \tag{49}$$

В пространстве $L_p^s(\Omega_n)$ рассмотрим оператор

$$(\mathbf{K}\varphi)(x) = \int\limits_{\Omega_n} \boldsymbol{k}(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \Omega_n, \tag{50}$$

где $\boldsymbol{k}(x,y) = (k_{j\ell}(x,y))_{j,\ell=1}^s$ — матрица-функция s-го порядка, элементы которой удовлетворяют условиям 1°–3°. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{K}}$ матричный аналог оператора (5) и положим $\mathbf{P}_\tau = (P_\tau \delta_{j\ell})_{j,\ell=1}^s$, где P_τ определяется формулой (2). Известно, что оператор $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{K}$ принадлежит $\Pi\{\mathbf{P}_\tau\}$ тогда и только тогда, когда обратимы операторы $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{K}$ и $\lambda\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{K}}$. Повторяя с незначительными изменениями все рассуждения, выполненные выше для скалярного случая, приходим к следующему утверждению.

Теорема 8. *Пусть* $\mathbf{K}$ *— оператор вида* (50). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\tau\to 0} \operatorname{Sp}_\varepsilon(\mathbf{K}_\tau) = \operatorname{Sp}_\varepsilon(\mathbf{K}) \cup \operatorname{Sp}_\varepsilon(\widetilde{\mathbf{K}}). \tag{51}$$

Замечание. Подчеркнем, что в отличие от скалярного случая при $p = 2$ равенство (51) не может быть сведено к соотношению $\lim\limits_{\tau\to 0} \operatorname{Sp}_\varepsilon(\mathbf{K}_\tau) = \operatorname{Sp}_\varepsilon(\mathbf{K})$.

7. В этом пункте мы изучим одномерный аналог оператора (1), но при этом откажемся от условия 2°, которое является неотъемлемым при исследовании многомерного случая.

В пространстве $L_p([-1,1])$, $1 < p < \infty$, рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{-1}^{1} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in [-1,1], \tag{52}$$

ядро $k(x,y)$ которого однородно степени -1 и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |k(\pm 1, y)||y|^{-1/p}\,dy < \infty.$$

Проектор P_τ по-прежнему определим формулой (2) и положим $K_\tau = P_\tau K P_\tau$. Теореме о пределе псевдоспектров оператора K_τ предпошлем одно простое вспомогательное утверждение.

Лемма 9. *Пусть* X *— банахово пространство,* $A \in \mathscr{L}(X)$ *и* $0 \in \operatorname{Sp}(A)$. *Тогда если* $\lambda \notin \operatorname{Sp}(A)$, *то*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \geqslant |\lambda^{-1}|.$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. $\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\| < 1$. Тогда правая часть равенства $A = (A - \lambda I)(I - \lambda(\lambda I - A)^{-1})$ представляет собой произведение двух обратимых операторов. Следовательно, оператор A обратим, что противоречит условию $0 \in \operatorname{Sp} A$. Лемма доказана.

Теорема 9. *Пусть K — оператор вида* (52). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}_\varepsilon(K_\tau) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(K) \cup \mathrm{Sp}_\varepsilon(\widetilde{K}). \tag{53}$$

Доказательство. Обозначим через $P_\pm$ оператор умножения на характеристическую функцию отрезка $[0,1]$ (соответственно отрезка $[-1,0]$). Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} P_+ & P_- \\ P_- & P_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I - K & 0 \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_+ & P_- \\ P_- & P_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I - P_+KP_+ & -P_+KP_- \\ -P_-KP_+ & \lambda I - P_-KP_- \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Введем обозначения

$$\mathbf{U} := \begin{pmatrix} P_+ & P_- \\ P_- & P_+ \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} := \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} P_+KP_+ & P_+KP_- \\ P_-KP_+ & P_-KP_- \end{pmatrix}.$$

Из равенства (54) следует, что оператор $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}$. Докажем, что $\|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\| = \|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\|$. Для этого достаточно показать, что оператор $\mathbf{U}$ изометричен. В самом деле, используя определение нормы (49), для произвольной вектор-функции $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \in L_p^2([-1,1])$ имеем

$$\|\mathbf{U}\varphi\|_{L_p^2([-1,1])} = \left(\int_{-1}^{1} (|(P_+\varphi_1)(x) + (P_-\varphi_2)(x)|^p + |(P_-\varphi_1)(x) + (P_+\varphi_2)(x)|^p)\, dx \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_{-1}^{1} (|\varphi_1(x)|^p + |\varphi_2(x)|^p)\, dx \right)^{1/p} = \|\varphi\|_{L_p^2([-1,1])}.$$

Таким образом, $\mathrm{Sp}_\varepsilon(\mathbf{A}) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(\mathbf{B})$.

Далее, так как $0 \in \mathrm{Sp}(K)$ (см. [5, с. 78]), оператор $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\lambda I - K$, при этом

$$\|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\| = \max\{\|(\lambda I - K)^{-1}\|, \|\lambda^{-1}\|\}.$$

Тогда в силу леммы 9 получаем равенство

$$\|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\| = \|(\lambda I - K)^{-1}\|.$$

Следовательно, $\mathrm{Sp}_\varepsilon(\mathbf{A}) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(K)$. Итак, окончательно имеем

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(K) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(\mathbf{B}). \tag{55}$$

Аналогично доказывается, что

$$\mathrm{Sp}_\varepsilon(K_\tau) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(\mathbf{B}_\tau). \tag{56}$$

Рассмотрим в пространстве $L_p^2([0,1])$ оператор

$$(\mathbf{K}\varphi)(x) = \int_0^1 \boldsymbol{k}(x,y)\varphi(y)\, dy, \quad x \in [0,1],$$

где матрица-функция $\boldsymbol{k}(x,y)$ имеет вид

$$\boldsymbol{k}(x,y) = \begin{pmatrix} k(x,y) & k(x,-y) \\ k(-x,y) & k(-x,-y) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathrm{Sp}_\varepsilon(\mathbf{B}) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(\mathbf{K})$, $\mathrm{Sp}_\varepsilon(\mathbf{B}_\tau) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(\mathbf{K}_\tau)$. Из (55), (56) получаем $\mathrm{Sp}_\varepsilon(K) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(\mathbf{K})$, $\mathrm{Sp}_\varepsilon(K_\tau) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(\mathbf{K}_\tau)$. По аналогии с теоремой 8 устанавливается, что

$$\lim_{\tau\to 0} \mathrm{Sp}_\varepsilon(\mathbf{K}_\tau) = \mathrm{Sp}_\varepsilon(\mathbf{K}) \cup \mathrm{Sp}_\varepsilon(\widetilde{\mathbf{K}}).$$

Следовательно, справедливо равенство (53). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Böttcher A.* Pseudospectra and singular values of large convolution operators // J. Integral Equations Appl. 1994. V. 6. P. 267–301.
2. *Böttcher A., Grudsky S. M., Silbermann B.* Norms of inverses, spectra, and pseudospectra of large truncated Wiener–Hopf operators and Toeplitz matrices // New York J. Math. 1997. V. 3. P. 1–31.
3. *Böttcher A., Grudsky S. M.* Toeplitz matrices, asymptotic linear algebra, and functional analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2000.
4. *Avsyankin O. G., Karapetiants N. K.* Multidimensional integral operators with homogeneous kernels // J. Natur. Geometry. 1999. V. 16. P. 1–18.
5. *Karapetiants N. K., Samko S. G.* Equations with involutive operators. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2001.
6. *Авсянкин О. Г., Карапетянц Н. К.* Многомерные интегральные операторы с однородными степени $(-n)$ ядрами // Докл. РАН. 1999. Т. 368, № 6. С. 727–729.
7. *Михайлов Л. Г.* Новый класс особых интегральных уравнений // Math. Nachr. 1977. V. 76. P. 91–107.
8. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высш. шк., 1991.
9. *Böttcher A., Silbermann B.* Introduction to large truncated Toeplitz matrices. New York: Springer-Verl., 1999.
10. *Böttcher A., Silbermann B.* Analysis of Toeplitz operators. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1990.

Статья поступила 4 июня 2003 г.

Авсянкин Олег Геннадиевич, *Карапетянц Николай Карапетович*
Ростовский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090
avsyanki@math.rsu.ru, nkarapet@math.rsu.ru