Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 517.986.7

СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ В АСИМПТОТИЧЕСКИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПОЛУГРУППАХ

К. В. Сторожук

Аннотация: Изучается полугруппа φ линейных операторов, действующих на банаховом пространстве X, удовлетворяющая условию: $\operatorname{codim} X_0 < \infty$, где $X_0 = \{x \in X \mid \varphi_t(x) \underset{t\to\infty}{\to} 0\}$. Показано, что X_0 при этих условиях замкнуто. Установлены некоторые свойства асимптотического поведения подпространств, дополняющих X_0 в пространстве X.

Ключевые слова: полугруппа линейных операторов, инвариантное подпространство полугруппы.

Предварительные определения и формулировки результатов

Пусть X — банахово пространство, $\{\varphi_t : X \to X \mid t \geq 0\}$ — полугруппа линейных операторов, т. е. $\varphi_t \circ \varphi_q = \varphi_{t+q}$. Всюду предполагаем, что полугруппа действует непрерывно при $0 < t < \infty$, т. е. для каждого вектора $v \in X$ функция $t \mapsto \varphi_t(v)$ непрерывна при $t > 0$. Полугруппа называется *ограниченной*, если все операторы φ_t ограничены по норме некоторой константой $C < \infty$.

Для каждого вектора $v \in X$ будем писать $v_t = \varphi_t(v)$, такое же сокращение сделаем для произвольных подмножеств в X.

Положим $X_0 = \{x \in X \mid x_t \underset{t\to\infty}{\to} 0\}$. Пространство X_0 φ_t-инвариантно, т. е. $\varphi_t(X_0) \subset X_0$.

Говорим, что полугруппа *асимптотически конечномерна*, если $\operatorname{codim} X_0 = n < \infty$.

Несмотря на то, что пространство X_0 состоит из векторов, стремящихся к нулю в пределе, сужение полугруппы на X_0 не обязано быть ограниченной полугруппой (а пространство X_0 — замкнутым подпространством в X), пример 1. Однако для асимптотически счетномерных полугрупп X_0 замкнуто, а сужение $\varphi_t|_{X_0}$ — ограниченная полугруппа, даже если φ_t не ограничена на всем X (теорема 1). Для замкнутости X_0 достаточно также наличия в X *замкнутого* дополнительного к X_0 подпространства Y.

Предположим, что Y — такое подпространство. Из вышеизложенного следует, что норма в $X = X_0 \oplus Y$ эквивалентна норме, задаваемой формулой $\|(x_0 + y)\| := |x_0| + |y|$.

Так как $\varphi_t(X_0) \subset X_0$, разложение операторов $\varphi_t : X \to X$ имеет вид

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} \alpha_t & b_t \\ 0 & Q_t \end{pmatrix} : X_0 \times Y \to X_0 \times Y. \tag{1}$$

Существование φ_t-инвариантного подпространства Y, очевидно, равносильно существованию диагонального представления (1).

Углом (*раствором*) между двумя подпространствами A и $B \subset X$ назовем число

$$\angle(A, B) = \min\{\sup_{a\in A, |a|=1}\{\rho(a, B)\}, \sup_{b\in B, |b|=1}\{\rho(b, A)\}\}.$$

На множестве n-мерных подпространств пространства X угол играет роль метрики.

В теореме 2 доказано, что если φ_t — асимптотически конечномерная ограниченная полугруппа, то любое n-мерное подпространство $Y \subset X$, дополняющее X_0 в X, *почти стабилизируемо*, т. е. положение пространства Y в пространстве X изменяется под действием полугруппы все медленнее:

$$\forall t \quad \sup_{q<t} \angle(Y_T, Y_{T+q}) \to 0 \quad \text{при } T \to \infty.$$

При этом пространство Y не обязано быть *стабилизируемым*, т. е. предельного положения Y_∞ может и не быть. Если такое Y_∞ существует, то оно, очевидно, φ_t-инвариантно. Также показано (замечание 3), что движение почти стабилизируемого, но не стабилизируемого пространства Y в пространстве X под действием полугруппы не может замедляться слишком быстро, оценка снизу скорости изменения угла такова:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \angle(Y_{k+1}, Y_k) = \infty.$$

В теореме 3 доказано, что в случае *слабой почти периодичности* полугруппы, т. е. компактности замыканий орбит векторов в слабой топологии X (например, в случае ограниченной полугруппы на рефлексивном X) пространство Y стабилизируемо.

На основе критерия инвариантности конечномерного пространства как собственного пространства генератора полугруппы (лемма 6) мы строим пример 4, показывающий, что ограниченность полугруппы в теореме 2 существенна уже в случае $\operatorname{codim} X_0 = 2$.

В последнем пункте доказана теорема $2'$, обобщающая теорему 2 на случай асимптотически конечномерных полугрупп, для которых $\|\varphi_t\| = o(t)|_{t\to\infty}$ (это в точности те полугруппы, у которых слагаемое Q_t в представлении (1) ограничено). Из этой теоремы легко следует, что если $\operatorname{codim} X_0 = 1$ (случай, частый в приложениях), то ограниченность полугруппы в теореме 2 несущественна.

Отметим, что аналоги теорем 2 и 3 для C_0-полугрупп операторов содержатся в статье [1], где они доказываются методами нестандартного анализа.

Асимптотически конечномерные полугруппы

Лемма 1. *Пусть φ_t — ограниченная полугруппа, $\|\varphi_t\| \le C$. Пусть $v \in X$ и $m(v) = \inf_{t<\infty} \rho\{v_t, X_0\} = 0$ (т. е. среди векторов $\varphi_t(v)$ найдутся векторы, сколь угодно близкие к пространству X_0). Тогда $v \in X_0$. В частности, X_0 замкнуто в X.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Если $m(v) = 0$, то $|v_q - x| < \varepsilon$ для некоторых $q \ge 0$ и $x \in X_0$. Тогда $|v_{q+t} - x_t| < C\varepsilon$ для всех $t < \infty$. В то же время $|v_{q+t}| - |v_{q+t} - x_t| \le |x_t| \underset{t\to\infty}{\to} 0$. Поэтому $\limsup_{t\to\infty}\{|v_t|\} \le C\varepsilon$. Число ε произвольно, поэтому $\limsup_{t\to\infty}\{|v_t|\} = 0$ и $v \in X_0$. $\square$

Если $\operatorname{codim} X_0 < \infty$, то лемма справедлива и для неограниченной полугруппы φ_t. В работе [2] это доказано для полугруппы степеней оператора в комплексном пространстве. Там же есть контрпример к заключению леммы 1 в случае бесконечной коразмерности пространства X_0 и неограниченной полугруппы.

Приведем пример полугруппы с незамкнутым X_0.

Пример 1 (В. В. Иванов). Пространство X_0 неограниченной дискретной полугруппы $\{T^n : l_2 \to l_2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, где $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (2x_2, 2x_3, 2x_4 \dots)$, содержит все финитные последовательности и поэтому плотно в l_2. Однако читатель легко заметит, что $X_0 \neq l_2$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_t : X \to X$ — асимптотически счетномерная полугруппа. Тогда подпространство X_0 замкнуто и $\operatorname{codim} X_0 < \infty$. Если φ_t — C_0-полугруппа (т. е. для каждого $v \in X$ функция $t \mapsto v_t$ непрерывна в нуле), то $\varphi_t|_{X_0} : X_0 \to X_0$ — ограниченная полугруппа.*

Доказательство. Предположим, что φ_t — C_0-полугруппа.

Известно [3], что переход к подпространствам счетной коразмерности сохраняет бочечность. Таким образом, для X_0 выполняется принцип равномерной ограниченности. Для любой точки $v \in X_0$ множество $\{v_t \mid t \geq 0\}$ ограничено, поэтому существует число $C < \infty$ такое, что $\|\varphi_t|_{X_0}\| \leq C$ для каждого $t > 0$. Операторы φ_t на $\operatorname{Cl}(X_0)$ ограничены той же константой. Из леммы 1, примененной к сужению полугруппы на пространство $\operatorname{Cl}(X_0)$, следует, что $X_0 = \operatorname{Cl}(X_0)$. Полное фактор-пространство X/X_0 не может быть счетномерным, оно лишь конечномерно.

Если $\{\varphi_t\}$ не является C_0-полугруппой, то вместо множества $\{v_t \mid t \geq 0\}$ можно рассмотреть множество $\{v_t \mid t \geq t_0\}$ для какого-нибудь $t_0 > 0$. Из принципа равномерной ограниченности следует, что все операторы φ_t, $t \geq t_0$, равномерно ограничены на X_0. Из рассуждений, аналогичных доказательству леммы 1, замкнутость пространства X_0 следует и в этом случае. Теорема доказана.

Замечание 1. Для C_0-полугрупп пространство X_0 является банаховым образом, ибо оно полно относительно нормы $\|x\| := \sup\{|x_t| \mid t \geq 0\} \geq |x|$. Тем самым принцип дополняемости тоже позволяет доказать замкнутость X_0 на основе предположения $\operatorname{codim} X_0 < \infty$. Вообще, наличие замкнутого (алгебраического) дополнения к X_0 в X влечет замкнутость X_0.

Из теоремы 1 следует, что норма пространства в представлениях вида $X = X_0 \oplus Y$ эквивалентна норме прямого произведения. Поэтому лемма 1 и замечание 1 влекут

Следствие. *Пусть асимптотически конечномерная полугруппа представлена выражением (1) и $y \in Y$. Если $\liminf\limits_{t\to\infty} Q_t(y) = 0$, то $y = 0$. Если полугруппа φ_t ограничена, то и полугруппа $Q_t : Y \to Y$ ограничена (обратное неверно, см. последний пункт статьи).*

Лемма 2. *Пусть φ_t — ограниченная полугруппа, $\|\varphi_t\| \leq C$. Пусть $v \in X$. Функция $v \mapsto m(v) : X \to \mathbb{R}$, определенная в лемме 1, непрерывна.*

Доказательство. Пусть x и $y \in X$. Для каждого $\delta > 0$ существует t такое, что $|y_t| \leq m(y) + \delta$. Тогда

$$m(x) \leq |x_t| = |y_t + (x-y)_t| \leq |y_t| + C|x-y| \leq m(y) + \delta + C|x-y|.$$

Выбор числа δ произволен, поэтому $m(x) \le m(y) + C|x-y|$. Меняя местами x и y в этом рассуждении, получаем, что $|m(x) - m(y)| \le C|x-y|$. $\square$

Замечание 2. Условие ограниченности полугруппы в лемме 2 существенно. Приведем пример: $X = \mathbb{R}^2$, $\varphi_t(y,z) = (y+tz, z)$. Тогда $X_0 = 0$. Функция $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ строго положительна вне нуля, но разрывна в точке $(1,0) \in \mathbb{R}^2$, так как $m(1,0) = 1$, а $m(1,-\varepsilon) = \varepsilon$. Это наблюдение позволит построить «контрпример» к теореме 2 для неограниченной полугруппы (пример 4).

Следующее соглашение позволит нам избежать выписывания лишних констант в неравенствах. Будем говорить, что величина F *имеет порядок величины* H, если существует константа $k \in \mathbb{R}$ такая, что в описываемых условиях $F \le k \cdot H$.

Лемма 3. *Пусть φ_t — асимптотически конечномерная ограниченная полугруппа, $Y \subset X$ — n-мерное подпространство такое, что $X_0 \oplus Y = X$, $e^1, \dots, e^n$ — базис пространства Y. Существует такое $k > 0$, что для каждого $t \ge 0$ и вектора $y_t = \beta_1 e_t^1 + \dots + \beta_n e_t^n$ выполнено $|y_t| \ge k(|\beta_1| + \dots + |\beta_n|)$.*

Доказательство. Имеем

$$\frac{|y_t|}{|\beta_1| + \dots + |\beta_n|} = \frac{|y_t|}{|y|} \cdot \frac{|y|}{|\beta_1| + \dots + |\beta_n|}.$$

Ограниченность снизу первого множителя следует из леммы 2 и конечномерности пространства Y, ограниченность снизу второго множителя очевидна. $\square$

Согласно этой лемме коэффициенты β_i в разложении $y_t = \beta_1 e_t^1 + \dots + \beta_n e_t^n$ не могут быть слишком велики, если $|y_t| \le 1$.

Следствие. *Пусть Z — n-мерное подпространство в X. Угол $\angle(Y_t, Z)$ имеет порядок максимального расстояния от вектора e_t^i до Z, $i = 1, \dots, n$.*

Теорема 2. *Пусть φ_t — асимптотически конечномерная ограниченная полугруппа на пространстве X, $Y \subset X$ — n-мерное подпространство такое, что $X_0 \oplus Y = X$. Тогда Y почти стабилизируемо, т. е. для каждого $t < \infty$ будет $\sup\limits_{s<t} \angle(Y_T, Y_{T+s}) \to 0$ при $T \to \infty$.*

Доказательство. Представим действие полугруппы $\varphi : X_0 \times Y \to X_0 \times Y$ формулой (1). Заметим, что $Q_t : Y \to Y$ — полугруппа.

Пусть $e^1, \dots, e^n$ — базис пространства $Y \subset X$. Отображения $Q_s : Y \to Y$ в этом базисе задаются матрицей $(q_{ij})_s$, ее столбцы состоят из координат проекций векторов e_s^i на пространство Y параллельно пространству X_0:

$$\begin{pmatrix} e_s^1 \\ \vdots \\ e_s^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}_s \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^1(s) \\ \vdots \\ x^n(s) \end{pmatrix}, \quad x^i(s) = b_s(e^i) \in X_0. \tag{2}$$

Применяя к выражению (2) оператор φ_T, получаем, что для каждого $s \in [0,t]$

$$\begin{pmatrix} e_{T+s}^1 \\ \vdots \\ e_{T+s}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}_s \begin{pmatrix} e_T^1 \\ \vdots \\ e_T^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^1(s)_T \\ \vdots \\ x^n(s)_T \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Векторы первого слагаемого правой части равенства (3) лежат в пространстве Y_T. По следствию леммы 3 угол $\angle(Y_{T+s}, Y_T)$ имеет порядок $f(s,T) := \max\{|x^1(s)_T|, \dots, |x^n(s)_T|\}$. Однако все $x^i(s)$ лежат в X_0, поэтому $f(s,T) \underset{T\to\infty}{\to} 0$.

Пусть φ — C_0-полугруппа, т. е. функции вида $t \mapsto v_t$ непрерывны и в нуле. Тогда множества $\{x^i(s) \mid s \in [0,t]\} \subset X_0$ компактны, будучи непрерывными образами отрезка $[0,t]$. В силу принципа равномерной ограниченности $\sup\{f(s,T) \mid s \in [0,t]\} \underset{T\to\infty}{\to} 0$. Для C_0-полугрупп теорема 2 доказана.

Если φ_t не C_0-полугруппа, то функции $x^i(s)$ могут быть разрывными в нуле, поэтому множества $\{x(s) \mid s \in [0,t]\}$ не обязаны быть компактными. В этом случае применим несколько искусственный прием: в качестве начального Y рассмотрим пространство Y, уже сдвинутое действием полугруппы φ_t, т. е. пространство Y_p, $p > 0$. Тогда для каждого $e^i \in Y_p$ функция $t \mapsto e^i_t$ непрерывна и в нуле, так как существуют вектор $u^i \in Y$ такой, что $e^i = u^i_p$ и, следовательно, $e^i_t = u^i_{p+t}$. Поэтому функции $x^i(s) = b_s(e^i) = b_{p+s}(u^i)$ непрерывны при $s \geq 0$, а не только при $s > 0$. Теорема 2 доказана полностью.

Замечание 3. Если скорость стабилизации пространства Y достаточно велика, то пространство стабилизируемо, т. е. стремится к некоторому предельному стабильному положению Y_∞. В самом деле, пространство $G(X,n)$ n-мерных подпространств банахова пространства X с угловой метрикой полно. Поэтому если, например, последовательность $Y_k \in G(X,n)$ фундаментальна, то эта последовательность имеет предел $Y_\infty \in G(X,n)$. Из теоремы 2 следует, что колебание функции $Y_t : t \to G(X,n)$ на отрезке $[k,k+1]$ мало при больших k. Тем самым $Y_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} Y_t$.

В частности, если Y нестабилизируемо, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \angle(Y_{k+1}, Y_k)$ расходится. В то же время может быть так, что Y стабилизируемо, а ряд расходится. Это следует из того, что условие Коши слабее условия абсолютной сходимости ряда. Проиллюстрируем два последних вывода.

Пример 2. Пусть $X = C[0,1]$, $(\varphi_t f)(x) = x^t f(x)$ [1]. Здесь $X_0 = \{f \in C[0,1] \mid f(1) = 0\}$, $\operatorname{codim} X_0 = 1$. Инвариантных дополняющих пространств нет. Значит, для любой функции $f \in X$ если $f(1) \neq 0$, то ряд $\sum \|f_{k+1} - f_k\|$ расходится. Проведем непосредственную выкладку для функции $f(x) \equiv 1$:

$$\|f_{k+1} - f_k\|_X = \sup_{x\in[0,1]} |x^{k+1} - x^k| = \frac{1}{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{ek},$$

$$\sum \|f_{k+1} - f_k\| = \infty.$$

Пример 3. Пусть X — подпространство пространства $C[0,\infty)$, состоящее из функций, имеющих предел в бесконечности, $(\varphi_t f)(x) = f(x+t)$. Тогда X_0 — пространство функций, стремящихся к нулю. Пространство постоянных функций инвариантно. Пусть $f(x) = 1 + \frac{\sin \pi x}{x}$. Последовательность $f_k(x)$ сходится к единице равномерно, поэтому пространство Y, натянутое на вектор $f \in X$, стабилизируемо. Однако $\|f_{k+1} - f_k\| \sim \frac{2}{k}$ и соответствующий ряд расходится.

Анализ эволюции векторов в слабой топологии

Обсудим теперь некоторые факты, касающиеся поведения векторов под действием полугруппы в слабой топологии пространства X.

Обозначим символом Cl_σ операцию слабого замыкания. Для каждого числа $0 \leq r < \infty$ и вектора $e \in X$ положим $E_r = \{e_t \mid t \geq r\}$. В частности, E_0 — орбита вектора e под действием полугруппы φ_t.

Лемма 4. *Пусть φ_t — асимптотически конечномерная ограниченная полугруппа, $e \notin X_0$. Тогда $\mathrm{Cl}_\sigma(E_0) \cap X_0 = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $X = X_0 \oplus Y$, $e \in Y$, $e \neq 0$. Непрерывный оператор проектирования $P : X = X_0 \times Y \to Y$ непрерывен и в слабой топологии. В то же время на конечномерном Y слабая и сильная топологии совпадают. Пользуясь леммой 1, легко увидеть, что проекция орбиты E_0 вектора e на Y отделена от нуля, поэтому само $E_0 \subset P^{-1}P(E_0)$ отделено от X_0 даже в слабой топологии. □

Лемма 5. *Пусть $e \in X$. Множество $E_\infty = \bigcap\limits_{r<\infty} \mathrm{Cl}_\sigma(E_r)$ (быть может, пустое), φ_t-инвариантно, т. е. $E_{\infty+t} = E_\infty$ для всякого t.*

Доказательство. Условие $z \in E_\infty$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall f_1, \dots, f_k \in X' \, \forall r < \infty \; \exists T > r : |f_i(z - e_T)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Для функционала $f \in X'$ определим функционал $f^t \in X'$ условием $f^t(x) := f(x_t)$. Тогда, применяя условие (4) к функционалам $f_1^t, \dots, f_k^t \in X'$, получаем, что существует сколь угодно большое число T такое, что для каждого $i = 1, \dots, k$ выполнено неравенство $\left|f_i^t(z - e_T)\right| < \varepsilon$. Но $f_i^t(z - e_T) = f_i(z_t - e_{T+t})$. Итак, для вектора z_t выполнено условие (4) и $z_t \in E_\infty$. □

Теорема 3. *Пусть φ_t — асимптотически конечномерная ограниченная полугруппа такая, что для каждого вектора $e \in Y$ его орбита E_0 слабо предкомпактна. Тогда пространство Y стабилизируемо, т. е. существует φ_t-инвариантное подпространство Y_∞ такое, что $X = X_0 \oplus Y_\infty$ и $\angle(Y_T, Y_\infty) \underset{T\to\infty}{\to} 0$. В частности, если X рефлексивно, то Y стабилизируемо.*

Идея доказательства (одномерный случай): вектор z из непустого множества $E_\infty = \bigcap\limits_{r<\infty} \mathrm{Cl}_\sigma(E_r)$ можно приближать выпуклыми комбинациями векторов вида e_{t_j} со сколь угодно большими t_j. Из теоремы 2 следует, что такие комбинации меняются сколь угодно медленно. Значит, вектор z не меняется вообще. Многомерный случай сложнее лишь технически: необходимо учитывать движение пространства Y относительно самого себя.

Доказательство. Рассмотрим максимальный набор векторов $e^1 = e$, $e^2 = \varphi_{p_2} e^1, \dots, e^s = \varphi_{p_s} e^1$, $s \le n$, проекции которых на пространство Y линейно независимы. Нетрудно видеть, что эти проекции образуют базис некоторого s-мерного подпространства $Y^s \subset Y$, инвариантного относительно действия полугруппы $Q_t : Y \to Y$. Будем считать, что $s = n$. (В общем случае пространство Y представляется в виде прямой суммы подпространств вида Y^s и описываемая ниже процедура проделывается с каждым из них.)

Множество $\mathrm{Cl}_\sigma(E_0)$ компактно в слабой топологии. Значит, пересечение E_∞ семейства вложенных множеств $\bigcap\limits_{r<\infty} \mathrm{Cl}_\sigma(E_r)$ непусто. Пусть $z^1 \in E_\infty$. По лемме 4 $z^1 \notin X_0$.

По теореме Мазура слабое замыкание множества лежит в замыкании его выпуклой оболочки. Таким образом, из условия «$z^1 \in \mathrm{Cl}_\sigma(E_T)$ $\forall T < \infty$» следует, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для любого $T < \infty$ существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m \ge 0$, $\sum \alpha_k = 1$ и векторы $e_{t_1}^1, \dots, e_{t_m}^1$, $t_j > T$, такие, что

$$z^1 - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_{t_k}^1 = \tilde{\varepsilon}^1, \quad |\tilde{\varepsilon}^1| < \varepsilon.$$

Применив к последнему выражению оператор φ_{p_i} и обозначив $z^i = z^1_{p_i}$, $i = 1\dots,n$ (напомним, что $e^i = e^1_{p_i}$, $i = 1,\dots,n$), получим

$$z^i - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e^i_{t_k} = \tilde{\varepsilon}^i, \quad |\tilde{\varepsilon}^i| \le C\varepsilon. \tag{5}$$

Согласно формуле (3)

$$e^i_{t_k+t} = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} e^j_{t_k} + x^i_{t_k},$$

где $x^1,\dots,x^n \in X_0$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k e^i_{t_k+t} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \left(\sum_{j=1}^{n} q_{ij} e^j_{t_k} + x^i_{t_k} \right) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e^j_{t_k} + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x^i_{t_k}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} q_{ij}(z^j - \tilde{\varepsilon}^j) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x^i_{t_k} = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} z^j - \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\tilde{\varepsilon}^j + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x^i_{t_k}. \tag{6}$$

Заметим, что

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x^i_{t_k} \right| \le \max_{k=1,\dots,m} |x^i_{t_k}|.$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\left| z^i_t - \sum_{j=1}^{n} q_{ij} z^j \right| < \left| \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\tilde{\varepsilon}^j \right| + |\tilde{\varepsilon}^i| + \max_{k=1,\dots,m} |x^i_{t_k}|. \tag{7}$$

Так как $t_k > T$, то, выбирая T достаточно большим, можно добиться того, чтобы вся правая часть неравенства (7) была порядка ε. Но левая часть неравенства (7) не зависит от ε, поэтому

$$z^i_t = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} z^j.$$

Следовательно, для каждого $t > 0$ вектор z^i_t лежит в линейной оболочке векторов $z^1,\dots,z^n$, значит, пространство Y_∞, натянутое на векторы $z^1,\dots,z^n$, инвариантно. Остальное очевидно. Теорема доказана.

Из леммы 5 следует, что Y_∞ является линейной оболочкой множества E_∞.

Инфинитезимальный критерий инвариантности и нестабилизируемость

В этом пункте мы приводим инфинитезимальный критерий инвариантности конечномерных подпространств и на его основе строим асимптотически двумерную полугруппу (пример 4), у которой есть и стабильное, и нестабилизируемые подпространства, дополняющие X_0 в X.

Для каждой полугруппы $\varphi_t : X \to X$ обозначим через $\varphi : X \to X$ инфинитезимальный оператор, порождающий полугруппу φ_t, т. е. $v \in \operatorname{dom}\varphi$, если существует предел

$$\varphi(v) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t(v) - v}{t}.$$

Все используемые ниже в доказательствах свойства φ можно найти, например, в [4].

Лемма 6 (критерий инвариантности). *Пусть φ_t — полугруппа. Все конечномерные φ_t-инвариантные подпространства X суть собственные конечномерные подпространства порождающего оператора φ, лежащие в $\operatorname{dom}\varphi$.*

Доказательство. Пусть $Y \subset \operatorname{dom}\varphi$ и $\varphi(Y) \subset Y$. Для каждого $y \in Y$ будет $y_t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \varphi^n(y)}{n!} \in Y$. Поэтому $Y_t \subset Y$. Обратно, пусть $\dim Y < \infty$ и $Y_t \subset Y$ для каждого $t < \infty$. Сужения $\psi_t = \varphi_t|_Y : Y \to Y$ образуют полугруппу, действующую на Y. Пространство Y конечномерно, поэтому $\psi_t = e^{t\psi}$ и инфинитезимальный оператор $\psi : Y \to Y$ определен всюду. Но ψ — сужение оператора φ. $\square$

Пусть α_t — полугруппа на пространстве X. Если $Q_t : B \to B$ — некоторая полугруппа с порождающим оператором Q и $P : B \to X$ — непрерывный оператор, то оператор $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & P \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ порождает полугруппу $\varphi_t : X \times B \to X \times B$, задаваемую формулами

$$\varphi_t \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_t & \int\limits_0^t \alpha_s P Q_{t-s} d\,s \\ 0 & Q_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Пусть $B = \mathbb{R}^2$, $Q_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задается, как в замечании 2:

$$Q_t \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + tz \\ z \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Пусть $g \in X$. Отображение $P : B \to X$ определим формулой

$$P(y, z) = y \cdot g. \tag{10}$$

Полугруппу $\varphi_t : X \times B \to X \times B$ определим формулой (8). Соответствующие порождающие операторы таковы:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} f \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(f) + yg \\ z \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Любое пространство Y, дополняющее X в $X \times \mathbb{R}^2$, является линейной оболочкой векторов $(k, 1, 0)$ и $(l, 0, 1)$ для некоторых $k, l \in X$. Выясним, каким условиям должны удовлетворять k и l, чтобы Y было φ_t-инвариантным.

Лемма 7. *Пусть $\alpha_t : X \to X$ — полугруппа, $g \in X$, Q_t и $P(y, z)$ определены формулами* (9) *и* (10). *Пусть полугруппа $\varphi_t : X \times \mathbb{R}^2 \to X \times \mathbb{R}^2$ определена формулой* (8). Векторы $u = (k, 1, 0)$ и $v = (l, 0, 1)$ порождают φ_t-инвариантное подпространство Y тогда и только тогда, когда $k, l \in \operatorname{dom}\alpha$, $g = -\alpha(k)$, $k = \alpha(l)$.

Доказательство. Пусть u, v — базис φ_t-инвариантного пространства Y. Из леммы 6 и формулы (11) следует, что $k, l \in \operatorname{dom}\alpha$ и $\varphi(u) = (\alpha(k) + g, 0, 0) = 0$, т. е. $\alpha(k) + g = 0$. Далее, $\varphi(v) = (\alpha(l), 1, 0) = v$, т. е. $\alpha(l) = k$. $\square$

Пример 4. Полугруппа сдвигов на $X = C_0(\mathbb{R}_+)$ асимптотически нульмерна:

$$X = X_0 = C_0(\mathbb{R}_+) = \{f \in C(\mathbb{R}_+) \mid f(x) \to 0\}, \quad (\alpha_t f)(x) = f(x + t), \quad \alpha(f) = f'.$$

Пусть $g(x) \in X$ и операторы Q_t и P такие, как в формулах (9) и (10). Формула (8) определяет асимптотически двумерную полугруппу $\varphi_t : X \times \mathbb{R}^2 \to X \times \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_t \begin{pmatrix} f(x) \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x+t) + \int\limits_0^t g(x+s)(y+(t-s)z)\,ds \\ y+tz \\ z \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Из леммы 7 и равенства $\alpha(f) = f'$ следует, что полугруппа φ_t обладает инвариантным дополняющим X пространством тогда и только тогда, когда у функции $g(x)$ найдутся первая и вторая первообразные, имеющие нулевой предел.

Рассмотрим в качестве $g(x)$ функцию $\frac{\sin(x)}{x}$. Функции $k(x) = -\operatorname{Si}(x) + \frac{\pi}{2}$ и $l(x) = x(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(x)) - \cos x$ удовлетворяют условиям леммы 7. Исследуя асимптотику интегрального синуса, можно убедиться, что $k(x)$ и $l(x)$ стремятся к нулю, т. е. лежат в X. Таким образом, соответствующая полугруппа имеет двумерное инвариантное подпространство, дополняющее X в $X \times \mathbb{R}^2$. Покажем, что подпространство $Y = 0 \times \mathbb{R}^2 \subset X \times \mathbb{R}^2$ нестабилизируемо.

Утверждение. *Пусть* $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. *Пространство* $Y = (0 \times \mathbb{R}^2) \subset X \times \mathbb{R}^2$ *не является почти стабилизируемым относительно действия полугруппы* (12).

Доказательство. Для вектора $u \in Y_t$ обозначим через $R(u)$ вектор, соединяющий u с проекцией u на пространство Y_{t+1} параллельно X. В ключевом рассуждении теоремы 2 использовалось то, что $R(u) \underset{t\to\infty}{\to} 0$ для любого $u \in Y_t$, причем сходимость равномерна, т. е.

$$\max\left\{ \frac{|R(u)|}{|u|} \mid 0 \neq u \in Y_t \right\} \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Оказывается, равномерность может не иметь места, если полугруппа неограниченная. В нашем примере это именно так. Действительно, пусть $v(t) = \varphi_t(0, -t, 1)$. Подставляя вектор $v(t)$ в формулу (12), убеждаемся, что

$$v(t) = \begin{pmatrix} -\int\limits_0^t \frac{\sin(x+s)}{x+s} s\,ds \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R(v(t)) = v(t) - v(t+1) = \begin{pmatrix} \int\limits_t^{t+1} \frac{\sin(x+s)}{x+s} s\,ds \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Величина

$$\int\limits_a^b \frac{\sin(x+s)}{x+s} s\,ds = \cos|_{b+x}^{a+x} - x\operatorname{Si}|_{b+x}^{a+x}$$

ограничена при всех $x, a, b \geq 0$, поскольку $\operatorname{Si}(p) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\cos p}{p}$ при $p \to \infty$. Тогда $\frac{|R(v(t))|}{|v(t)|} \not\to 0$ при $t \to \infty$, так как

$$|R(v(t))| = \left\| \int\limits_t^{t+1} \frac{\sin(x+s)}{x+s} s\,ds \right\|_X = \max_{x\geq 0} \left| \int\limits_t^{t+1} \frac{\sin(x+s)}{x+s} s\,ds \right| \overset{x:=0}{\geq} |\cos|_{t+1}^t| \not\to 0.$$

Итак, расстояние от вектора $v(t) = \varphi_t(0, -t, 1)$ до его проекции $v(t+1)$ на пространство Y_{t+1} достаточно велико.

Из формулы (12) следует, что все элементы пространства Y_t имеют вид

$$\begin{pmatrix} h^t_{a,b}(x) \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int\limits_0^t \frac{\sin(x+s)}{x+s} \cdot (a - sb)\, ds \\ a \\ b \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Мы показали, что существует положительная константа K такая, что найдется сколь угодно большой номер $t < \infty$ такой, что расстояние от вектора $v(t) = \bigl(h^t_{0,1}, 0, 1\bigr) \in Y_t$ до его проекции $\bigl(h^{t+1}_{0,1}, 0, 1\bigr)$ на Y_{t+1} больше K. Осталось заметить, что для таких t расстояние от $v(t)$ до всех других векторов $\bigl(h^{t+1}_{y,z}, y, z\bigr) \in Y_{t+1}$:

$$\rho_X \bigl\{v(t) - \bigl(h^{t+1}_{y,z}, y, z\bigr)\bigr\} = \max_{0<x<\infty} \bigl\{\bigl|h^t_{0,1} - h^{t+1}_{y,z}\bigr|\bigr\} + \sqrt{y^2 + (z-1)^2}, \tag{14}$$

тоже ограничено снизу при всех $(y, z) \in \mathbb{R}^2$. Это следует из того, что при (y, z), близких к $(0, 1)$, первое слагаемое в (14) не может сразу стать малым (необходимая оценка проста и оставляется читателю), а при дальнейшем удалении (y, z) от $(0, 1)$ становится существенным второе слагаемое.

Симметричные рассуждения показывают, что расстояние от вектора $\bigl(h^{t+1}_{0,1}, 0, 1\bigr)$ до пространства Y_t тоже ограничено снизу. Итак, $\angle(Y_t, Y_{t+1}) \not\to 0$ при $t \to \infty$.

Стабилизируемость в медленно растущих полугруппах

В данном пункте все полугруппы асимптотически конечномерны.

Условие ограниченности полугруппы $Q_t : Y \to Y$ в представлении (1) не зависит от выбора подпространства Y, дополняющего X_0 в X. Назовем здесь такие полугруппы *медленно растущими.* Анализируя в представлении (8) верхний правый элемент матрицы, нетрудно провести оценки, показывающие, что условие медленного роста полугруппы φ_t равносильно условию $\|\varphi_t\| = o(t)|_{t\to\infty}$.

Пример 5. Рассмотрим полугруппу, определенную формулой (8), где $X_0 = C_0(\mathbb{R}_+)$ такое же, как в примере 4, $Y = \mathbb{R}$, $P(y) = g \cdot y$, где $g \in X_0$:

$$\varphi_t \begin{pmatrix} f(x) \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x+t) + y \cdot \int\limits_0^t g(x+s)\, ds \\ y \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Функция $g(x)$ может быть такой, что интеграл от нее может достигать произвольно больших значений. В то же время порядок роста $\|\varphi_t\|$ определяется скоростью роста функции $\int\limits_0^t g(t)\, dt$. Поэтому полугруппа (15) не обязана быть ограниченной. В то же время $\|\varphi_t\| = o(t)$ при $t \to \infty$, так как $g(x) \to 0$. Например, если $g(x) = \frac{1}{x+1}$, то, полагая в (15) $f \equiv 0$ и $y = 1$, получим

$$\varphi_t(0, 1) = \left(\ln \frac{x+1+t}{x+1}, 1\right), \quad \|\varphi_t\| \geq\sim \sup\left\{\ln \frac{x+1+t}{x+1} \mid x \geq 0\right\} \sim \ln t.$$

Таким образом, класс медленно растущих полугрупп шире класса ограниченных полугрупп. Покажем, что для этого класса заключение теоремы 2 также справедливо.

Теорема 2$'$. *Заключение теоремы* 2 *верно для всех медленно растущих полугрупп.*

Доказательство. Пусть $X = X_0 \oplus Y$, $\dim Y < \infty$, $\varphi_t = \begin{pmatrix} \alpha_t & b_t \\ 0 & Q_t \end{pmatrix}$.

Рассмотрим сначала случай $\dim Y = 1$. Этот случай содержит основную идею общего доказательства, но особенно прост, полугруппа $Q_t : Y \to Y$ в этом случае есть $\exp(ct)$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. По условию теоремы $c \leq 0$. Согласно следствию теоремы 1 $c = 0$. Пусть $y \in Y$ и $t > 0$. Тогда $y_t = x(t) + y$, где $x(t) \in X_0$. Таким образом, $|y_t| \geq |y|$. В то же время

$$|\varphi_T(y_t) - \varphi_T(y)| = |\varphi_T(y_t - y)| = |\varphi_T(x(t))| \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Это показывает, что угол между прямыми Y_t и Y_{T+t} стремится к нулю при больших T.

Переходя к общему случаю, заметим, что если полугруппа $Q_t : Y \to Y$ ограничена, то она ограничена и снизу, причем равномерно. Это выводится из следствия теоремы 1, а также леммы 2, примененной к самой *конечномерной* полугруппе $Q_t : Y \to Y$. Итак, существует $k < \infty$ такое, что $|y| \leq k|Q_t(y)|$ для всех $y \in Y$ и $t > 0$. Значит, тем более $|y| \leq k|\varphi_t(y)|$.

Пусть $t > 0$. Шар $B \subset Y$ радиуса k компактен, и его образ B_t также компактен. Тогда множество $A := X_0 \cap (B_t - B) = \{u - v \in X_0 \mid u \in B_t,\ v \in B\}$ тоже компактно. Множество A играет в оставшейся части доказательства ту же роль, что и точка $x(t)$ в доказательстве одномерного случая.

Пусть $z \in Y_T$, $|z| = 1$. Рассмотрим вектор $y \in Y$ такой, что $z = y_T$. Тогда $|y| \leq k$, т. е. $y \in B$. Существует $x \in X_0$ такой, что $y + x \in Y_t$. Тогда $x \in A$. В то же время $z + x_T = (y + x)_T \in Y_{T+t}$. Поэтому

$$\rho(z, Y_{T+t}) \leq x_T \leq |A_T| := \sup\{|x| \mid x \in A_T\}.$$

Число $|A_T|$ не зависит от выбора y_T, так что $\angle(Y_T, Y_{T+t}) \leq |A_T|$ по определению угла. Но множество A компактно и лежит в X_0, откуда $|A_T| \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Следовательно, и $\angle(Y_T, Y_{T+t}) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Осталось еще раз применить принцип равномерной ограниченности, рассуждая, как при завершении доказательства теоремы 2. $\square$

Пример 4 показывает, что условие медленного роста полугруппы Q_t в теореме 2$'$ существенно уже в случае $\operatorname{codim} X_0 = 2$. Однако для асимптотически *одномерных* полугрупп φ_t можно не требовать ничего. В самом деле, как уже отмечено, отображение $Q_t : Y \to Y$ в представлениях (1) такой полугруппы есть умножение на число e^{ct}. Операторы $\psi_t := e^{-ct}\varphi_t$ также образуют полугруппу, «гомотетичную» исходной и притом медленно растущую. Из теоремы 2$'$ следует, что подпространство Y почти стабилизируемо в полугруппе ψ_t, а значит, и в полугруппе φ_t. Если при этом полугруппа ψ_t неограниченная (например, как в примере 5), то угол между прямой Y_t и пространством X_0 стремится к нулю.

Заметим напоследок, что если асимптотически конечномерная полугруппа медленно растет, но неограниченная, то стабильных подпространств, дополняющих X_0, не существует. В самом деле, представление (1) такой полугруппы не может быть диагональным, ибо прямое произведение ограниченных полугрупп ограничено.

Автор благодарит Э. Ю. Емельянова за полезные обсуждения и ссылки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Емельянов Э. Ю.* Условия асимптотической конечномерности C_0-полугруппы // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 1015–1020.
2. *Emel'yanow E. Yu., Wolff M. P. H.* Quasi constricted linear operators on Banach spaces // Studia Math. 2001. V. 144, N 2. P. 169–179.
3. *Levin M., Saxon S.* Every countable-codimensional subspace of a barrelled space is barrelled // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 29, N 1. P. 91–96.
4. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Статья поступила 1 ноября 2002 г.

Сторожук Константин Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
stork@math.nsc.ru