Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 515.12

О ВЕСЕ НИГДЕ НЕ ПЛОТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ В КОМПАКТАХ

А. В. Иванов

Аннотация: Исследуется новый кардинальнозначный инвариант топологического пространства $ndw(X)$ (называемый в дальнейшем nd-весом), который определяется как верхняя грань весов нигде не плотных подмножеств X. Основным результатом является доказательство неравенства $hl(X) \le ndw(X)$ для компактов без изолированных точек (hl — наследственное число Линделёфа). Из него следует, в частности, что компакт без изолированных точек счетного nd-веса совершенно нормален. В предположении CH построен пример неметризуемого компакта без изолированных точек счетного nd-веса.

Ключевые слова: компакт, нигде не плотное множество, наследственное число Линделёфа, nd-вес.

В работе исследуется новый кардинальнозначный инвариант топологического пространства $ndw(X)$ (называемый в дальнейшем nd-весом), который определяется как верхняя грань весов нигде не плотных подмножеств X. Первоначальный интерес к nd-весу возник у автора в связи с одним утверждением, имеющим отношение к известной проблеме М. Катетова о метризуемости компакта, квадрат которого наследственно нормален. Недавно была полностью доказана независимость решения этой проблемы от аксиом ZFC (см. [1, 2]). Однако следующее несложное утверждение справедливо без каких-либо дополнительных теоретико-множественных предположений: если квадрат компакта X наследственно нормален и совершенно κ-нормален[1], то все нигде не плотные подмножества X метризуемы. На языке nd-веса последнее означает, что $ndw(X) \le \omega_0$.

Из определения nd-веса сразу следует его монотонность. Легко проверяется также, что nd-вес не возрастает при совершенных отображениях. Примеры компактных расширений дискретных пространств показывают, что для любых кардиналов τ, μ, где $\tau \ge \mu$, существует компакт X, для которого $w(X) = \tau$, $ndw(X) = \mu$. Вообще очевидно, что если в X всюду плотно множество изолированных точек $D(X)$, то $ndw(X) = w(X \setminus D(X))$. Однако в пространствах без изолированных точек исследование nd-веса становится существенно более интересным. Заметим, что всякое топологическое пространство представимо в виде следующего объединения своих замкнутых подпространств: $X = [D(X)] \cup [X \setminus [D(X)]]$, где второе подпространство не имеет изолированных точек.

[1]Пространство X называется *совершенно κ-нормальным*, если оно нормально и любое канонически замкнутое множество в X имеет тип G_δ. Условие совершенной κ-нормальности пространства существенно слабее совершенной нормальности. Так, совершенно κ-нормальными являются все κ-метризуемые компакты, в частности, тихоновские и канторовские кубы I^τ и D^τ (см. статью Е. В. Щепина [3]).

Основным результатом статьи является доказательство неравенства $hl(X) \leq ndw(X)$ для компактов без изолированных точек (hl — наследственное число Линделёфа). Из него следует, в частности, что компакт X счетного nd-веса с $|D(X)| \leq \omega_0$ совершенно нормален. В предположении CH построен пример неметризуемого компакта без изолированных точек счетного nd-веса. Отметим, что известный компакт X «две стрелки» П. С. Александрова имеет

$$\omega_0 = hl(X) < ndw(X) = w(X) = c.$$

В работе рассматриваются только хаусдорфовы пространства. Все отображения предполагаются непрерывными. Внутренность и замыкание множества $A \subset X$ обозначаются соответственно через $\operatorname{Int} A$ и $[A]$.

Определение 1. *nd-Весом $ndw(X)$* топологического пространства X называется кардинальное число, определяемое по формуле

$$ndw(X) = \sup\{w(F) : F \subset X,\ \operatorname{Int}[F] = \varnothing\}.$$

Очевидно, что nd-вес можно определить как верхнюю грань весов замкнутых нигде не плотных подмножеств X. Из определения nd-веса сразу следует неравенство $ndw(X) \leq w(X)$.

Предложение 1. *Пусть $X \subset Y$. Тогда $ndw(X) \leq ndw(Y)$.*

Доказательство. Если F — нигде не плотное подмножество X, то F нигде не плотно в Y. $\square$

Предложение 2. *Пусть $f : X \to Y$ — совершенное отображение X на Y. Тогда $ndw(Y) \leq ndw(X)$.*

Доказательство. Пусть F замкнуто в Y и $\operatorname{Int} F = \varnothing$. Рассмотрим множество $G = f^{-1}(F) \setminus \operatorname{Int} f^{-1}(F)$. Это множество замкнуто и нигде не плотно в X. Покажем, что $f(G) = F$. Предположим противное. Тогда существует точка $y \in F$ такая, что $f^{-1}(y) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(F)$. Значит,

$$y \in Y \setminus f(X \setminus \operatorname{Int} f^{-1}(F)) \subset F;$$

противоречие с $\operatorname{Int} F = \varnothing$. Итак, множество G при совершенном отображении $f|_G$ отображается на F. Следовательно (см. [4]), $w(F) \leq w(G) \leq ndw(X)$. $\square$

В связи с предложением 2 заметим, что для тождественного отображения $f : X \to Y$ отрезка $X = [0, 1]$ с дискретной топологией на отрезок Y с интервальной топологией имеем $0 = ndw(X) < ndw(Y) = \omega_0$.

Пусть X — топологическое пространство и $D(X)$ — множество изолированных точек X. Имеет место

Предложение 3. *Если $D(X)$ всюду плотно в X, то $ndw(X) = w(X \setminus D(X))$.*

Доказательство. В условиях предложения $X \setminus D(X)$ нигде не плотно в X и всякое нигде не плотное в X множество лежит в $X \setminus D(X)$. $\square$

Предложение 4. *Для любых двух кардинальных чисел τ, $\mu : \tau \geq \mu$ существует компакт X веса τ, для которого $ndw(X) = \mu$.*

Доказательство. Достаточно взять в качестве X компактификацию дискретного пространства мощности τ, нарост которой имеет вес μ. Если μ конечно, то такая компактификация может быть получена как дискретное объединение μ экземпляров александровской компактификации $A(\tau)$ дискретного пространства мощности τ. Для бесконечного μ искомой компактификацией является, например, следующее пространство:

$$((\mu+1)\times(\omega_0+1))\oplus A(\tau),$$

где $\mu+1$ и ω_0+1 — пространства ординалов с порядковой топологией. $\square$

Введем обозначения

$$X_d=[D(X)],\quad X_s=[X\setminus X_d].$$

Очевидно, что $X=X_d\cup X_s$ и пространство X_s не имеет изолированных точек, поскольку таких точек нет в $X\setminus X_d$ и $X\setminus X_d$ всюду плотно в X_s.

Предложение 5. *Для любого пространства X*

$$ndw(X)=\max(w(X_d\setminus D(X)),ndw(X_s)).$$

Доказательство. Неравенство

$$ndw(X)\geq\max(w(X_d\setminus D(X)),ndw(X_s))$$

следует из предложений 1 и 3. Докажем обратное неравенство. Если $X_s=\varnothing$, то все очевидно в силу предложения 3. Если же $X_s\neq\varnothing$, то X_s бесконечно и $ndw(X_s)\geq\omega_0$. Пусть F — бесконечное замкнутое нигде не плотное подмножество X. Тогда $F\cap X_d$ и $F\cap X_s$ замкнуты и нигде не плотны соответственно в X_d и X_s. Имеем[2]

$$w(F)=\max(w(F\cap X_d),w(F\cap X_s))\leq\max(ndw(X_d),ndw(X_s)),$$

откуда сразу вытекает искомое обратное неравенство. $\square$

Переходим к доказательству основного утверждения.

Теорема. *Пусть X — компакт. Тогда*

$$hl(X)\leq\max(ndw(X),|D(X)|).$$

Доказательство. Для конечного X утверждение теоремы очевидно, поэтому будем считать, что X бесконечно. Прежде всего заметим, что если пространство X представлено в виде объединения двух своих подмножеств A и B, то $hl(X)=\max(hl(A),hl(B))$. Следовательно, $hl(X)=\max(hl(X_d),hl(X_s))$ и

$$hl(X_d)=\max(hl(D(X)),hl(X_d\setminus D(X)).$$

Далее, $hl(D(X))=|D(X)|$ и

$$hl(X_d\setminus D(X))\leq w(X_d\setminus D(X))=ndw(X_d)\leq ndw(X).$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать неравенство

$$hl(X)\leq ndw(X)\tag{1}$$

для любого компакта X без изолированных точек.

[2]Равенство $w(X)=\max(w(A),w(B))$ справедливо для любого бесконечного пространства X и любых двух его замкнутых подмножеств A, B, объединение которых равно X. Для доказательства достаточно рассмотреть совершенное отображение $f:A\oplus B\to X$, которое склеивает общие точки A и B. Тогда $w(X)\leq w(A\oplus B)=\max(w(A),w(B))\leq w(X)$ (см. [4]).

Предположим, что существует компакт X без изолированных точек, для которого $ndw(X) = \mu < hl(X)$. Очевидно, что $\mu \geq \omega_0$. Пусть $w(X) = \nu$. Рассмотрим стандартное разложение тихоновского куба I^ν в непрерывный вполне упорядоченный обратный спектр[3] $\{I^\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha, \beta \leq \nu\}$, где $I^\alpha = \prod\limits_{\gamma<\alpha} I_\gamma$ (I_γ — экземпляр отрезка $[0,1]$), а π^α_β — естественная проекция произведений. Зафиксируем вложение $X \subset I^\nu$ и положим $X_\alpha = \pi^\nu_\alpha(X)$, $p^\alpha_\beta = \pi^\alpha_\beta\big|_{X_\alpha}$ ($\beta \leq \alpha \leq \nu$). Тем самым получим непрерывный обратный спектр

$$S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta : \alpha, \beta \leq \nu\},$$

дающий в пределе $X = X_\nu$.

Положим $\tau = \min\{\alpha : hl(X_\alpha) > \mu\}$. Заметим, что порядковое число τ не может быть изолированным, поскольку в этом случае $X_\tau \subset X_{\tau-1} \times I_{\tau-1}$, и тогда

$$hl(X_\tau) \leq hl(X_{\tau-1} \times I) \leq hl(X_{\tau-1})w(I) \leq \mu.$$

Для любого компакта Y неравенство $hl(Y) \leq \xi$ равносильно выполнению неравенств $\psi(F, Y) \leq \xi$ для всех замкнутых подмножеств $F \subset Y$ (здесь $\psi(F, Y)$ — псевдохарактер F в Y — наименьшая мощность системы открытых подмножеств X, дающей в пересечении F). Так как $hl(X_\tau) > \mu$, в X_τ найдется замкнутое подмножество F такое, что $\psi(F, X_\tau) > \mu$. При этом можно считать, что F нигде не плотно в X_τ. Если это не так, то достаточно взять разность $H = F \setminus \operatorname{Int} F$, для которой $\psi(H, X_\tau) \geq \psi(F, X_\tau) > \mu$ (если $H = \cap\{U_b : b \in B\}$, то $F = \cap\{U_b \cup \operatorname{Int} F : b \in B\}$). Для множества F имеем

$$F = \bigcap_{\alpha<\tau} \left(p^\tau_\alpha\right)^{-1} p^\tau_\alpha(F). \tag{2}$$

Так как $\psi(p^\tau_\alpha(F), X_\alpha) \leq \mu$ в силу выбора τ, из формулы (2) следует, что конфинальность τ больше μ.

Компакт X_τ является образом X при отображении p^ν_τ. Следовательно, $ndw(X_\tau) \leq \mu$, и, значит, $w(F) \leq \mu$. Поскольку $cf(\tau) > \mu$, найдется α_0 такое, что отображение $p^\tau_\alpha\big|_F : F \to p^\tau_\alpha(F)$ является гомеоморфизмом при всех $\alpha \geq \alpha_0$, т. е. можно считать, что $p^\tau_\alpha(F) = F$ при $\alpha \geq \alpha_0$ (более точно, мы отождествляем F и $p^\tau_\alpha(F)$ по гомеоморфизму $p^\tau_\alpha\big|_F$). В то же время

$$\left(p^\tau_\alpha\right)^{-1}\left(p^\tau_\alpha(F)\right) \neq F \tag{3}$$

для любого α, ибо $\psi(F, X_\tau) > \mu$ и $\psi(p^\tau_\alpha(F), X_\alpha) \leq \mu$.

Рассмотрим множество

$$B = \{\alpha : \alpha \geq \alpha_0 \text{ и } p^\tau_\alpha(F) \text{ нигде не плотно в } X_\alpha\} \subset \tau$$

и докажем, что B замкнуто и конфинально τ. Пусть $\{U_\gamma : \gamma < \mu\}$ — база топологии F. Зафиксируем биекцию $f : \mu \to \mu^2$ и введем обозначение $f(\xi) = (f_1(\xi), f_2(\xi)) \in \mu^2$ ($\xi \in \mu$). Возьмем порядковое число β_0 так, что $\alpha_0 \leq \beta_0 < \tau$, и построим по рекурсии растущую последовательность $\{\beta_\xi : \xi < \mu\}$. Если $U_{f_1(0)}$ открыто в X_{β_0} ($U_{f_1(0)} \subset F = p^\tau_{\beta_0}(F) \subset X_{\beta_0}$), то выберем $\beta_1 > \beta_0$ так, что $\left(p^{\beta_1}_{\beta_0}\right)^{-1} U_{f_1(0)} \not\subset F = p^\tau_{\beta_1}(F)$ (такое β_1 существует, так как $(p^\tau_{\beta_0})^{-1} U_{f_1(0)} \not\subset F$). Иначе возьмем $\beta_1 > \beta_0$ произвольно.

[3] Здесь мы используем терминологию и обозначения из [5].

Предположим, что уже построены элементы последовательности β_ξ при $\xi < \eta$ ($\eta < \mu$) так, что если $U_{f_1(\xi)}$ открыто в X_{β_ξ}, то

$$\left(p^{\beta_{\xi'}}_{\beta_\xi}\right)^{-1} U_{f_1(\xi)} \not\subset F \quad \text{при} \ \ \xi < \xi' < \eta. \tag{4}$$

Если число η предельное, положим $\beta_\eta = \sup\{\beta_\xi : \xi < \eta\}$. Условие (4) при этом, очевидно, будет выполнено.

Если же η является изолированным порядковым числом, то построим $\beta_\eta > \beta_{\eta-1}$ совершенно так же, как выше было построено $\beta_1 > \beta_0$: если $U_{f_1(\eta-1)}$ открыто в $X_{\beta_{\eta-1}}$, то выберем β_η так, что

$$\left(p^{\beta_\eta}_{\beta_{\eta-1}}\right)^{-1} U_{f_1(\eta-1)} \not\subset F.$$

Продолжая рекурсию, получим искомую последовательность $\{\beta_\xi : \xi < \mu\}$.

Положим $\alpha = \sup\{\beta_\xi : \xi < \mu\}$ и докажем, что $\alpha \in B$. Предположим противное. Тогда $\operatorname{Int}(p^\tau_\alpha(F)) \neq \varnothing$ и в силу непрерывности спектра S найдутся индекс $\gamma : \alpha_0 \leq \gamma < \alpha$ и открытое в X_γ множество U такие, что

$$\left(p^\alpha_\gamma\right)^{-1} U \subset p^\tau_\alpha(F). \tag{5}$$

При этом $U \subset p^\tau_\gamma(F) = F$ и, значит, существует открытое в X множество U_ξ из базы F такое, что $U_\xi \subset U$. Из включения (5) следует, что для любого $\gamma' : \gamma \leq \gamma' \leq \alpha$

$$\left(p^{\gamma'}_\gamma\right)^{-1} U_\xi = U_\xi \subset F = p^\tau_{\gamma'}(F),$$

т. е. U_ξ открыто в $X_{\gamma'}$.

Возьмем порядковое число η так, что $\beta_\eta > \gamma$ и $f_1(\eta) = \xi$. Тогда

$$U_\xi = \left(p^{\beta_{\eta+1}}_\gamma\right)^{-1} U_\xi = \left(p^{\beta_{\eta+1}}_{\beta_\eta}\right)^{-1} \left(p^{\beta_\eta}_\gamma\right)^{-1} U_\xi = \left(p^{\beta_{\eta+1}}_{\beta_\eta}\right)^{-1} U_\xi,$$

но по построению последовательности $\{\beta_\xi : \xi < \mu\}$ (см. условие (4)) имеем $(p^{\beta_{\eta+1}}_{\beta_\eta})^{-1} U_\xi \not\subset F$; противоречие.

Итак, B конфинально τ. Замкнутость B сразу следует из непрерывности спектра S.

Теперь построим по рекурсии растущую последовательность $\{\gamma_\alpha : \alpha < cf(\tau)\} \subset B$ и замкнутые подмножества $F_{\gamma_\alpha} \subset X_{\gamma_\alpha}$, $\alpha < cf(\tau)$, так, что

1) $F \subset F_{\gamma_\alpha}$,
2) F_{γ_α} нигде не плотно в X_{γ_α},
3) $(p^{\gamma_{\alpha'}}_{\gamma_\alpha}) F_{\gamma_{\alpha'}} = F_{\gamma_\alpha}$, $(\alpha' \geq \alpha)$,
4) отображение $(p^{\gamma_{\alpha'}}_{\gamma_\alpha})\big|_{F_{\gamma_{\alpha'}}}$ не является гомеоморфизмом $(\alpha' > \alpha)$.

Возьмем произвольно $\gamma_0 \in B$ и положим $F_{\gamma_0} = F \subset X_{\gamma_0}$. Предположим, что построение проведено для всех $\alpha < \eta$ так, что выполняются условия 1–4 для всех α', $\alpha < \eta$. Если η — предельное число, то положим $\gamma_\eta = \sup\{\gamma_\alpha : \alpha < \eta\}$ и в качестве F_{γ_η} возьмем предел обратного спектра

$$\left\{F_{\gamma_\alpha}, (p^{\gamma_{\alpha'}}_{\gamma_\alpha})|_{F_{\gamma_{\alpha'}}} : \alpha, \alpha' < \eta\right\},$$

который лежит в X_{γ_η}. Легко проверить, что при этом будут выполняться условия 1–4 для $\alpha, \alpha' \leq \eta$. Пусть теперь $\eta = \delta + 1$. По построению $F \subset F_{\gamma_\delta}$. Покажем, что существует $\gamma_\eta \in B$, $\gamma_\eta > \gamma_\delta$, такое, что в множестве $(p^{\gamma_\eta}_{\gamma_\delta})^{-1} F \setminus F$ имеется неизолированная в X_{γ_η} точка z. Прежде всего заметим, что $|D(X_\tau)| \leq \mu$. В противном случае в компакте X имеется семейство $\left\{U_b = (p^\nu_\tau)^{-1} b : b \in D(X_\tau)\right\}$, состоящее из попарно не пересекающихся открытых множеств. Возьмем в каждом U_b по точке x_b и положим $H = \{x_b : b \in D(X_\tau)\}$. Поскольку $D(X) = \varnothing$, множество H нигде не плотно в X. Но $w(H) > \mu$; противоречие с $ndw(X) = \mu$.

Итак, $|D(X_\tau)| \leq \mu$. В силу неравенства (3) и $cf(\tau) > \mu$ имеем

$$\left|\left(p^\tau_{\gamma_\delta}\right)^{-1} F \setminus F\right| > \mu.$$

Следовательно, множество $(p^\tau_{\gamma_\delta})^{-1} F \setminus F$ содержит неизолированную в X_τ точку x. Возьмем $\beta \in B$, $\beta > \gamma_\delta$, так, что $p^\tau_\beta(x) \notin F$, и покажем, что существует $\beta' \geq \beta$ ($\beta' \in B$), для которого точка $p^\tau_{\beta'}(x)$ не является изолированной в $X_{\beta'}$. Предположим противное. Тогда можно построить растущую последовательность $\{\beta_k : k < \omega_0\}$, $\beta_k \in B$, так, что $\beta_0 = \beta$ и $\left|\left(p^{\beta_{k+1}}_{\beta_k}\right)^{-1}(p^\tau_{\beta_k}(x))\right| > 1$ для любого k (последнее выполнимо, поскольку ввиду предположения $\left|\left(p^\tau_{\beta'}\right)^{-1}\left(p^\tau_{\beta'}(x)\right)\right| > 1$ для любого $\beta' \geq \beta$). Положим $\beta' = \sup\{\beta_k : k < \omega_0\} \in B$. В силу непрерывности спектра S и построения последовательности β_k точка $p^\tau_{\beta'}(x)$ не является изолированной в $X_{\beta'}$.

Итак, можно выбрать $\gamma_\eta = \beta' > \gamma_\delta$ таким образом, что $z = p^\tau_{\gamma_\eta}(x) \notin F$ и z не является изолированной точкой в X_{γ_η}. Положим теперь

$$F_{\gamma_\eta} = \left(\left(p^{\gamma_\eta}_{\gamma_\delta}\right)^{-1} F_{\gamma_\delta} \setminus \operatorname{Int}\left(\left(p^{\gamma_\eta}_{\gamma_\delta}\right)^{-1} F_{\gamma_\delta}\right)\right) \cup F \cup \{z\}.$$

Легко показать, что F_{γ_η} удовлетворяет условиям 1–4 рекурсивного построения. В результате построения получим обратный спектр

$$S_0 = \left\{F_{\gamma_\alpha}, p^{\gamma_\alpha}_{\gamma_{\alpha'}}|_{F_{\gamma_\alpha}} :\ \alpha, \alpha' < cf(\tau)\right\}.$$

Пусть $\gamma = \sup\{\gamma_\alpha : \alpha < cf(\tau)\}$. Ясно, что $\gamma \leq \tau$ и $\Phi = \lim S_0 \subset X_\gamma$. Кроме того, Φ нигде не плотно в X_γ, и $w(\Phi) \geq cf(\tau) > \mu$. Получено противоречие с тем, что $ndw(X_\gamma) \leq ndw(X_\tau) \leq \mu$. $\square$

Следствие 1. *Если $|D(X)| \geq ndw(X)$ для компакта X, то $hl(X) = |D(X)|$.*

Следствие 2. *Если $|D(X)| \leq ndw(X) \leq \omega_0$, то компакт X совершенно нормален.*

Как уже отмечалось, примером компакта, для которого

$$\omega_0 = hl(X) < ndw(X) = w(X) = c,$$

могут служить «две стрелки» П. С. Александрова.

Пример (CH). Существует неметризуемый компакт X без изолированных точек счетного nd-веса.

Пусть I — отрезок $[0,1]$. В предположении CH занумеруем нигде не плотные замкнутые подмножества I счетными порядковыми числами: $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Для любого $\beta < \omega_1$ имеем $\cup\{F_\alpha : \alpha < \beta\} \neq I$, следовательно, можно выбрать точку $x_\beta \in I \setminus \cup\{F_\alpha : \alpha < \beta\}$. В итоге получим несчетное множество $A = \{x_\beta : \beta < \omega_1\}$ такое, что $|F_\alpha \cap A| \leq \omega_0$ для любого нигде не плотного замкнутого множества $F_\alpha \subset I$.

Пусть Y — компакт «две стрелки» и $\pi : Y \to I$ — стандартное отображение Y на отрезок кратности 2. Рассмотрим на Y разбиение R, нетривиальными элементами которого являются множества вида $\pi^{-1}(x)$ при $x \in I \setminus A$. Факторпространство Y/R и есть искомый компакт X. В самом деле, $w(X) = |A| = \omega_1$.

Обозначим через f однозначное непрерывное отображение $f = \pi \circ p^{-1} : X \to I$, где $p : Y \to Y/R = X$ — факторная проекция. Пусть F — замкнутое нигде не плотное подмножество X. Тогда $f(F)$ нигде не плотно в I, поскольку нетрудно проверить, что если интервал (a, b) лежит в $f(F)$, то $f^{-1}(a, b) \subset F$. Следовательно, $|f(F) \cap A| \leq \omega_0$ и, значит, $w(F) \leq \omega_0$. Таким образом, $ndw(X) \leq \omega_0$. $\square$

Вопрос. Можно ли построить аналогичный компакт без дополнительных теоретико-множественных предположений?

В заключение докажем сформулированное во введении

Предложение 6. *Пусть X — компакт. Если пространство X^2 наследственно нормально и совершенно κ-нормально, то $ndw(X) \leq \omega_0$.*

Доказательство. Возьмем в X замкнутое нигде не плотное подмножество F. Пусть Δ — диагональ X^2 и

$$\Delta_F = \{(x, x) : x \in F\} \subset \Delta.$$

Положим $A = \Delta \setminus \Delta_F$, $B = (X \times F) \setminus \Delta$. Очевидно, что A и B — замкнутые непересекающиеся подмножества в $X^2 \setminus \Delta_F$ и $[A]_{X^2} \cap [B]_{X^2} = \Delta_F$, поскольку F нигде не плотно в X. В силу нормальности $X^2 \setminus \Delta_F$ у множеств A и B найдутся окрестности U и V с непересекающимися замыканиями в $X^2 \setminus \Delta_F$. Легко видеть, что

$$\Delta_F = [U]_{X^2} \cap [V]_{X^2}.$$

Так как X^2 совершенно κ-нормально, отсюда следует, что Δ_F является G_δ-подмножеством X^2. Значит, Δ_F — G_δ-подмножество F^2, откуда вытекает метризуемость F (см. [4]). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Larson P., Todorčević S.* Katetov's problem // Trans. Amer. Math. Soc. 2001. V. 354, N 5. P. 1783–1791.
2. *Gruenhage G., Nyikos P.* Normality in X^2 for compact X // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 340, N 2. P. 442–478.
3. *Щепин Е. В.* О κ-метризуемых пространствах // Изв. АН СССР. 1979. Т. 43, № 2. С. 442–479.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
5. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

Статья поступила 31 марта 2003 г.

Иванов Александр Владимирович
Петрозаводский гос. университет, кафедра геометрии и топологии,
пр. Ленина, 33, Петрозаводск 185640
ivanov@psu.karelia.ru