Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 512.545

СПЛЕТЕНИЯ И УНИВЕРСАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

С. В. Морозова

Аннотация: Рассматривается вопрос о сохранении универсальной эквивалентности для декартовых и прямых сплетений решеточно упорядоченных групп и групп. Доказана бесконечность базисного ранга квазимногообразия нильпотентных групп без кручения ступени нильпотентности $\leq c$ ($c \geq 2$).

Ключевые слова: универсальная эквивалентность, нильпотентная группа, решеточно упорядоченная группа, квазимногообразие групп, базисный ранг.

Две группы (решеточно упорядоченные группы или ℓ-группы) G и G' называются *универсально эквивалентными*, если всякая замкнутая формула групповой (ℓ-групповой) сигнатуры, не содержащая кванторов существования, истинна на G тогда и только тогда, когда она истинна на G'.

Ранее Е. И. Тимошенко [1] показал, что свойство универсальной эквивалентности сохраняется при прямом сплетении групп. О. Шапю [2] изучал свойство универсальной эквивалентности свободных метабелевых групп. В данной работе рассматривается вопрос сохранения универсальной эквивалентности для декартовых и прямых сплетений решеточно упорядоченных групп и групп.

1. Доказано, что если G — ℓ-группа (группа), A — линейно упорядоченная абелева группа (абелева группа без кручения), A^* — ее делимое пополнение, то декартово сплетение G и A универсально эквивалентно декартову сплетению G и A^* при естественном решеточном порядке (теорема 3.2). Построен пример, показывающий, что свойство универсальной эквивалентности для декартовых сплетений ℓ-групп в общем случае не сохраняется (пример 3.1).

2. Получен аналог результата Е. И. Тимошенко [1] для ℓ-групп. Показано, что если A, A' — ℓ-группы, B, B' — линейно упорядоченные группы, причем A универсально эквивалентна A', B универсально эквивалентна B', то прямое сплетение A и B универсально эквивалентно прямому сплетению A' и B' при естественном решеточном порядке (теорема 2.4).

3. Доказано, что базисный ранг квазимногообразия нильпотентных групп без кручения ступени нильпотентности $\leq c$, где $c \geq 2$, не порождается всеми своими n-порожденными группами (теорема 4.1) и, следовательно, имеет бесконечный базисный ранг.

§ 1. Предварительные сведения

Будем рассматривать ℓ-группу как алгебраическую систему сигнатуры $\ell = \langle \cdot, {}^{-1}, e, \vee, \wedge \rangle$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–06007).

Пусть A — ℓ-группа, B — линейно упорядоченная группа, тогда через $A\mathrm{Wr}B$ обозначим *декартово сплетение* ℓ-группы A и линейно упорядоченной группы B, решеточно упорядоченное по правилу: $fb \geq e$ ($f \in \mathrm{Fun}(B, A) = \overline{\prod\limits_{b\in B}} A_b$, $b \in B$) $\iff$ $b > e$ или $b = e$, $f(b') \geq e$ для любого $b' \in B$. (Если A и B — группы, то через $A\,\mathrm{Wr}\,B$ обозначим *декартово сплетение* групп).

Через $A\,\mathrm{wr}\,B$ обозначим *прямое сплетение* ℓ-группы A и линейно упорядоченной группы B, решеточно упорядоченное относительно индуцированного порядка.

Прямое произведение бесконечных циклических групп, порожденных элементами b, c, будем обозначать через $(b) \times (c)$, а *лексикографическое произведение* — через $(b) \overleftarrow{\times} (c)$.

Как обычно, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $|x| = x \vee x^{-1}$, $x \gg y$ означает, что $x > y^n$ для любых положительных x, y и любого натурального n.

Если H_1, H_2 — ℓ-подгруппы ℓ-группы G, то $H_1 \perp H_2$ означает, что для любых элементов $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ выполнено $|h_1| \wedge |h_2| = e$.

Расширение G группы A посредством группы B называется *расщепляемым*, если в G существуют нормальная подгруппа H и подгруппа K такие, что $G = H \cdot K$, $A \cong H$, $H \cap K = e$. Очевидно, что $K \cong G/A$. Группу G называют еще *полупрямым произведением* групп A и B и обозначают через $G = A\lambda B$.

Говорят, что *базисный ранг* квазимногообразия групп $\mathscr{X}$ равен n, если это квазимногообразие порождается некоторой n-порожденной группой и не порождается группой с меньшим числом порождающих. Если такого натурального числа n нет, то ранг квазимногообразия $\mathscr{X}$ групп бесконечен [3].

Через $G_1{\times}G_2{\times}\cdots{\times}G_m$ $(g_1 = g_2 = \cdots = g_m)$ обозначим прямое произведение m экземпляров групп $G_1, \dots, G_m$ с объединенными подгруппами $(g_1), \dots, (g_m)$, т. е. G/N, где $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$, $N = gp\langle g_1g_2^{-1}, g_1g_3^{-1}, \dots, g_1g_m^{-1}\rangle^G$ — нормальная подгруппа группы G, порожденная элементами $g_1g_2^{-1}, g_1g_3^{-1}, \dots, g_1g_m^{-1}$.

Пусть Q_{10} — подгруппа аддитивной группы рациональных чисел, состоящая из элементов вида m/n, где $n = 2^k5^l$, m, k, l — целые числа. На полупрямом произведении $Q_{10}\lambda((b) \otimes (c))$ определим операцию следующим образом:

$$q_1b^{k_1}c^{k_2}q_2b^{l_1}c^{l_2} = (q_1 + 2^{-k_1}5^{-k_2}q_2)b^{k_1+l_1}c^{k_2+l_2}.$$

Все неопределенные понятия и обозначения можно найти в [4, 5].

§ 2. Прямое сплетение ℓ-групп

Основной результат этого параграфа аналогичен полученному ранее Е. И. Тимошенко для групп [1]. Отметим, что в данной работе приведено другое доказательство, отличное от предложенного в [1].

Лемма 2.1. *Пусть A — ℓ-подгруппа, B — линейно упорядоченная подгруппа ℓ-группы G, причем для любого элемента $b \in B$, $b \neq e$, выполнено условие $A^b \perp A$. Тогда $H = \ell - gp\langle A, B\rangle \cong A\,\mathrm{wr}\,B$.*

Доказательство. Очевидно, что нормальное замыкание $(A)^H$ решеточно упорядоченной подгруппы A в ℓ-группе H совпадает с прямым ℓ-произведением $\prod\limits_{b\in B} A^b$. В [6, с. 23] показано, что $b \gg a$ для любых положительных $a \in A$,

$b \in B$. Поэтому $H/(A)^H \cap B = e$ и $H = \prod\limits_{b \in B} A^b \overleftarrow{\lambda} B$. Стандартные рассуждения показывают изоморфизм ℓ-группы H и прямого сплетения $A \operatorname{wr} B$. $\Box$

Следующие утверждения аналогичны доказанным ранее для групп в работе Р. Брайанта и Д. Гровса [7].

Лемма 2.2. *Пусть A — решеточно упорядоченная группа, B — линейно упорядоченная группа, $\mathscr{F}$ — ультрафильтр над некоторым множеством I. Тогда в ℓ-группе $\bar{\prod\limits_{i \in I}}(A \operatorname{wr} B)_i/\mathscr{F}$ содержится ℓ-подгруппа, изоморфная $\big(\bar{\prod\limits_{i \in I}} A_i/\mathscr{F}\big) \operatorname{wr} B$.*

Доказательство. Любой элемент из $\bar{\prod\limits_{i \in I}}(A \operatorname{wr} B)_i/\mathscr{F}$ имеет вид

$$(\dots,(\dots,a_{b_j},\dots)b_i,\dots)\mathscr{F}.$$

Очевидно, что

$$gp\langle(\dots,((\dots,e,\dots)b)_i,((\dots,e,\dots)b)_{i'},\dots)\mathscr{F},\ b \in B\rangle \cong B.$$

Элементы вида $(\dots,(\dots,e,a_e,e,\dots)_i,(\dots,e,a'_e,e,\dots)_{i'},\dots)\mathscr{F}$ образуют ℓ-группу, изоморфную $\bar{\prod\limits_{i \in I}} A_i/\mathscr{F} = \overline{A}$.

Заметим, что при сопряжении элемента

$$(\dots,(\dots,e,a_e,e,\dots)_i,(\dots,e,a'_e,e,\dots)_{i'},\dots)\mathscr{F}$$

элементом $(\dots,((\dots,e,\dots)b)_i,((\dots,e,\dots)b)_{i'},\dots)\mathscr{F}$, где $b \in B$, $b \neq e$, получим элемент $(\dots,(\dots,e,a_b,e,\dots)_i,(\dots,e,a'_b,e,\dots)_{i'},\dots)\mathscr{F}$, который ортогонален исходному. Отождествим изоморфные ℓ-группы. Тогда $\overline{A}^b \perp \overline{A}$, где $b \neq e$. Значит, по лемме 2.1 имеет место $\ell - gp\langle\overline{A},B\rangle \cong \overline{A} \operatorname{wr} B = \big(\bar{\prod\limits_{i \in I}} A_i/\mathscr{F}\big) \operatorname{wr} B$. $\Box$

Лемма 2.3. *Пусть A — решеточно упорядоченная группа, B — линейно упорядоченная группа, $\mathscr{F}$ — ультрафильтр над некоторым множеством I. Тогда в ℓ-группе $\bar{\prod\limits_{i \in I}}(A \operatorname{wr} B)_i/\mathscr{F}$ содержится ℓ-подгруппа, изоморфная $A \operatorname{wr} \big(\bar{\prod\limits_{i \in I}} B_i/\mathscr{F}\big)$.*

Доказательство. Рассмотрим элементы вида

$$(\dots,(\dots,e,\dots)b_i,(\dots,e,\dots)b_j,\dots)\mathscr{F}.$$

Они образуют линейно упорядоченную группу, изоморфную $\bar{\prod\limits_{i \in I}} B_i/\mathscr{F} = \overline{B}$. Очевидно, что

$$\ell\text{-}gp\langle(\dots,(\dots,e,a_e,e,\dots)_i,(\dots,e,a_e,e,\dots)_j,\dots)\mathscr{F},\quad a \in A\rangle \cong A.$$

Заметим, что при сопряжении элемента

$$(\dots,(\dots,e,a_e,e,\dots)_i,(\dots,e,a_e,e,\dots)_j,\dots)\mathscr{F},$$

где $a \in A$, элементом $(\dots,(\dots,e,\dots)b_i,(\dots,e,\dots)b_j,\dots)\mathscr{F}$ получим элемент, который ортогонален исходному. Отождествим изоморфные ℓ-подгруппы. Тогда $A^{b\mathscr{F}} \perp A$, где $b\mathscr{F} \in \overline{B}$.

По лемме 2.1 имеет место $\ell\text{-}gp\langle A, \overline{B}\rangle \cong A \operatorname{wr} \overline{B} = A \operatorname{wr} \big(\overline{\prod_{i\in I}} B_i/\mathscr{F}\big)$. $\square$

Для произвольного класса Γ решеточно упорядоченных групп обозначим через $S(\Gamma)$ класс, состоящий из всевозможных ℓ-подгрупп ℓ-групп из Γ; через $P_u(\Gamma)$ класс, состоящий из всевозможных ультрапроизведений ℓ-групп из Γ; через $\mathscr{U}(\Gamma)$ — универсальный класс, порожденный ℓ-группами из Γ.

Теорема 2.4. *Пусть $G = A \operatorname{wr} B$, $\widehat{G} = \widehat{A} \operatorname{wr} \widehat{B}$, где A, $\widehat{A}$ — ℓ-группы, B, $\widehat{B}$ — линейно упорядоченные группы, причем A универсально эквивалентна $\widehat{A}$, B универсально эквивалентна $\widehat{B}$. Тогда G универсально эквивалентна $\widehat{G}$.*

Доказательство. Решеточно упорядоченные группы G и $\widehat{G}$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда универсальные классы, порожденные ими, совпадают, т. е. $\mathscr{U}(G) = SP_u(G) = SP_u(\widehat{G}) = \mathscr{U}(\widehat{G})$.

Так как A универсально эквивалентна $\widehat{A}$, B универсально эквивалентна $\widehat{B}$, то $\widehat{A}$ — ℓ-подгруппа $\overline{\prod_{i\in I_1}} A/\mathscr{F}_1$, $\widehat{B}$ — ℓ-подгруппа $\overline{\prod_{i\in I_2}} B/\mathscr{F}_2$, где $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ — ультрафильтры над некоторыми непустыми множествами индексов I_1, I_2 соответственно.

Рассмотрим $\overline{\prod_{i\in I_1}} (A \operatorname{wr} B)_i/\mathscr{F}_1$. По лемме 2.2 имеем $\big(\overline{\prod_{i\in I_1}} A_i/\mathscr{F}_1\big) \operatorname{wr} B \in \mathscr{U}(G)$. Очевидно, что $\widehat{A} \operatorname{wr} B$ является ℓ-подгруппой $\big(\overline{\prod_{i\in I_1}} A_i/\mathscr{F}_1\big) \operatorname{wr} B$. Значит, $\widehat{A} \operatorname{wr} B \in \mathscr{U}(G)$.

Рассмотрим $\overline{\prod_{i\in I_2}} (\widehat{A} \operatorname{wr} B)_i/\mathscr{F}_2$. По лемме 2.3 имеем $\widehat{A} \operatorname{wr} \big(\overline{\prod_{i\in I_2}} B_i/\mathscr{F}_2\big) \in \mathscr{U}(G)$. Очевидно, что $\widehat{A} \operatorname{wr} \widehat{B}$ является ℓ-подгруппой $\widehat{A} \operatorname{wr} \big(\overline{\prod_{i\in I_2}} B_i/\mathscr{F}_2\big)$. Значит, $\widehat{A} \operatorname{wr} \widehat{B} \in \mathscr{U}(G)$. $\square$

В случае, если группы A и B являются линейно упорядоченными, на сплетении $G = A \operatorname{wr} B$ можно (следуя работе [8, с. 419–420, 423–424]) определить два различных линейных порядка. Любой элемент $g \in G$ однозначно представим в виде $g = a_{b_1} \dots a_{b_k} \cdot b$, где $a_{b_i} \in A_{b_i}$, $b \in B$, $b_1 < b_2 < \dots < b_k$ при линейном порядке группы B и $a_e^b = a_b$. Считаем $g = a_{b_1} \dots a_{b_k} \cdot b > e$, если $b > e$ или $b = e$ и $a_{b_k} > e$ в $A_{b_k} \cong A$. Отметим, что при этом линейном порядке $|a_{b_1}| \gg |a_{b_2}|$, если $b_1 > b_2$ и $a_{b_1}, a_{b_2} \neq e$. Назовем такой порядок группы G *порядком типа* (A) и будем обозначать через $A \overleftarrow{\operatorname{wr}} B$. Считаем $g = a_{b_1} \dots a_{b_k} \cdot b > e$, если $b > e$ или $b = e$ и $a_{b_1} > e$ в A_{b_1}. Отметим, что при этом линейном порядке $|a_{b_1}| \ll |a_{b_2}|$, если $b_1 > b_2$ и $a_{b_1}, a_{b_2} \neq e$. Назовем такой порядок группы G *порядком типа* (B) и будем обозначать через $A \overrightarrow{\operatorname{wr}} B$.

Рассуждения, аналогичные проведенным ранее, доказывают справедливость следующего утверждения.

Предложение 2.5. *Пусть $G = A \overleftarrow{\operatorname{wr}} B$ ($A \overrightarrow{\operatorname{wr}} B$), $\widehat{G} = \widehat{A} \overleftarrow{\operatorname{wr}} \widehat{B}$ ($\widehat{A} \overrightarrow{\operatorname{wr}} \widehat{B}$), где A, $\widehat{A}$, B, $\widehat{B}$ — линейно упорядоченные группы, причем A универсально эквивалентна $\widehat{A}$, B универсально эквивалентна $\widehat{B}$. Тогда G универсально эквивалентна $\widehat{G}$.* $\square$

Предложение 2.6. *Пусть G — группа, (a) — бесконечная циклическая группа, тогда $G \operatorname{wr} (a)$ универсально эквивалентно $(G \times \dots \times G) \operatorname{wr} (a)$.*

Доказательство. Имеем

$$G \operatorname{wr}(a) = \prod_{i\in Z} G_{a^i}\lambda(a) = \prod_{k\in Z}(G_{a^{nk}} \times G_{a^{nk+1}} \cdots \times G_{a^{nk+(n-1)}})\lambda(a)$$
$$\geq \prod_{k\in Z}(G_{a^{nk}} \times G_{a^{nk+1}} \cdots \times G_{a^{nk+(n-1)}})\lambda(a^n) \cong \prod_{k\in Z}(G\times G\cdots\times G)_{a^k}\lambda(a)$$
$$= (G\times\cdots\times G)\operatorname{wr}(a). \quad \square$$

§ 3. Декартово сплетение групп и ℓ-групп

Критерий универсальной эквивалентности [9, с. 171–176]. *Для универсальной эквивалентности двух групп (ℓ-групп) необходимо и достаточно, чтобы каждая конечная подмодель первой группы (ℓ-группы) имела изоморфную подмодель в другой группе (ℓ-группе), и наоборот.*

Результат, аналогичный теореме 2.4 для декартовых сплетений, неверен, как показывает следующий пример.

Пример 3.1. Пусть $G_1 = Q_{10} \operatorname{Wr}(a)$, где (a) — бесконечная циклическая группа, $G_2 = Q_{10} \operatorname{Wr}((b) \overleftarrow{\times} (c))$. Известно [5, теорема 14.3.1], что все нетривиальные линейно упорядоченные абелевы группы универсально эквивалентны. Поэтому линейно упорядоченная группа $((b) \overleftarrow{\times} (c))$ универсально эквивалентна линейно упорядоченной бесконечной циклической группе (a).

Заметим теперь, что квазитождество

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x,y]^y = [x,y]^2 \& [x,y]^z = [x,y]^5 \Rightarrow [x,y] = e)$$

выполнено в ℓ-группе G_1, но нарушается в ℓ-группе G_2.

Рассмотрим группу $G = Q_{10}\lambda((b)\times(c))$. По теореме Фробениуса [4, теорема 6.2.8.] G изоморфно вложима в $Q_{10} \operatorname{Wr}((b)\times(c))$. Непосредственная проверка показывает, что это квазитождество нарушается в группе G при $x = 1$, $y = b$, $z = c$ и, следовательно, в ℓ-группе G_2.

Теперь покажем выполнимость этого квазитождества в ℓ-группе G_1. Действительно, предположим, что квазитождество ложно в G_1. Тогда существуют элементы $x = f_1a^{k_1}$, $y = f_2a^{k_2}$, $z = f_3a^{k_3}$ из G_1 такие, что $[x,y]^y = [x,y]^2$, $[x,y]^z = [x,y]^5$, $[x,y] \neq e$. Поскольку коммутатор $[x,y]$ содержится в базе сплетения $G_1 = Q_{10} \operatorname{Wr}\overleftarrow{(a)}$, то $[x,y] = f \in \operatorname{Fun}((a), Q_{10})$. Тогда

$$[x,y]^y = f^{f_2a^{k_2}} = f^{a^{k_2}} = f^2, \quad [x,y]^z = f^{f_3a^{k_3}} = f^{a^{k_3}} = f^5.$$

Но $f^{a^{k_2\cdot k_3}} = f^{2^{k_3}} = f^{5^{k_2}}$. Так как группа G_1 не имеет кручения, то $2^{k_3} = 5^{k_2}$ и $k_2 = k_3 = 0$. В этом случае $[x,y]^y = [x,y]$ и $[x,y]^y = [x,y]^2$, что влечет равенство $[x,y] = e$. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть G — ℓ-группа (группа), A — линейно упорядоченная абелева группа (абелева группа без кручения), A^* — ее делимое пополнение, тогда $G \operatorname{Wr} A$ универсально эквивалентно $G \operatorname{Wr} A^*$.*

Доказательство. Так как линейно упорядоченная группа A^* является пополнением линейно упорядоченной группы A, для любой подмодели из ℓ-группы $G \operatorname{Wr} A$ можно найти изоморфную подмодель из ℓ-группы $G \operatorname{Wr} A^*$.

Рассмотрим теперь произвольную конечную подмодель $\{f_1q_1, \dots, f_nq_n\}$ из ℓ-группы $G \operatorname{Wr} A^*$. Найдем изоморфную ей подмодель в $G \operatorname{Wr} A$. Поскольку $mq_1, \dots, mq_n \in A$ для некоторого целого m, то

$$H = gp\langle q_1, \dots, q_n\rangle \cong gp\langle mq_1, \dots, mq_n\rangle = \widehat{H}.$$

Рассмотрим A^*/H. Тогда $A^* = \bigcup\limits_{a \in A^*} (a+H)$, где $(a+H)$ — смежный класс. Значит,

$$\operatorname{Fun}(A^*, G) = \bar{\prod_{(a+H)\in A^*/H}} \Big(\bar{\prod_{q \in (a+H)}} G_q \Big).$$

Рассмотрим операцию на элементах подмодели $f_iq_if_jq_j = f_if_j^{-q_i}[q_i+q_j]$, причем сопряжение действует следующим образом: $f_j^{-q_i}(q) = f_j(q+q_i)$. Так как $a+H+q_i = a+H$, то

$$\Big(\bar{\prod_{(a+H)\in A^*/H}} \Big(\bar{\prod_{q \in (a+H)}} G_q \Big)\Big)^{q_i} = \bar{\prod_{(a+H)\in A^*/H}} \Big(\bar{\prod_{q \in (a+H)}} G_q \Big)^{q_i}.$$

Построим для подмодели $\{f_1q_1, \dots, f_nq_n\}$ изоморфную ей подмодель $\{\bar{f}_1q_1, \dots, \bar{f}_nq_n\}$ из ℓ-группы $G \operatorname{Wr} A^*$ такую, что $\overline{f}_i \in \prod\limits_{(a+H)\in A^*/H} \Big(\bar{\prod\limits_{q \in (a+H)}} G_q \Big)$, где $i \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть $f_i \neq f_j$. Существует хотя бы один $q \in A^*$ такой, что $f_i(q) \neq f_j(q)$. Тогда $q \in (a+H)$ для некоторого $a \in A^*$. Выберем по одному смежному классу I^1_{ij} индексов для каждой такой пары элементов исходной подмодели. Положим $I^1 = \bigcup\limits_{i \neq j} I^1_{ij}$, где $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Подобным образом возьмем по одному смежному классу I^2_{ijk} индексов, на которых $f_if_j^{-q_i} \neq f_k$, перебрав все возможные тройки элементов подмодели. Пусть $I^2 = \bigcup\limits_{i,j,k} I^2_{ijk}$, $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Аналогично построим множества I^3, I^4, I^5, для которых $f_i^{-1} \neq f_j$, $f_i \wedge f_j \neq f_k$, $f_i \vee f_j \neq f_k$ соответственно.

Пусть $I = I^1 \cup I^2 \cup I^3 \cup I^4 \cup I^5$. Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ положим $\bar{f}_i = \{\bar{f}_i(q)\}$, где

$$\bar{f}_i(q) = \begin{cases} f_i(q), & \text{если } q \in I, \\ e, & \text{если } q \notin I. \end{cases}$$

Покажем, что подмодели $\{f_1q_1, \dots, f_nq_n\}$ и $\{\bar{f}_1q_1, \dots, \bar{f}_nq_n\}$ изоморфны. В самом деле, $\bar{f}_iq_i = \bar{f}_jq_j \iff q_i = q_j$ и $\bar{f}_i(q) = \bar{f}_j(q)$ для любого $q \in A^* \iff q_i = q_j$ и $\bar{f}_i(q) = \bar{f}_j(q)$ при $q \in I \iff q_i = q_j$ и $f_i(q) = f_j(q)$ при $q \in I$. Очевидно, что это выполнено тогда и только тогда, когда $f_iq_i = f_jq_j$. В противном случае существует $q \in I$, $f_i(q) \neq f_j(q)$. Тогда и $\bar{f}_i(q) \neq \bar{f}_j(q)$; противоречие.

По построению множеств I^1, I^2, I^3, I^4, I^5 получим

1) $\bar{f}_iq_i \neq \bar{f}_jq_j \iff f_iq_i \neq f_jq_j$;
2) $\bar{f}_iq_i\bar{f}_jq_j = \bar{f}_kq_k \iff f_iq_if_jq_j = f_kq_k$;
3) $(\bar{f}_iq_i)^{-1} = \bar{f}_jq_j \iff (f_iq_i)^{-1} = f_jq_j$;
4) $\bar{f}_iq_i \wedge \bar{f}_jq_j = \bar{f}_kq_k \iff f_iq_i \wedge f_jq_j = \bar{f}_kq_k$;
5) $\bar{f}_iq_i \vee \bar{f}_jq_j = \bar{f}_kq_k \iff f_iq_i \vee f_jq_j = \bar{f}_kq_k$.

Итак, имеем подмодель $\{\bar{f}_1q_1,\dots,\bar{f}_nq_n\}$, где $\bar{f}_i \in \prod_{(a+H)\in A^*/H}\Bigl(\bar{\prod_{q\in(a+H)}} G_q\Bigr)$. Пусть число выбранных смежных классов $(a+H)$ равно s, а именно пусть это классы $(a_1+H),\dots,(a_s+H)$.

Рассмотрим теперь ℓ-группу $G\,\mathrm{Wr}\,\widehat{H}$. Возьмем в $\widehat{H}$ подгруппу $s\widehat{H}$. Получим $\widehat{H} = \bigcup_{h\in\widehat{H}}(h+s\widehat{H})$, где $(h+s\widehat{H})$ — смежный класс, причем число смежных классов равно s^k, где $k \le n$.

Пусть $k=0$, тогда $\widehat{H}=\{0\}$. Отсюда $H=\{0\}$ и исходная подмодель входит в базу сплетения, т. е. имеет вид $\{f_1,\dots,f_n\}$.

1. Если $A=\{0\}$, то G универсально эквивалентна G.

2. Если $A\ne\{0\}$, то базы сплетений универсально эквивалентны [5, теорема 14.3.2].

Итак, пусть $k\ge 1$. Выберем s смежных классов $(h_1+s\widehat{H}),\dots,(h_s+s\widehat{H})$.

Так как $H\cong\widehat{H}\cong s\widehat{H}$, сопоставим для любого $i\in\{1,\dots,n\}$ элементу $q_i\in H$ изоморфный ему элемент $(smq_i)\in s\widehat{H}$.

Построим конечную подмодель $\{f_1'(smq_1),\dots,f_n'(smq_n)\}$ решеточно упорядоченной группы $G\mathrm{Wr}\widehat{H}$ следующим образом. Для любого $i\in\{1,\dots,n\}$ положим $f_i'(h)=\bar{f}_i(a)$, если $h=h_j+c_1(smq_1)+\dots+c_n(smq_n)$, $a=a_j+c_1q_1+\dots+c_nq_n$, где $c_1,\dots,c_n$ — целые числа, $j\in\{1,\dots,s\}$. В противном случае $f_i'(h)=e$.

Непосредственная проверка показывает, что подмодель $\{f_1q_1,\dots,f_nq_n\}$ из ℓ-группы $G\,\mathrm{Wr}\,A^*$ изоморфна подмодели $\{f_1'(smq_1),\dots,f_n'(smq_n)\}$ из $G\,\mathrm{Wr}\,\widehat{H}$. Так как $G\,\mathrm{Wr}\,\widehat{H}$ является ℓ-подгруппой $G\,\mathrm{Wr}\,A$, то $\{f_1'(smq_1),\dots,f_n'(smq_n)\}$ — подмодель из $G\,\mathrm{Wr}\,A$. Значит, ℓ-группа $G\,\mathrm{Wr}\,A^*$ универсально эквивалентна ℓ-группе $G\,\mathrm{Wr}\,A$.

Для групп доказательство аналогично. □

Предложение 3.3. *Пусть G — группа, (a) — бесконечная циклическая группа, тогда $G\,\mathrm{Wr}\,(a)$ универсально эквивалентно $(G\times\dots\times G)\,\mathrm{Wr}\,(a)$.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.6. □

§ 4. Базисный ранг квазимногообразия нильпотентных групп без кручения ступени нильпотентности $\le c$, где $c \ge 2$

Пусть $\mathscr{N}_c$ — многообразие нильпотентных групп ступени нильпотентности $\le c$, где $c\ge 2$, $\mathscr{K}$ — квазимногообразие групп без кручения.

Нам понадобится следующий признак принадлежности конечноопределенной группы G квазимногообразию qR, являющийся частным случаем теоремы 3 из [10]. *Конечноопределенная группа G принадлежит квазимногообразию, порожденному классом групп R тогда и только тогда, когда для любого элемента $g\in G$, $g\ne e$, существует гомоморфизм φ_g группы G в некоторую группу из класса R такой, что $\varphi_g(g)\ne e$.*

Хорошо известно, что полициклический ранг n-порожденной нильпотентной группы G ступени нильпотентности не больше c не превосходит $n+n^2+\dots+n^c=(n^cn-n)/(n-1)\le n^{c+1}$ [11, следствие 10.2.3].

Теорема 4.1. *Квазимногообразие $\mathscr{N}_c\cap\mathscr{K}$ не порождается всеми своими n-порожденными группами.*

Доказательство. Через $\mathscr{X}_n$ обозначим класс всех n-порожденных групп из $\mathscr{N}_c \cap \mathscr{K}$. Пусть K_n — квазимногообразие, порожденное $\mathscr{X}_n$. Предположим, что для некоторого натурального числа n квазимногообразие $\mathscr{N}_c \cap \mathscr{K}$ равно K_n.

Рассмотрим группы

$$F_2^i = gp\langle a_i, b_i / c_i = [a_i, b_i], [a_i, c_i] = [b_i, c_i] = e\rangle \quad (i = 1, \dots, m;\ m = n^{c+1}).$$

Обозначим через $\mathscr{H}_m = F_2^1 \times \dots \times F_2^m$ $(c_1 = \dots c_m)$ прямое произведение групп с объединенной подгруппой. По признаку принадлежности конечно определенной группы квазимногообразию $\mathscr{H}_m$ для $c_1 \neq e$ существуют группа G_n и гомоморфизм $\varphi : \mathscr{H}_m \to G_n$ такие, что $\varphi(c_1) \neq e$. Предположим, что $\ker\varphi \neq e$. По утверждению 31.26 из [12] $\ker\varphi \cap Z(\mathscr{H}_m) \neq e$, где $Z(\mathscr{H}_m)$ — центр группы. Поэтому $\ker\varphi \cap (c_1) \neq e$, а значит, существует некоторое натуральное k такое, что $c_1^k \in \ker\varphi$. Так как $\ker\varphi$ — изолированная подгруппа, то $c_1 \in \ker\varphi$, $\varphi(c_1) = e$; противоречие. Значит, $\ker\varphi = e$. По теореме о гомоморфизмах $\mathscr{H}_m / \ker\varphi \cong B$, где B — подгруппа G_n. Тогда $\mathscr{H}_m \cong B$. Полициклический ранг B меньше либо равен n^{c+1}, а у $\mathscr{H}_m$ равен $2m = 2n^{c+1}$; противоречие. □

Следствие 4.2. *Квазимногообразие $\mathscr{N}_c \cap \mathscr{K}$ имеет бесконечный базисный ранг.*

В заключение автор выражает глубокую признательность профессору Н. Я. Медведеву за ценные советы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко Е. И.* О сохранении элементарной и универсальной эквивалентности при сплетении // Алгебра и логика. 1968. Т. 7, № 4. С. 114–119.
2. *Chapuis O.* Universal theory of certain solvable groups and bounded Ore group rings // J. Algebra. 1995. V. 176. P. 368–391.
3. *Будкин А. И.* Независимая аксиоматизируемость квазимногообраэий обобщенно разрешимых групп // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 3. С. 249–266.
4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
5. *Kopytov V. M., Medvedev N. Ya.* The theory of lattice-ordered groups. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994.
6. *Медведев Н. Я.* Многообразия решеточно упорядоченных групп. Барнаул: Изд-во Алтайск. ун-та, 1987.
7. *Bryant R. M., Groves J. R. J.* Wreath products and ultraproducts of groups // Quart. J. Math. Oxford. 1978. V. 29. P. 301–308.
8. *Медведев Н. Я.* ℓ-Многообразия без независимого базиса тождеств // Math. Slovaca. 1982. V. 32, N 4. P. 417–425.
9. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
10. *Будкин А. И., Горбунов В. А.* К теории квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 2. С. 373–392.
11. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
12. *Нейман Х.* Многообразие групп. М.: Мир, 1969.

Статья поступила 23 декабря 2002 г.

Морозова Светлана Васильевна