Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 512.540+510.5

О ВЕРХНЕЙ ПОЛУРЕШЕТКЕ ЕРШОВА $\mathfrak{L}_E$

А. Н. Хисамиев

Аннотация: Найдены связи между Σ-сводимостью и T-сводимостью. Доказаны утверждения: 1) если квазижесткая модель сильно Σ-определима в наследственно конечном допустимом множестве над локально конструктивизируемой B-системой, то она конструктивизируема; 2) каждая абелева p-группа и алгебра Ершова локально конструктивизируемы; 3) если антисимметричная связанная модель Σ-определима в наследственно конечном допустимом множестве над счетной алгеброй Ершова, то она конструктивизируема.

Ключевые слова: наследственно конечное допустимое множество, Σ-определимость, T-сводимость, абелева p-группа, алгебра Ершова.

Рассматриваются только счетные алгебраические системы конечных сигнатур. Ю. Л. Ершовым в [1, с. 190] введено понятие Σ-определимости системы $\mathfrak{A}$ в допустимом множестве. Если система $\mathfrak{A}$ Σ-определима в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ над системой $\mathfrak{B}$, то будем говорить, что $\mathfrak{A}$ Σ-*сводима к* $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \leq_\Sigma \mathfrak{B}$ или, просто, $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$). Из результатов Ю. Л. Ершова [1, с. 192] следует, что отношение $\leq$ является транзитивным. Если на классе K всех систем введем отношение эквивалентности $\equiv$ ($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \leq \mathfrak{B} \& \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$), то система $\mathfrak{L}_E = \langle K/\equiv, \leq \rangle$ станет частично упорядоченным множеством. А. С. Морозов на международной конференции по математической логике «Мальцевские чтения» в 1999 г. поставил задачу: исследовать связи между системой $\mathfrak{L}_E$ и верхней полурешеткой T-степеней $\mathfrak{L}_T$. В работе доказано, что система $\mathfrak{L}_E$ является верхней полурешеткой; верхняя полурешетка T-степеней $\mathfrak{L}_T$ изоморфно вкладывается в $\mathfrak{L}_E$; существует гомоморфизм φ_d подсистемы $\mathfrak{L}_E^d \subseteq \mathfrak{L}_E$, состоящей из таких классов $\overline{\mathfrak{A}}$, что система $\mathfrak{A}$ имеет степень, на систему $\mathfrak{L}_T$. Получено условие сильной Σ-определимости квазижесткой модели в наследственно конечном допустимом множестве над локально конструктивизируемой B-системой; доказано, что любая счетная абелева p-группа (алгебра Ершова) удовлетворяет условию вычислимой вложимости; установлено, что если антисимметричная связанная модель $\mathfrak{N}$ Σ-определима в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ над счетной алгеброй Ершова $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{N}$ конструктивизируема; построены системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такие, что $\mathfrak{A}$ T-сводима к $\mathfrak{B}$, но не Σ-сводима к $\mathfrak{B}$.

Все используемые и не определяемые понятия в данной работе содержатся в [1–3]. Мы приведем лишь некоторые из них. В дальнейшем ω обозначает множество всех натуральных чисел, $\leq_T$ — сводимость по Тьюрингу (или T-сводимость), $d(A)$ — T-степень множества $A \subseteq \omega$, знак $\leftrightharpoons$ — выражение «равно по определению».

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00593), INTAS–00–499 и Минобразования (код проекта PD02–1.1–201).

Напомним понятие Σ-определимости алгебраической системы $\mathfrak{M}$ в допустимом множестве.

Определение 1 [1, с. 190]. Пусть $\mathfrak{M} = \left\langle M, P_0^{\mathfrak{M}}, \dots , P_n^{\mathfrak{M}} \right\rangle$ — система сигнатуры $\left\langle P_0^{m_0}, \dots , P_n^{m_n} \right\rangle$. Система $\mathfrak{M}$ называется *Σ-определимой в допустимом множестве* $\mathbb{A}$, если существуют Σ-формула $\psi_0(x_0)$ и Δ-предикаты $\eta^{\mathfrak{M}_0}, P_0^{\mathfrak{M}_0}, \dots , P_n^{\mathfrak{M}_0}$ на множестве $M_0 \leftrightharpoons \psi_0^{\mathbb{A}}[x_0]$ такие, что $\eta^{\mathfrak{M}_0}$ есть отношение конгруэнтности на системе

$$\mathfrak{M}_0 = \left\langle M_0, P_0^{\mathfrak{M}_0}, \dots , P_n^{\mathfrak{M}_0} \right\rangle$$

и система $\mathfrak{M}$ изоморфна фактор-системе $\mathfrak{M}_0/\eta^{\mathfrak{M}_0}$.

Если в этом определении предикат $\psi_0^{\mathbb{A}}$ также является Δ-предикатом, а эквивалентность $\eta^{\mathfrak{M}_0}$ — тождественной, то будем говорить, что система $\mathfrak{M}$ *сильно Δ-определима в допустимом множестве* $\mathbb{A}$. Если эквивалентность $\eta^{\mathfrak{M}_0}$ тождественна, то будем говорить, что система $\mathfrak{M}$ *сильно Σ-определима в* $\mathbb{A}$.

§ 1. Верхняя полурешетка $\mathfrak{L}_E$

Пусть $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — алгебраические системы соответственно сигнатур σ_1 и σ_2.

Определение 2. Если система $\mathfrak{M}_1$ Σ-определима в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_2)$, то будем говорить, что $\mathfrak{M}_1$ *Σ-сводима к* $\mathfrak{M}_2$ или, просто, $\mathfrak{M}_1$ *сводима к* $\mathfrak{M}_2$, и обозначать $\mathfrak{M}_1 \leq_\Sigma \mathfrak{M}_2$ или $\mathfrak{M}_1 \leq \mathfrak{M}_2$.

Справедливы следующие свойства.

1^0. $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{M}$.

2^0. Если $\mathfrak{M}_1 \leq \mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_2 \leq \mathfrak{M}_3$, то $\mathfrak{M}_1 \leq \mathfrak{M}_3$.

Свойство 2^0 вытекает из результата Ю. Л. Ершова [1, с. 192].

3^0. Конструктивизируемая система $\mathfrak{M}_1$ сводится к любой системе $\mathfrak{M}_2$ (см. [1]).

4^0. Если $\mathfrak{M}_1 \leq \mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_2$ конструктивизируема, то система $\mathfrak{M}_1$ также конструктивизируема [4].

На классе K всех алгебраических систем введем отношение Σ-эквивалентности $\equiv_\Sigma$:

$$\mathfrak{M}_1 \equiv_\Sigma \mathfrak{M}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{M}_1 \leq \mathfrak{M}_2 \& \mathfrak{M}_2 \leq \mathfrak{M}_1.$$

Класс, содержащий систему $\mathfrak{M}$, обозначим через $\overline{\mathfrak{M}}$. На множестве всех классов L_E введем отношение $\leq_\Sigma$ (или, короче, $\leq$):

$$\overline{\mathfrak{M}_1} \leq \overline{\mathfrak{M}_2} \Leftrightarrow \ \mathfrak{M}_1 \leq \mathfrak{M}_2.$$

Из свойств 1^0–4^0 следует, что система $\mathfrak{L}_E = \langle L_E, \leq_\Sigma \rangle$ является частично упорядоченным множеством с наименьшим элементом $\overline{0}$. Покажем, что она является верхней полурешеткой.

Пусть для любого числа $i = 0, 1$ дана алгебраическая система $\mathfrak{A}_i = \langle \omega, \sigma_i \rangle$ сигнатуры σ_i и $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \varnothing$. Определим систему

$$\mathfrak{B} = \langle \omega, Q_0, Q_1, \sigma_0, \sigma_1 \rangle$$

следующим образом. Если положить $B_i \leftrightharpoons Q_i^{\mathfrak{B}}[x] = \{2n + i \mid n \in \omega\}$, то отображение $\varphi_i : \omega \to B_i$, $\varphi_i(n) = 2n + i$ есть изоморфизм системы $\mathfrak{A}_i$ на подсистему $\mathfrak{B}_i = \langle B_i, \sigma_i \rangle$ системы $\mathfrak{B}$. Если $P_i^{m_i}, f_i^{m_i} \in \sigma_i$, то для любой последовательности чисел $\bar{n} = \langle n_1, \dots , n_{m_i} \rangle \notin B_i^{m_i}$ формулы $\neg P_i^{\mathfrak{B}}(\bar{n})$, $f_i^{\mathfrak{B}}(\bar{n}) = i$ истинны на $\mathfrak{B}$.

Система $\mathfrak{B}$ называется *дизъюнктным объединением* (или *дизъюнктной суммой*) систем $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ и обозначается через $\mathfrak{A}_0 \sqcup \mathfrak{A}_1$.

Пусть даны системы $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$. Тогда существуют соответственно изоморфные им системы $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$, основные множества которых есть ω. Положим $\overline{\mathfrak{M}_0} \cup \overline{\mathfrak{M}_1} = \overline{\mathfrak{A}_0 \sqcup \mathfrak{A}_1}$. Тогда справедливо

Предложение 1. *Система* $\mathfrak{L}_E = \langle L_E, \leq, \cup, 0\rangle$ *является верхней полурешеткой с наименьшим элементом* 0. *Наибольшей верхней гранью систем* $\mathfrak{M}_1$ *и* $\mathfrak{M}_2$ *является их дизъюнктное объединение.*

Систему $\mathfrak{L}_E = \langle L_E, \leq, \cup, 0\rangle$ назовем *верхней полурешеткой Ершова* или *верхней полурешеткой* Σ*-степеней.*

Замечание 1. С. С. Гончаров в [5] построил пример неконструквизируемой системы $\mathfrak{A}$ такой, что ее квадрат $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ конструктивизируем. Отсюда по свойству 4^0 система $\mathfrak{A}$ не Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{A})$, т. е. $\mathfrak{A} \not\leq_\Sigma \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$. Поэтому Σ-степень прямого произведения $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не является, вообще говоря, верхней гранью Σ-степеней $\overline{\mathfrak{A}}$ и $\overline{\mathfrak{B}}$.

§ 2. Подсистема $\mathfrak{L}_E^d$

Напомним некоторые определения. Пусть $(\mathfrak{M}, \nu)$ — нумерованная алгебраическая система сигнатуры σ и $\mathfrak{M}_\nu$ — обогащение системы $\mathfrak{M}$ до сигнатуры $\sigma' = \sigma \cup \{c_0, c_1, \dots\}$, где $c_i^{\mathfrak{M}_\nu} = \nu i$. *Открытой диаграммой* $OD(\mathfrak{M}, \nu)$ *пары* $(\mathfrak{M}, \nu)$ назовем множество всех замкнутых бескванторных формул сигнатуры σ', истинных на $\mathfrak{M}_\nu$. Пусть $(\mathfrak{N}, \mu)$ — другая нумерованная система сигнатуры σ_1. Если множество $OD(\mathfrak{M}, \nu)$ T-сводится к множеству $OD(\mathfrak{N}, \mu)$, то будем говорить, что *нумерация* ν T*-сводится к нумерации* μ, и писать $(\mathfrak{M}, \nu) \leq_T (\mathfrak{N}, \mu)$.

Систему $\mathfrak{M}$ назовем *вычислимой относительно нумерованной системы* $(\mathfrak{N}, \mu)$, если существует такая нумерация ν системы $\mathfrak{M}$, что ν T-сводится к μ. Систему $\mathfrak{M}$ назовем *вычислимой относительно системы* $\mathfrak{N}$ и будем писать $\mathfrak{M} \leq_T \mathfrak{N}$, если для любой нумерации μ системы $\mathfrak{N}$ система $\mathfrak{M}$ вычислима относительно $(\mathfrak{N}, \mu)$. Если $\mathfrak{M} \leq_T \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \leq_T \mathfrak{M}$, то будем говорить, что $\mathfrak{M}$ T*-эквивалентна* $\mathfrak{N}$, и писать $\mathfrak{M} \equiv_T \mathfrak{N}$.

Если существует такая нумерация ν системы $\mathfrak{M}$, что она T-сводится к любой ее нумерации и T-степень $d(OD(\mathfrak{M}, \nu)) \leftrightharpoons d(\mathfrak{M}, \nu)$ равна a, то говорят, что *система* $\mathfrak{M}$ *имеет степень, равную* a.

Если система имеет степень, то ее обозначим через $d(\mathfrak{M})$. В дальнейшем T-сводимость будем называть просто сводимостью и писать $\leq$.

Предложение 2. *Если системы* $\mathfrak{A}_0$ *и* $\mathfrak{A}_1$ *имеют степени* a_0 *и* a_1, *то дизъюнктное объединение этих систем имеет степень, равную* $a_0 \cup a_1$, *т. е.*

$$d(\mathfrak{A}_0 \sqcup \mathfrak{A}_1) = d(\mathfrak{A}_0) \cup d(\mathfrak{A}_1).$$

В работе [6] доказано следующее

Предложение A. *Пусть система* $\mathfrak{A}$ Σ*-сводима к системе* $\mathfrak{B}$. *Тогда для любой нумерации* μ *системы* $\mathfrak{B}$ *система* $\mathfrak{A}$ *вычислима относительно пары* $(\mathfrak{B}, \mu)$.

Отсюда следует

Предложение 3. *Если системы* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *имеют степени, равные* a *и* b *соответственно, и* $\mathfrak{A} \leq_\Sigma \mathfrak{B}$, *то* $a \leq b$.

Следствие 1. *Пусть система $\mathfrak{A}$ имеет степень $d(\mathfrak{A}) = a$. Тогда любая система $\mathfrak{B}$, Σ-эквивалентная $\mathfrak{A}$, имеет степень $d(\mathfrak{B}) = a$.*

Рассмотрим подмножество $L_E^d \subseteq L_E$ всех таких классов $\overline{\mathfrak{A}}$, что система $\mathfrak{A}$ имеет степень. По следствию 1 это определение корректно.

Теорема 1. *Система $\mathfrak{L}_E^d = \left\langle L_E^d, \leq, \cup, 0\right\rangle$ является подсистемой верхней полурешетки Σ-степеней $\mathfrak{L}_E$. Существует гомоморфизм $\varphi_d : \mathfrak{L}^d \to \mathfrak{L}_T$ из этой системы на верхнюю полурешетку T-степеней $\mathfrak{L}_T$.*

Действительно, из предложения 2 следует первая часть теоремы. Для доказательства второй части определим отображение φ_d следующим образом. Пусть дан класс $\overline{\mathfrak{A}} \in L_E^d$ и степень $d(\mathfrak{A}) = a$. Тогда положим $\varphi_d(\overline{\mathfrak{A}}) = a$. По предложению 2 отображение φ_d есть требуемый гомоморфизм. $\square$

§ 3. Подсистема $\mathfrak{L}_E^f$

Пусть L_E^f состоит из всех таких классов $\overline{\mathfrak{A}} \in L_E$, что существует конечно порожденная система $\mathfrak{B}$ из этого класса. В данном параграфе доказывается, что система $\mathfrak{L}^f = \left\langle L_E^f, \leq\right\rangle$ изоморфна верхней полурешетке T-степеней. Для доказательства этого нам необходимо привести некоторые определения и результаты работы автора [7].

Если нумерация ν системы $\mathfrak{M}$ является Σ-функцией в допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, то она называется Σ-*нумерацией системы* $\mathfrak{M}$. Если существует Σ-нумерация ν системы $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ называется *внутренне перечислимой* или Σ-*перечислимой.*

Теорема А. *Пусть $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — счетные системы и ν_2 — Σ-нумерация системы $\mathfrak{M}_2$. Тогда система $\mathfrak{M}_1$ Σ-сводима к $\mathfrak{M}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_1$ вычислима относительно пары $(\mathfrak{M}_2, \nu_2)$.*

Если система $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ конечно порождена элементами $a_1, \dots, a_n$, то любой элемент системы является значением некоторого замкнутого терма сигнатуры $\sigma \cup \{a_1, \dots, a_n\}$. Поэтому гёделева нумерация ν множества всех термов является нумерацией системы $\mathfrak{M}$. Она называется *стандартной нумерацией.*

Лемма 1 [7]. *Стандартная нумерация ν конечно порожденной системы $\mathfrak{M}$ является ее Σ-нумерацией.*

Лемма 2. *Стандартная нумерация ν конечно порожденной системы $\mathfrak{M}$ T-сводится к любой ее нумерации.*

Следствие 2. *Любая конечно порожденная система $\mathfrak{M}$ имеет степень, равную степени множества открытой диаграммы $OD(\mathfrak{M}, \nu)$, где ν — стандартная нумерация системы $\mathfrak{M}$.*

Лемма 3. *Для любой T-степени a существует конечно порожденная система $\mathfrak{A}$ такая, что $d(\mathfrak{A}) = a$.*

Действительно, пусть множество $P \subseteq \omega$ имеет T-степень $d(P) = a$. Тогда система $\mathfrak{A} = \langle \omega, P, ' \rangle$, где $n' = n + 1$, имеет степень $d(\mathfrak{A}) = a$. $\square$

Лемма 4. *Пусть степени конечно порожденных систем $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ равны a_1 и a_2. Система $\mathfrak{M}_1$ Σ-сводима к системе $\mathfrak{M}_2$ тогда и только тогда, когда $a_1 \leq a_2$.*

Лемма 5. *Если системы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ конечно порождены, то система $\mathfrak{M}_1 \sqcup \mathfrak{M}_2$ также конечно порождена.*

Доказательство непосредственно следует из определения системы $\mathfrak{M}_1 \sqcup \mathfrak{M}_2$.

Теорема 2. *Система $\mathfrak{L}^f = \left\langle L_E^f, \leq, \cup, 0 \right\rangle$ является подсистемой верхней полурешетки Σ-степеней. Существует изоморфизм $\varphi_f : \mathfrak{L}^f \to \mathfrak{L}_T$ этой системы на верхнюю полурешетку T-степеней $\mathfrak{L}_T$.*

Доказательство. Из предложения 1 и леммы 5 следует первая часть теоремы. Пусть система $\mathfrak{A}$ такова, что $\overline{\mathfrak{A}} \in L_E^f$. Пусть $\mathfrak{A}^* \in \overline{\mathfrak{A}}$ является конечно порожденной системой. По следствию 2 система $\mathfrak{A}^*$ имеет степень $d(\mathfrak{A}^*) = a$. Отображение $\varphi_f : \mathfrak{L}^f \to \mathfrak{L}_T$ определим так: $\varphi_f(\overline{\mathfrak{A}}) \leftrightharpoons a$. По следствию 1 это определение корректно. Из предложения 2 и лемм 3, 4 следует, что φ_f является требуемым изоморфизмом. $\square$

Из теоремы 2 получаем

Следствие 3. *Верхняя полурешетка T-степеней $\mathfrak{L}_T$ изоморфна вкладывается в верхнюю полурешетку Σ-степеней $\mathfrak{L}_\Sigma$.*

Пусть a — некоторая T-степень и подмножество $L_a \subseteq L^d$ состоит из всех классов $\overline{\mathfrak{A}} \in L^d$ таких, что $d(\mathfrak{A}) = a$. Система $\mathfrak{L}_a = \langle L_a, \leq, \cup \rangle$ по предложению 2 является верхней полурешеткой. По лемме 3 существует конечно порожденная алгебраическая система $\mathfrak{A}_{fin}$ такая, что $\overline{\mathfrak{A}}_{fin} \in L_a$. По теореме A для любого класса $\overline{\mathfrak{B}} \in L_a$ верна сводимость $\overline{\mathfrak{B}} \leq \overline{\mathfrak{A}}_{fin}$, т. е. класс $\overline{\mathfrak{A}}_{fin}$ является наибольшим элементом относительно Σ-сводимости в системе $\mathfrak{L}_a$.

Далее будет показано, что существуют такие системы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, что они T-эквивалентны, но не являются Σ-эквивалентными.

§ 4. Условие Σ-определимости

Определение 3 [1]. Алгебраическая система $\mathfrak{M}$ конечной (вычислимой) сигнатуры называется *локально конструктивизируемой*, если для любого конечного семейства $a_0, \ldots, a_n \in M$ $\exists$-теория $Th_\exists(\mathfrak{M}, \overline{a})$ системы $(\mathfrak{M}, a_0, \ldots, a_n)$ является вычислимо перечислимой.

Определение 4 [8]. Пусть для алгебраической системы $\mathfrak{M}$ выполнено условие: для любого конечного непустого множества $M_0 \subseteq M$ существует такое конечное подмножество $M_0^* \subseteq M$, содержащее M_0, что для любого конечного подмножества $M_1 \nsubseteq M_0^*$, $M_1 \subseteq M$ найдется такой автоморфизм f системы $\mathfrak{M}$, для которого
$$f \restriction M_0^* = id_{M_0^*}, \quad fM_1 \neq M_1.$$
Тогда $\mathfrak{M}$ называется *B-системой.*

Пусть дана алгебраическая система $\mathfrak{M}$. Если дана последовательность $\overline{m} = \langle m_0, \ldots, m_{n-1} \rangle$, $\overline{m} \in M^{<\omega}$, то через $M_{\overline{m}}$ обозначим множество $\{m_0, \ldots, m_{n-1}\}$. *Орбитой $\Theta(\overline{m})$ последовательности $\overline{m} \in M^{<\omega}$ в системе* $\mathfrak{M}$ назовем множество всех последовательностей $\bar{b}$ таких, что существует автоморфизм f системы $\mathfrak{M}$, для которого справедливо равенство $f(\overline{m}) = \bar{b}$.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{M}$ является B-системой и даны конечное подмножество $M_0 \subseteq M$ и бесконечное подмножество $S \subseteq M$. Тогда существует конечное подмножество $M_0^* \supseteq M_0$ такое, что для любой последовательности $\overline{m} \in S^{<\omega}$,*

$M_{\overline{m}} \nsubseteq M_0^*$, орбита $\Theta(\overline{m})$ последовательности $\overline{m}$ в системе $\mathfrak{M}_0 = \langle \mathfrak{M}, m\rangle_{m\in M_0^*}$ бесконечна.

Доказательство. Пусть подмножество M_0^* определяется по множеству M_0 так же, как и в определении B-системы. Пусть дана последовательность $\overline{m} \in M^{<\omega}$ такая, что $M_{\overline{m}} \nsubseteq M_0^*$. Покажем, что орбита $\Theta(\overline{m})$ последовательности $\overline{m}$ в системе $\mathfrak{M}_0$ бесконечна. Допустим противное: орбита $\Theta(\overline{m})$ в системе $\mathfrak{M}_0$ конечна и $\Theta(\overline{m}) = \{\overline{m}_0 = \overline{m}, \overline{m}_1 \ldots, \overline{m}_{n-1}\}$, $n \geq 1$. Рассмотрим множество $M_1 = M_0^* \cup \bigcup\limits_{i<n} M_{\overline{m}_i}$. По определению B-системы существует автоморфизм f системы $\mathfrak{A}_0$ такой, что $f(M_1) \neq M_1$. Тогда существуют число $i < n$ и элемент $m \in M_{\overline{m}_i}$ такие, что $f(m) \notin M_1$. Тем самым последовательность $\overline{m}_n = f(\overline{m}_i)$ принадлежит орбите $\Theta(\overline{m})$ и $\overline{m}_n \neq \overline{m}, \overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_{n-1}$. Получили противоречие. $\square$

Определение 5. Модель $\mathfrak{N}$ назовем *квазижесткой*, если орбита любого элемента $x \in N$ конечна.

Теорема 3. *Если квазижесткая модель $\mathfrak{N}$ сильно Σ-определима в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ над локально конструктивизируемой B-системой $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{N}$ конструктивизируема.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N} = \left\langle N, P_0^{\mathfrak{N}}, \ldots, P_s^{\mathfrak{N}}\right\rangle$ сильно Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Пусть формула $\psi_0(x_0)$, Δ-предикаты $P_0^{\mathfrak{N}_0}, \ldots, P_s^{\mathfrak{M}_0}$, множество N_0 такие же, как в определении 1, и $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{N}_0$. Через $M_0 \subseteq M$ обозначим множество параметров в формулах, определяющих модель $\mathfrak{N}$. Покажем, что $S = sp(N_0)$ конечно. Допустим противное, т. е. пусть S бесконечно. Тогда существует элемент $x = \varkappa(m_0, \ldots, m_{n-1}) \in N_0$ такой, что $sp(x) \nsubseteq M_0^*$, где множество M_0^* такое же, как в определении 4.

По лемме 6 орбита $\Theta(\overline{m})$ последовательности $\overline{m} = \langle m_0, \ldots, m_{n-1}\rangle$ в системе $\langle \mathfrak{M}, m\rangle_{m\in M_0^*}$ бесконечна. Пусть f — автоморфизм системы $\langle \mathfrak{M}, m\rangle_{m\in M_0^*}$. Тогда f можно продолжить до автоморфизма f^* системы $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{M}), m\rangle_{m\in M_0^*}$ такого, что $f^* \restriction N_0$ есть автоморфизм модели $\mathfrak{N}_0$ и $f^*(x) = \varkappa(f(\overline{m}))$. Следовательно, орбита $\Theta(x)$ элемента x в модели $\mathfrak{N}$ бесконечна. Получили противоречие. Значит, множество S конечно.

Отсюда легко следует, что существует взаимно однозначная Σ-функция $f : \omega \to \mathbb{HF}(S)$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Тогда множество

$$A = \{n \in \omega \mid f(n) \in N_0\}$$

является чистым Σ-подмножеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{N})$. По предложению [9] множество $A \subseteq \omega$ перечислимо. Аналогично для любого $i \leq n$ предикат

$$R_i = \left\{\langle n_1, \ldots, n_{m_i}\rangle \mid \ \langle f(n_1), \ldots, f(n_{m_i})\rangle \in P_i^{\mathfrak{M}_0}\right\}$$

вычислим. Пусть h — вычислимая $(1-1)$-функция из ω на A. Рассмотрим модель

$$\Omega = \left\langle \omega, P_0^{\Omega}, \ldots, P_n^{\Omega}\right\rangle,$$

где $P_i^{\Omega}(n_1, \ldots, n_{m_i}) \Leftrightarrow R(h(n_1), \ldots, h(n_{m_i}))$.

Очевидно, что $\Omega \simeq \mathfrak{M}_0 \simeq \mathfrak{M}$ и модель Ω конструктивизируема. $\square$

Замечание 2. Фактически доказано, что модель $\mathfrak{N}$ сильно Δ-определима.

Из доказательства следствия 3.4.1 в [1, с. 193] вытекает, что справедливо

Предложение 4. *Если модель $\mathfrak{M}$ сильно Σ-определима в допустимом множестве $\mathbb{A}$, то $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ также сильно Σ-определима в $\mathbb{A}$.*

Из предложения 4 и теоремы 3 следует

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A}$ — локально конструктивизируемая B-система, а $\mathfrak{B}$ — конструктивизируемая система. Тогда квазижесткая модель $\mathfrak{N}$ сильно Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}$ конструктивизируема.*

Действительно, легко понять, что конструктивизируемая система $\mathfrak{B}$ сильно Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$. Поэтому система $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ сильно Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$. По теореме 3 $\mathfrak{N}$ конструктивизируема.

Замечание 3. В работе [8] в формулировке предложения 2 и следствии 1 из § 1 допущена неточность. В их формулировках символ Δ_1 нужно заменить символом Δ_0.

Из определения бинарного дерева [3] вытекает

Лемма 7. *Любое бинарное дерево является квазижесткой моделью.*

Из теоремы 4 и леммы 7 получим

Следствие 4. *Пусть система $\mathfrak{M}$ такая же, как в теореме 4, и дерево D сильно Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Тогда D конструктивизируемо.*

В следующих параграфах будет доказано, что любая абелева p-группа (алгебра Ершова) локально конструктивизируема. Для этого здесь приведем некоторые общие определения и утверждения.

Пусть дана алгебраическая система $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ и A_0 — подмножество основного множества системы $\mathfrak{A}$. Тогда через $\langle \mathfrak{A}, A_0 \rangle$ обозначим обогащение системы $\mathfrak{A}$ константами $\{a \mid a \in A_0\}$ и положим $a^{\langle \mathfrak{A}, A_0 \rangle} = a$. Если $A_0 = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$, то $\langle \mathfrak{A}, A_0 \rangle$ будем также обозначать через $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle$.

Пусть даны конечные модели $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ сигнатуры σ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$. Пусть $|\mathfrak{B}| = \{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$ и $|\mathfrak{C}| \backslash |\mathfrak{B}| = \{c_0, \ldots, c_{r-1}\}$. Тогда через $\Phi_{\mathfrak{C}}(\bar{b}, \bar{c})$ обозначим конъюнкцию всех атомных и отрицаний атомных предложений, истинных в модели $\langle \mathfrak{C}, \bar{b}, \bar{c} \rangle$. Пусть $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ — вложение модели $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$. Через $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B},\varphi}$ обозначим семейство всех конечных моделей $\mathfrak{C}$, для которых существует вложение ψ моделей $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{A}$ такое, что $\psi \upharpoonright \mathfrak{B} = \varphi$. Пусть $\Psi_{\mathfrak{C}}(\bar{b}') = \exists \bar{x} \Phi_{\mathfrak{C}}(\bar{b}', \bar{x})$, где $\varphi b_i = b'_i$, $i < n$.

Легко понять, что справедлива

Лемма 8. *Для любой конечной модели $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{B}$ эквивалентны утверждения:*
1) $\mathfrak{C} \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{B},\varphi}$;
2) $\langle \mathfrak{A}, \bar{b}' \rangle \models \Psi_{\mathfrak{C}}(\bar{b}')$.

Пусть зафиксирована гёделева нумерация γ всех формул сигнатуры $\sigma \cup \{b'_0, \ldots, b'_{n-1}\}$. *Номером модели* $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{B}$ назовем номер формулы $\Psi_{\mathfrak{C}}(\bar{b}')$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая счетная система. В [10] дано

Определение 6. Если для любых конечной модели $\mathfrak{B}$ и вложения $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ семейство $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B},\varphi}$ вычислимо, то говорят, что для модели $\mathfrak{A}$ *справедливо условие вычислимой вложимости.*

Из леммы 8 следует: если для системы $\mathfrak{A}$ справедливо условие вычислимой вложимости, то $\mathfrak{A}$ локально конструктивизируема. Покажем, что обратное неверно.

Предложение 5. *Существует локально конструктивизируемая система $\mathfrak{A}$, для которой условие вычислимой вложимости не выполняется.*

Доказательство. Пусть S — вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество простых чисел и $\mathfrak{A} = \bigoplus\{Z_p \mid p \in S\}$, где Z_p — циклическая группа порядка p. Легко проверить, что группа $\mathfrak{A}$ локально конструктивизируема.

Допустим, что для $\mathfrak{A}$ справедливо условие вычислимой вложимости. Пусть $\mathfrak{B} = \{0\}$ и $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, $\varphi(0) = (0, 0, \dots)$. Тогда множество $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B},\varphi}$ вычислимо. Отсюда и из эквивалентности «$p \in S \Leftrightarrow$ группа Z_p вложима в $\mathfrak{A}$» следует, что множество S вычислимо; противоречие. □

Наша цель — доказать, что любая абелева p-группа (алгебра Ершова) удовлетворяет условию вычислимой вложимости систем. Пусть $\mathfrak{A}$ — локально конечная система, $\mathfrak{B}$ — конечная система и $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ — вложение. Через $\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B},\varphi}$ обозначим множество всех конечных систем $\mathfrak{C}$ таких, что существует вложение $\psi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$, расширяющее φ, т. е. $\psi \restriction \mathfrak{B} = \varphi$. Легко понять, что из леммы 8 вытекает

Следствие 5. *Счетная локально конечная система $\mathfrak{A}$ локально конструктивизируема тогда и только тогда, когда для любой конечной системы $\mathfrak{B}$ и вложения φ семейство $\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B},\varphi}$ вычислимо перечислимо.*

Мы покажем более сильный результат: если $\mathfrak{A}$ — абелева p-группа (алгебра Ершова), то семейство $\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B},\varphi}$ вычислимо. Отсюда и из аналога следующего результата [10] будет вытекать, что любая счетная неконструктивизируемая абелева p-группа (алгебра Ершова) не имеет степени.

Теорема C [10]. *Если для счетной неконструктивизируемой модели справедливо условие вычислимой вложимости, то она не имеет степени.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — локально конечная система. Введем следующий аналог определения 6.

Определение 7. Если для любых конечной системы $\mathfrak{B}$ и вложения $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ семейство $\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B},\varphi}$ вычислимо, то говорят, что для модели $\mathfrak{A}$ *справедливо условие вычислимой вложимости систем.*

Из доказательства теоремы C получаем

Следствие 6. *Если счетная неконструктивизируемая счетная локально конечная система $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию вычислимой вложимости систем, то она не имеет степени.*

§ 5. Абелевы p-группы

В дальнейшем под словом группа понимается абелева p-группа. Введем некоторые обозначения. Пусть G — группа и $g \in G$. Через $|g|$ обозначается порядок элемента g, $p^nG = \{g \in G \mid \exists g_1(g = p^n g_1)\}$, $G[p^n] = \{g \in G \mid p^n g = 0\}$. Минимальное число p^n такое, что $p^nG = 0$, называется *периодом группы G*. Если такого числа не существует, то говорят, что G неограниченна. *Высотой $h_G(g)$ элемента g* называется такое наибольшее число $m \geq 0$, что в G истинна формула $\exists x(g = p^m x) \& \forall y(g \neq p^{m+1} y)$. Если такого m нет, то $h_G(g) = \infty$. Z_{p^n} — циклическая группа порядка p^n. Любой изоморфизм группы G_0 в G называется вложением G_0 в G.

Наибольший общий делитель чисел n и m обозначается через (n, m).

Лемма А. *Пусть A — произвольная абелева группа (не обязательно p-группа), а B — конечная сервантная подгруппа. Тогда B выделяется прямым слагаемым.*

Предложение В [11, с. 83]. *Если редуцированная абелева p-группа G неограниченна, то G имеет прямое слагаемое, являющееся неограниченной прямой суммой циклических групп.*

Из доказательства предложения 27.1 в [12, с. 139] следует

Предложение С. *Пусть период абелевой p-группы C равен p^n, $c \in C$, $|c| = p^n$ и подгруппа $B \subseteq C$ такова, что $B \cap (c) = 0$. Тогда существует подгруппа $E \supseteq B$ такая, что $C = E \oplus (c)$.*

Теорема 5. *Для любой счетной абелевой p-группы G справедливо условие вычислимой вложимости систем.*

Доказательство. Легко понять, что можно предположить неограниченность редуцированной части группы G. Доказательство теоремы следует из следующего предложения, которое представляет самостоятельный интерес.

Предложение 6. *Пусть G — счетная абелева p-группа с неограниченной редуцированной частью, B, C — конечные абелевы p-группы, $B \subseteq C$ и $\varphi : B \to G$ является вложением B в C. Тогда существует вложение $\psi : C \to G$, расширяющее φ, в том и только в том случае, когда для любого элемента $b \in B$ справедливо неравенство*

$$h_C(b) \leq h_G(b'), \tag{1}$$

где $\varphi b = b'$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Доказательство достаточности проведем индукцией по числу элементов группы C. Пусть период группы C равен p^n, т. е. $\forall c \in C(p^n c = 0)$, и $c \in C$ такой, что $|c| = p^n$. Допустим, что $(c) \cap B = 0$. Тогда по предложению C существует подгруппа $E \subseteq C$ такая, что $C = (c) \oplus E$ и $E \supseteq B$. По индукции существует вложение $\psi_0 : E \to G$, $\psi_0 \upharpoonright B = \varphi$. По предположению B существует элемент c' такой, что $(c') \cap E' = 0$, $|c'| = p^n$, где $E' = \psi_0 E$. Очевидно, что ψ_0 можно продолжить до $\psi : C \to G$, положив $\psi c = c'$. Поэтому можно считать, что $(c) \cap B \neq 0$.

Для каждого элемента c порядка p^n через k_c обозначим такое наименьшее число, что $p^{k_c} c \in B$. Пусть $c_0 \in C[p^n]$ такой элемент, что k_{c_0} имеет наименьшее значение. Положим $c = c_0$, $k = k_{c_0}$.

Пусть

$$p^k c = b_0. \tag{2}$$

Покажем, что существует такой элемент c', что $p^k c' = b'_0$, где $\varphi b_0 = b'_0$, и для любого $s < k$ верно $p^s c' \notin B'$.

Так как подгруппа (c) сервантна в C, то $h_C(b_0) = k$. Поэтому в G существует элемент g_0 такой, что $p^k g_0 = b'_0$. Пусть s — минимальное число такое, что $p^s g_0 \in B'$. Если $s = k$, то $c' = g_0$ — искомый элемент. Пусть $s < k$. По предложению B существует элемент $g_1 \in G$ такой, что $|g_1| = p^k$ и $(g_1) \cap G_0 = 0$, где $G_0 = \mathrm{gr}(B', g_0)$. Положим $c' = g_0 + g_1$. Тогда $p^k c' = b'_0$. Покажем, что для любого $s < k$ верно $p^s c' \notin B'$. Действительно, пусть, напротив, для некоторого $s < k$ верно $p^s c' \in B'$. Тогда $p^s g_0 + p^s g_1 = b' \in B'$. Отсюда $0 \neq p^s g_1 \in G_0$; противоречие.

Пусть $H = \mathrm{gr}(B, c)$, $H' = \mathrm{gr}(B', c')$. Определяющими соотношениями группы H будут соотношения между элементами группы B и соотношение $p^k c = b$. Определяющие соотношения группы H' такие же. Тогда существует изоморфизм $f : H \to H'$ такой, что $f \restriction B = \varphi$.

Пусть

$$C = (c) \oplus E. \tag{3}$$

Пусть $E_0 = \mathrm{pr}_E(B)$, т. е. E_0 — проекция подгруппы B на вторую координату разложения (3). Пусть $e \in E_0$. Тогда найдутся элемент $b \in B$ и число $s \in \omega$ такие, что

$$b = p^s \alpha c + e, \quad (\alpha, p) = 1. \tag{4}$$

Покажем, что

$$h_C(e) \leq h_G(e'), \tag{5}$$

где $e' = fe$.

Пусть $h_C(e) = r$. Покажем, что либо $e \in B$, либо справедливо неравенство

$$r < s. \tag{6}$$

Если $s \geq k$, то из (2), (4) следует, что $e \in B$.

Пусть $s < k$. Покажем справедливость (6). Допустим противное: $r \geq s$. Существует элемент $e_1 \in E$ такой, что $e = p^r e_1$. Отсюда и из (4) имеем $b = p^s(\alpha c + p^{r-s} e_1)$. Так как $(\alpha, p) = 1$, элемент $c_1 = \alpha c + p^{r-s} e_1$ имеет порядок p^n и $k_{c_1} < k$. Это противоречит выбору элемента c. Поэтому (6) справедливо.

Так как $f : H \to H'$ изоморфизм, то

$$b' = p^s \alpha c' + e'. \tag{7}$$

Покажем, что

$$h_G(e') \geq r. \tag{8}$$

Если $e \in B$, то (8) следует из условия предложения и определения f.

Пусть $e \notin B$. Тогда справедливо неравенство (6). Отсюда и из (4) имеем $h_C(e) = h_C(b) = r$. Следовательно, $h_G(b') \geq r$. Отсюда и из (7) получим $h_G(e') \geq \min\{h_G(b'), s\} \geq r$, т. е. неравенство (5) доказано.

Вложение $\varphi_0 = f \restriction E_0$ подгруппы E_0 в G и подгруппы $E_0 \subseteq E$ удовлетворяют условию (1) предложения. По индукции существует вложение $\psi_0 : E \to G$ такое, что $\psi_0 \restriction E_0 = \varphi_0$. Покажем, что

$$\psi_0 E \cap (c') = 0. \tag{9}$$

Допустим противное, т. е. пусть существует $e \in E$, $e \neq 0$, такой, что

$$\psi_0 e = p^s c'. \tag{10}$$

Можно считать, что $|e| = p$ и $s \geq k$. Действительно, если $s < k$, то из (10) имеем $\psi_0 p^{n-s-1} e = p^{n-1} c'$. Отсюда и из $k \leq n - 1$ вытекает, что в качестве элемента e можно взять $p^{n-s-1} e$.

Таким образом, $|e| = p$ и $s \geq k$. Можно предполагать, что $e \in E_0$. Действительно, допустим, что $e \notin E_0$, $h_C(e) = h_E(e) = m$ и $p^m e_1 = e$ для некоторого элемента $e_1 \in E$. Подгруппа (e_1) сервантна в E, поэтому существует подгруппа $E_1 \subseteq E$ такая, что $E = (e_1) \oplus E_1$. Так как $e \notin E_0$, то $\mathrm{pr}_{(e_1)} B = 0$. Отсюда и из (3) следует, что $C = (c) \oplus (e_1) \oplus E_1$ и $B \subseteq (c) \oplus E_1$. По предложению В для доказательства предложения достаточно вложить подгруппу $(c) \oplus E_1$ в G. Это возможно по индукции.

Итак, будем считать, что $e \in E_0$. Тогда согласно (10)

$$\psi_0 e = \varphi_0 e = fe = p^s c' = p^{s-k} b_0'. \tag{11}$$

По определению изоморфизма $f : H \to H'$ имеем

$$fp^{s-k} b_0 = \varphi p^{s-k} b_0 = p^{s-k} b_0'. \tag{12}$$

Из (11) и (12) получим, что

$$e = p^{s-k} b_0.$$

Отсюда $e \in (c) \cap E$, что невозможно.

Поэтому равенство (9) справедливо. Тогда вложения $f : (c) \to (c')$ и $\psi_0 : E \to G$ продолжаются до требуемого вложения $\psi : C \to G$. Предложение, а вместе с ним и теорема доказаны. $\square$

Следствие 7. *Любая абелева p-группа A локально конструктивизируема.*

Из этого следствия и теоремы 4 получаем

Следствие 8. *Пусть A — не более чем счетная абелева p-группа. Тогда квазижесткая система $\mathfrak{N}$ сильно Σ-определима в наследственно конечном допустимом множестве над A тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}$ конструктивизируема.*

Следствие 9. *Существуют такие абелева p-группа A и допустимое множество $\mathbb{A}$, что A сильно Σ-определима в $\mathbb{A}$, но ее ульмов тип $\tau(A)$ не сильно Σ-определим в $\mathbb{A}$.*

Из следствий 8 и 9 вытекает

Замечание 4. Теоремы 1, $1'$ и следствия 3, 4 из [13, § 2] усиливаются. Они остаются справедливыми, если в них слова «сильная Δ_1-определимость» заменить словами «сильная Σ-определимость».

В силу следствия 7 и предложения 3.5.7 из [1, с. 218] верно

Следствие 10. *Поле вещественных чисел не Σ-определимо в $\mathbb{HF}(G)$ ни для какой абелевой p-группы G.*

Замечание 5. Существуют периодические абелевы группы и группы без кручения, которые не являются локально конструктивизируемыми.

Действительно, пусть S — не вычислимо перечислимое множество простых чисел и $G_0 = \bigoplus\limits_{p \in S} Z_p$, $G_1 \subseteq Q$ и $G_1 = \mathrm{gr}\{\frac{1}{p} \mid p \in S\}$. Легко проверить, что $\exists$-теории G_0 и $\langle G_1, 1\rangle$ не вычислимо перечислимы.

Из теоремы 5 и следствия 6 получаем

Следствие 11. *Любая счетная неконструктивизируемая абелева p-группа не имеет степени.*

§ 6. Алгебры Ершова

Будем рассматривать алгебры Ершова в сигнатуре $\sigma_0 = \langle \vee, \wedge, \setminus, 0\rangle$, а булевы алгебры в сигнатуре $\sigma_1 = \langle \vee, \wedge, \setminus, 0, 1\rangle$.

Приведем некоторые обозначения и известные результаты. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра Ершова и $a \in \mathfrak{A}$. Тогда $\hat{a} \rightleftharpoons \{x \in \mathfrak{A} \mid x \le a\}$ и $a^{\perp} \rightleftharpoons \{x \in \mathfrak{A} \mid x \wedge a = 0\}$ — алгебры Ершова, $\|a^{\perp}\|$ — мощность алгебры Ершова $a^{\perp}$. Элемент a называется *суператомным*, если $\hat{a}$ суператомна. *Ординальным типом* $\rho(a)$ *элемента* a называется ординальный тип алгебры $\hat{a}$, т. е. $\rho(a) = o(\hat{a})$.

Пусть $F(\mathfrak{A})$ — идеал Фреше алгебры $\mathfrak{A}$. Если элемент $a \in F(\mathfrak{A})$ является объединением атомов $a_0, \dots, a_{n-1}$ алгебры $\mathfrak{A}$, то *порядком* $|a|_{\mathfrak{A}}$ *элемента* a в алгебре $\mathfrak{A}$ называется число n, т. е. $|a|_{\mathfrak{A}} = n$. Если же $a \notin F(\mathfrak{A})$, то полагаем $|a|_{\mathfrak{A}} = \omega$. Если $\bar{a} = \langle a_0, \dots a_{n-1}\rangle$, $a_i \in \mathfrak{A}$, то подалгебра, порожденная элементами a_i, обозначается через $\mathfrak{A}(\bar{a})$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная алгебра Ершова, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ — конечные алгебры Ершова, $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ — вложение и $b_0, \dots, b_{n-1}$ — атомы алгебры $\mathfrak{B}$, $\varphi(b_i) = b'_i$, $i < n$, $b = \bigvee\limits_{i=0}^{n-1} b_i$, $b' = \bigvee\limits_{i=0}^{n-1} b'_i$.

Лемма 9. *Алгебра Ершова $\mathfrak{C}$ принадлежит $\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B},\varphi}$ тогда и только тогда, когда $|b_i|_{\mathfrak{C}} \le |b'_i|_{\mathfrak{A}}$ для любого $i < n$ и $\|b^{\perp}\| \le \|b'^{\perp}\|$.*

Из леммы 9 следует

Теорема 6. *Для любой счетной алгебры Ершова $\mathfrak{A}$ справедливо условие вычислимой вложимости систем.*

Отсюда и из следствия 6 получаем

Следствие 12. *Любая счетная неконструктивизируемая алгебра Ершова не имеет степени.*

Из теоремы 6, как и в случае групп, вытекает, что для алгебр Ершова справедливы аналоги следствий 7–10 и замечания 4.

Из следствия 4 получаем

Следствие 13. *Существует булева алгебра $\mathfrak{A}$ такая, что ее порождающее дерево не сильно Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$.*

Действительно, пусть $\mathfrak{A}$ — неконструктивизируемая булева алгебра. Тогда любое ее порождающее дерево D неконструктивизируемо. Отсюда по следствию 4 дерево D не сильно Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$.

Из леммы 9 вытекает

Следствие 14. *Пусть $\mathfrak{A}_i$, $i = 0, 1$, — алгебры Ершова и $\bar{p}_i = \left\langle p_0^i, \dots, p_{m-1}^i \right\rangle$ — последовательности элементов из A_i. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\langle \mathfrak{A}_0, \bar{p}_0\rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{A}_1, \bar{p}_1\rangle$;

2) *существуют атомы $u_0^i, \dots, u_{n-1}^i$ алгебр $\mathfrak{A}_i(\bar{p}_i)$, порожденные $\bar{p}_i$, такие, что $\left|u_j^0\right| = \left|u_j^1\right|$ и $\|u^{0\perp}\| = \|u^{1\perp}\|$, где $u^i = u_0^i \vee \dots \vee u_{n-1}^i$ и отображение $f : \mathfrak{A}_0(\bar{p}_0) \to \mathfrak{A}_1(\bar{p}_1)$, определенное равенствами $f\left(u_j^0\right) = u_j^1$, есть изоморфизм и $f(\bar{p}_0) = \bar{p}_1$.*

Замечание 6. Следствие 14 остается справедливым, если вместо алгебр Ершова $\mathfrak{A}_i$ рассматривать булевы алгебры $\mathfrak{B}_i$ и исключить условие $\|u^{0\perp}\| = \|u^{1\perp}\|$ (оно тривиально выполняется).

Из теоремы 1 в [13] вытекает

Следствие 15. *Пусть $\mathfrak{A}_i$, $i = 0, 1$, — алгебры Ершова и $\xi_i \in \mathbb{HF}(\mathfrak{A}_i)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{A}_0), \xi_0\rangle \equiv_1 \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{A}_1), \xi_1\rangle$;

2) *существуют число n, элемент $\varkappa \in \mathbb{HF}(n)$ и последовательности $\bar{p}_i = \left\langle p_0^i, \dots, p_{m-1}^i\right\rangle$, $p_j^i \in \mathfrak{A}_i$, такие, что $\xi_i = \varkappa(\bar{p}_i)$ и $\langle \mathfrak{A}_0, \bar{p}_0\rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{A}_1, \bar{p}_1\rangle$.*

Следующая лемма есть аналог замечания 1 из [14].

Лемма B. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ — системы одной сигнатуры, причем $\mathfrak{N}$ является Σ-определимой в $\mathfrak{M}$ формулами $\varphi, \psi_0, \dots$ с параметрами $\bar{a}$, где ψ_0 определяет эквивалентность η на $\varphi^{\mathfrak{M}}[x]$. Пусть существуют $\bar{b}$ из M' такой, что $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{M}', \bar{b} \rangle$, и отношение $T \subseteq M^{<\omega} \times M'^{<\omega}$ такое, что $T(\bar{x}, \bar{y}) \to \langle \mathfrak{M}, \bar{a}, \bar{x} \rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{M}', \bar{b}, \bar{y} \rangle$, $\forall \bar{x} \in M^{<\omega} \exists \bar{y} \in M'^{<\omega} T(\bar{x}, \bar{y}) \& \forall \bar{y} \in M'^{<\omega} \exists \bar{x} \in M^{<\omega} T(\bar{x}, \bar{y})$ и $T(\bar{x}, \bar{y}) \to T(x_i, y_i)$, причем*

1) $T(x, y) \& T(x', y) \& \varphi(x) \to \psi_0(x, x')$,
2) $T(x, y) \& T(x, y') \& \varphi(x) \to \psi_0'(y, y')$, *где $\varphi', \psi_0' \dots$ получается из $\varphi, \psi_0, \dots$ заменой $\bar{a}$ на $\bar{b}$.*

Тогда в $\mathfrak{M}'$ определима $\mathfrak{N}$ посредством $\varphi', \psi_0', \dots$.

Лемма 10. *Если элемент a алгебры Ершова не суператомный, то для любого n существуют элементы $c_1, \dots, c_n$ такие, что $|c_i| = \omega$ и $a = c_1 \vee \dots \vee c_n$, $c_i \wedge c_j = 0$, $i \neq j$.*

Элемент $a \in \mathfrak{A}$ назовем *A-элементом*, если $|a| = \omega$ и a содержит атом, т. е. a не является безатомным.

Последовательность A-элементов $\langle a_i \mid i \in I \rangle$, где $I = \{0, 1, \dots, n-1\}$ для некоторого $n \in \omega$ либо $I = \omega$ и $a_i \wedge a_j = 0$, назовем *A-последовательностью.*

Если существует такое $n < \omega$, что в $\mathfrak{A}$ существует A-последовательность $\langle a_i \mid i < n \rangle$, но нет A-последовательности длины $n+1$, то будем говорить, что *ширина $W(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A}$ равна n.*

Если такого n нет, то говорят, что $\mathfrak{A}$ *имеет неограниченную ширину.*

Лемма 11. *Пусть алгебра Ершова $\mathfrak{A}$ не является булевой алгеброй, имеет ограниченную ширину и $W(\mathfrak{A}) = n$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ конструктивизируема.*

Пусть для алгебры $\mathfrak{A}$ справедливо равенство $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{A}_1$, где $\mathfrak{A}_0$ — булева алгебра, $\mathfrak{A}_1$ — алгебра Ершова. По последовательности $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ определим последовательности $\bar{x}^0$ и $\bar{x}^1$ следующим образом. Пусть $x_i = \langle x_i^0, x_i^1 \rangle$, где $x_i^j \in \mathfrak{A}_j$, $j = 0, 1$. Тогда $\bar{x}^j = \langle x_1^j, \dots, x_n^j \rangle$, $j = 0, 1$.

Лемма 12. *Пусть даны алгебры $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \oplus \mathfrak{B}_1$ где $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ — булевы алгебры, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ — алгебры Ершова, и последовательности $\bar{a}$, $\bar{b}$ элементов из $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ такие, что $\langle \mathfrak{A}_0, \bar{a}^0 \rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{B}_0, \bar{b}^0 \rangle$ и $\langle \mathfrak{A}_1, \bar{a}^1 \rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{A}_1, \bar{b}^1 \rangle$. Тогда*

$$\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle.$$

Пусть для модели $\mathfrak{N}$ сигнатуры $\langle P^2 \rangle$ справедливы условия:
1) $\mathfrak{N} \models \forall x \forall y (P(x, y) \vee P(y, x))$,
2) $\mathfrak{N} \models \forall x \forall y (P(x, y) \& P(y, x) \to x = y)$.

Тогда модель $\mathfrak{N}$ назовем *антисимметричной связанной моделью.*

Следующая теорема обобщает теорему 2 из [14].

Теорема 7. *Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная алгебра Ершова и антисимметричная связанная модель $\mathfrak{N}$ Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$. Тогда $\mathfrak{N}$ конструктивизируема.*

Доказательство. Пусть модель $\mathfrak{N}$ Σ-определима в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$. Если алгебра $\mathfrak{A}$ конструктивизируема, то и модель $\mathfrak{N}$ конструктивизируема. Поэтому можно считать, что $\mathfrak{A}$ не конструктивизируема. Пусть $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, $a_i \in \mathfrak{A}$ — параметры в формулах, определяющих модель $\mathfrak{N}$, и $a = \bigvee a_i$. По алгебре $\mathfrak{A}$ определим алгебру $\mathfrak{B}$. Рассмотрим возможные случаи.

(A) Алгебра $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{A}_1$, где $\mathfrak{A}_0$ — булева алгебра и $\mathfrak{A}_1$ — конструктивизируемая алгебра Ершова. Если $\mathfrak{A}$ — булева алгебра, то полагаем $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1 = 0$. Из неконструктивизируемости алгебры $\mathfrak{A}_0$ следует, что если $\mathfrak{A}_0$ суператомна, то ее ординальный тип $\tau(\mathfrak{A}_0) > 3$. Определим булеву алгебру $\mathfrak{B}_0$ следующим образом. Если $\mathfrak{A}_0$ — атомная алгебра, то $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_{\omega^3}$. Если $\mathfrak{A}_0$ не является атомной, то $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_{\omega^3} \oplus \mathfrak{B}_\eta$, где η — счетный плотный линейный порядок без концов. Тогда положим

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \oplus \mathfrak{A}_1.$$

(B) Не имеет место случай (A). Пусть $U = \{u_1, \dots, u_p\}$ — множество всех атомов алгебры $\mathfrak{A}(\bar{a})$, $a = u_1 \vee \dots \vee u_p$. Тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{A}_1$, где $\mathfrak{A}_0 = \hat{a}$, $\mathfrak{A}_1 = a^\perp$. Определим алгебру $\mathfrak{B}_0$ следующим образом. Если $\mathfrak{A}_0$ конструктивизируема, то $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}_0$. В противном случае $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_{\omega^3}$, если $\mathfrak{A}_0$ — атомная алгебра, и $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_{\omega^3} \oplus \mathfrak{B}_\eta$, если $\mathfrak{A}_0$ не является атомной. Пусть $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2^\omega \oplus \mathfrak{B}_\eta$. Тогда положим

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \oplus \mathfrak{B}_1.$$

По лемме B достаточно построить соответствие $T : \mathbb{HF}(\mathfrak{A}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{B})$, которое удовлетворяет условиям этой леммы.

Пусть имеет место случай (A). Покажем, что можно считать $a \in \mathfrak{A}_0$. Действительно, пусть $a = \langle b, c\rangle$, где $b \in \mathfrak{A}_0$, $c \in \mathfrak{A}_1$. Тогда $\mathfrak{A}_1 = \hat{c} \oplus c^\perp$. Так как $\mathfrak{A}_1$ — конструктивизируемая алгебра, существует конструктивизация ν_1 алгебры $\mathfrak{A}_1$. Идеал $\hat{c} = \{x \mid x \le c\}$ вычислим в $\langle \mathfrak{A}_1, \nu_1\rangle$, и $c^\perp \cong \mathfrak{A}_1/\hat{c}$. Отсюда $c^\perp$ — конструктивизируемая алгебра Ершова. Тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0' \oplus \mathfrak{A}_1'$, где $\mathfrak{A}_0' = \mathfrak{A}_0 \oplus \hat{c}$, $\mathfrak{A}_1' = c^\perp$ и $a \in \mathfrak{A}_0'$. Тем самым вместо $\mathfrak{A}_0$ можно рассматривать $\mathfrak{A}_0'$.

Определим частичный изоморфизм $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ следующим образом. Пусть алгебра $\mathfrak{A}_0$ не является атомной и $\bar{z} = \langle z_0, \dots, z_{n-1}\rangle$, $z_i \in \mathfrak{A}_0$. Подалгебру булевой алгебры $\mathfrak{A}_0$ сигнатуры σ_1, порожденную множеством $\{z_i \mid i < n\}$, обозначим через $\mathfrak{A}_0(\bar{z})$. Пусть $U = \{u_1, \dots, u_p\}$ — множество всех атомов алгебры $\mathfrak{A}_0(\bar{a})$. Сначала определим отображение $f_0 : U \to \mathfrak{B}_0$. Элементы $v_i \rightleftharpoons f_0(u_i)$ выбираем так, чтобы выполнялись равенство $\mathfrak{B}_0 = \widehat{v_1} \oplus \dots \oplus \widehat{v_p}$ и следующие условия. Рассмотрим возможные случаи.

1. Элемент u_i суператомный. Тогда если $\tau(u_i) < \langle 3, 1\rangle$, то $\tau(v_i) = \tau(u_i)$. Если же $\tau(u_i) \ge \langle 3, 1\rangle$, то $\tau(v_i) \ge \langle 3, 1\rangle$.

2. Элемент u_i атомный, но не суператомный. Тогда $\tau(v_i) \ge \langle 3, 1\rangle$.

3. Элемент u_i представи́м в виде $u_i = u_i' \vee u_i''$, где u_i' атомный или $u_i' = 0$, а u_i'' безатомный. Тогда $v_i = v_i' \vee v_i''$, где v_i' определяется по u_i' так же, как и в случаях 1, 2, а v_i'' — безатомный элемент.

4. Случаи 1–3 не имеют места. Тогда $v_i = v_i' \vee v_i''$, где $\tau(v_i') \ge \langle 3, 1\rangle$, а v_i'' — безатомный элемент.

Если же $\mathfrak{A}_0$ является атомной, то могут быть только случаи 1, 2. Тогда элементы $v_i \in \mathfrak{B}_0$ определяем так же, как они определены в случаях 1, 2.

Отображение f_0 можно продолжить до изоморфного вложения $f : \mathfrak{A}_0(\bar{a}) \to \mathfrak{B}$. Полагаем $b_i = f(a_i)$. Из замечания 6 следует, что

$$\langle \mathfrak{A}_0, \bar{a}\rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{B}_0, \bar{b}\rangle. \tag{13}$$

Из леммы 12 и (13) получаем

$$\langle \mathfrak{A}, \bar{a}\rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{B}, \bar{b}\rangle. \tag{14}$$

Из следствия 15 и (14) вытекает

$$\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{A}), \bar{a}\rangle \equiv_1 \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{B}), \bar{b}\rangle.$$

Определим соответствие $T : \mathbb{HF}(\mathfrak{A}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ следующим образом. Пусть $\xi \in \mathbb{HF}(\mathfrak{A})$, $\theta \in \mathbb{HF}(\mathfrak{B})$. Полагаем $T(\xi, \theta)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия.

1. Если $\xi = \varkappa(\bar{p})$, то $\theta = \varkappa(\bar{q})$.

2. Пусть последовательности $\bar{p}^j$, $j = 0, 1$, определены по последовательности $\bar{p}$ так же, как в лемме 12. Тогда $\langle \mathfrak{A}_0, \bar{a}, \bar{p}^0 \rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{B}_0, \bar{b}, \bar{q}^0 \rangle$.

3. $\bar{p}^1 = \bar{q}^1$.

Пусть имеет место случай (B). Если алгебра $\mathfrak{A}_0$ неконструктивизируема, то, как и выше, определим элементы $v_1, \dots, v_p, b_1, \dots, b_k \in \mathfrak{B}_0$ и положим $f_0(u_i) = v_i$. Тогда получим $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{A}), \bar{a} \rangle \equiv_1 \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{B}), \bar{b} \rangle$. Если $\mathfrak{A}_0$ конструктивизируема, то $\bar{b} = \bar{a}$. Далее соответствие T определяется, как и выше, с единственным отличием: условие 3 нужно заменить условием

3′. $\langle \mathfrak{A}_1, \bar{p}^1 \rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{B}_1, \bar{q}^1 \rangle$.

Докажем, что для соответствия T справедливы все условия леммы B.

Лемма 13. *Для каждого элемента $\xi \in \mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ существует элемент $\theta \in \mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ такой, что $T(\xi, \theta)$.*

Лемма 14. *Для каждого элемента $\theta \in \mathbb{HF}(\mathfrak{B})$ существует элемент $\xi \in \mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ такой, что $T(\xi, \theta)$.*

Лемма 15. *Если $T(\bar{\xi}, \bar{\theta})$, то $T(\xi_i, \theta_i)$.*

Из леммы 12, следствий 14 и 15 вытекает

Лемма 16. *Если $T(\xi, \theta)$, то $\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{A}), \bar{a}, \xi \rangle \equiv_1 \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{B}), \bar{b}, \theta \rangle$.*

В дальнейшем рассматриваются последовательности вида $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_t \rangle$, $\bar{y} = \langle y_1, \dots, y_t \rangle$, $x_i, y_i \in \mathfrak{A}$ такие, что $x_i \wedge x_j = y_i \wedge y_j = 0$, $i \neq j$, $\vee x_i = \vee y_i$ и $|x_i| = |y_i|$.

Последовательности $\bar{x}$ и $\bar{y}$ назовем 1-*равными* и будем писать $\bar{x} \simeq \bar{y}$, если справедливы равенства

$$|x_i \wedge y_j| = |x_j \wedge y_i|, i \neq j. \tag{15}$$

Последовательности $\bar{x}$ и $\bar{y}$ назовем *эквивалентными* и будем писать $\bar{x} \sim \bar{y}$, если существуют такие последовательности $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, что $\bar{x}_1 = \bar{x}$, $\bar{x}_n = \bar{y}$ и

$$\bar{x}_1 \simeq \bar{x}_2 \simeq \dots \simeq \bar{x}_n. \tag{16}$$

Лемма 17. *Пусть $c_i \leq x_i$, $c_j \leq x_j$ и $|c_i| = |c_j|$. Пусть последовательность $\bar{z}$ получена из $\bar{x}$ заменой x_i на $(x_i \setminus c_i) \vee c_j$, а x_j на $(x_j \setminus c_j) \vee c_i$. Тогда $\bar{x} \sim \bar{z}$.*

Последовательность $\bar{z}$ из леммы 17 обозначим через $[\bar{x}]^{c_i}_{c_j}$.

Лемма 18. *Пусть для некоторых i, j выполнено равенство $|x_i| = |x_j|$ и последовательность $\bar{z}$ получена из $\bar{x}$ перестановкой x_i и x_j. Тогда $\bar{x} \sim \bar{z}$.*

Последовательность $\bar{z}$ из леммы 18 обозначим через $[\bar{x}]^i_j$.

Лемма 19. *Пусть $c_i \leq x_i$ такой, что $|x_i \setminus c_i| = |x_j| = \omega$. Последовательность $\bar{z}$ получена из $\bar{x}$ заменой x_i на $x_i \setminus c_i$, а x_j на $x_j \vee c_i$. Тогда $\bar{x} \sim \bar{z}$.*

Последовательность $\bar{z}$ из леммы 19 обозначим через $[\bar{x}]^{c_i}_j$.

Лемма 20. *Пусть даны последовательности $\bar{x}$ и $\bar{y}$ такие, что для некоторого p верно $|x_p| < \omega$. Тогда существует последовательность $\bar{z}$ такая, что $\bar{y} \sim \bar{z}$, $z_p = x_p$ и для любого $i \neq p$ верны*

1^0) $x_i \wedge z_p = z_i \wedge x_p = 0$,

2^0) $z_i = (y_i \setminus c_i) \vee d_i$, $c_i = y_i \wedge x_p$, $d_i \leq y_p \setminus x_p$, $|c_i| = |d_i|$.

Лемма 21. *Пусть последовательности $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ и число p, как в лемме 20, и $|x_q| < \omega$, $q \neq p$. Тогда существует последовательность $\bar{u}$ такая, что $\bar{x} \sim \bar{u}$, $z_p = u_p = x_p$, $z_q = u_q$ и для любых i, j, где $j = p, q$, верно условие*

1) если $i \neq j$, то $z_i \wedge u_j = u_i \wedge z_j = 0$.

Из лемм 20 и 21 следует

Лемма 22. *Пусть даны последовательности $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и $|x_1|, \dots, |x_k| < \omega$. Тогда существуют последовательности $\bar{u}$ и $\bar{z}$ такие, что $\bar{x} \sim \bar{u}$, $\bar{y} \sim \bar{z}$ и $u_1 = z_1, \dots, u_k = z_k$.*

Лемма 23. *Пусть $T(\xi, \theta)$, $T(\eta, \theta)$ и $\varphi(\xi)$. Тогда $\psi_0(\xi, \eta)$.*

Доказательство. Пусть $\xi = \varkappa(\bar{p})$. Тогда из условий леммы следует, что $\eta = \varkappa(\bar{q})$ и

$$\langle \mathfrak{A}_0, \bar{a}, \bar{p}^0 \rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{A}_0, \bar{a}, \bar{q}^0 \rangle. \tag{17}$$

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — атомы алгебры $\mathfrak{A}_0(\bar{a}, \bar{p}^0)$. Из (17) имеем, что существуют атомы $y_1, \dots, y_n$ алгебры $\mathfrak{A}_0(\bar{a}, \bar{q}^0)$ и изоморфизм $h : \mathfrak{A}_0(\bar{a}, \bar{p}^0) \to \mathfrak{A}_0(\bar{a}, \bar{q}^0)$ такие, что $h(u_i) = u_i$, $h(x_i) = y_i$, $|x_i| = |y_i|$, $i \leq n$. Пусть e — фиксированное число, $1 \leq e \leq p$ и $\bar{x}^e = \left\langle x_1^e, \dots, x_{t_e}^e \right\rangle$, $\bar{y}^e = \left\langle y_1^e, \dots, y_{t_e}^e \right\rangle$ — атомы булевых алгебр $\mathfrak{A}_0(\bar{a}, \bar{p}^0)$, $\mathfrak{A}_0(\bar{a}, \bar{q}^0)$, лежащие под u_e. Покажем, что для каждого e выполнено $\bar{x}^e \sim \bar{y}^e$.

В дальнейшем индекс e будем опускать и t_e обозначим через n.

По лемме 22 можно считать, что если $|x_i| < \omega$, то $x_i = y_i$. Поэтому можно считать, что для любого i верно $|x_i| = \omega$. Допустим, что последовательность $\bar{x}$ не 1-равна $\bar{y}$. Предполагаем, что множество пар чисел упорядочено лексикографически. Положим $c_{ij} = x_i \wedge y_j$, $1 \leq i, j \leq n$. Пусть $\langle i, j \rangle$ — минимальная пара такая, что $|c_{ij}| > |c_{ji}|$ и $i < j$. Тогда $|c_{ji}| < \omega$. Так как $|y_i| = |x_i| = \omega$, то существует такое $s \in \omega$, что $|c_{si}| = \omega$.

Рассмотрим случай $s < j$.

Тогда $|c_{is}| = |c_{si}| = \omega$. Рассмотрим последовательность $\bar{x}_1 = [\bar{x}]_j^{c_{ij}}$. Так как $c_{is} \leq x_i \setminus c_{ij}$, то $|x_i \setminus c_{ij}| = \omega$. По лемме 19 будет $\bar{x}_1 \sim \bar{x}$. Пусть $\bar{x}_1 = \left\langle x_1^1, \dots, x_n^1 \right\rangle$. Теперь рассмотрим последовательность $\bar{x}_2 = [\bar{x}_1]_i^{x_j^1 \wedge y_i}$. Так как $x_j^1 \wedge y_i = [x_j \vee c_{ij}] \wedge y_i = c_{ji}$, то $\left| x_j^1 \wedge y_i \right| < \omega$. Отсюда по лемме 19 имеем $\bar{x}_1 \sim \bar{x}_2$.

Для последовательностей $\bar{x}_2$ и $\bar{y}$ пара $\langle i, j \rangle$ не является минимальной и $\left| x_m^2 \right| = |y_m|$ для любого $1 \leq m \leq n$.

Случай $s > j$ рассматривается аналогично.

Продолжая это построение, получим последовательность

$$\bar{x} \simeq \bar{x}_1 \simeq \dots \simeq \bar{x}_s = \bar{y}.$$

Аналогичные построения проводим для любого e, $1 \leq e \leq p$. Тогда приходим к последовательностям

$$\bar{x}^e = \bar{x}_0^e \simeq \bar{x}_1^e \simeq \dots \simeq \bar{x}_{s_e}^e = \bar{y}^e.$$

Пусть $s = \max\{s_e \mid 1 \leq e \leq p\}$. Положим $s_e \leq i \leq s$, $\bar{x}_i^e = \bar{y}^e$ для каждого e и i. Тогда получим последовательности

$$\bar{x}^e = \bar{x}_0^e \simeq \bar{x}_1^e \simeq \dots \simeq \bar{x}_s^e = \bar{y}^e.$$

Рассмотрим последовательности $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s$, где $\bar{x}_0 = \left\langle \bar{x}_0^e \mid 1 \leq e \leq p \right\rangle$, $\bar{x}_1 = \left\langle \bar{x}_1^e \mid 1 \leq e \leq p \right\rangle$, ..., $\bar{x}_s = \left\langle \bar{x}_s^e \mid 1 \leq e \leq p \right\rangle$.

Из построения следует, что $\bar{x}_0$, $\bar{x}_s$ — последовательности атомов алгебр $\mathfrak{A}_0(\bar{a},\bar{p}^0)$, $\mathfrak{A}_0(\bar{a},\bar{q}^0)$ соответственно, $h(\bar{x}_0)=\bar{x}_s$ и

$$\bar{x}_0 \simeq \bar{x}_1 \simeq \cdots \simeq \bar{x}_s. \tag{18}$$

Пусть $\bar{x}_i = \langle x^i_1,\ldots,x^i_n\rangle$. Пусть $p^0_k = \bigvee\limits_{j\in N_k} x^0_j$, где $N_k \subseteq \{1,\ldots,n\}$. Определим для всех $0<i\le s$ элементы

$$p^i_k = \bigvee_{j\in N_k} x^i_j.$$

Пусть $\bar{p}^0_i = \langle p^i_0,\ldots,p^i_{m-1}\rangle$. Тогда $\bar{p}^0_0=\bar{p}^0$. Поскольку h является изоморфизмом и $h(\bar{x}_0)=\bar{x}_s$, $h(\bar{p}^0)=\bar{q}^0$, то $\bar{p}^0_s=\bar{q}^0$.

Справедлива эквивалентность

$$\langle \mathfrak{A}_0,\bar{a},\bar{p}^0_i,\bar{p}^0_{i+1}\rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{A}_0,\bar{a},\bar{p}^0_{i+1},\bar{p}^0_i\rangle. \tag{19}$$

Пусть для алгебры $\mathfrak{A}$ выполнен случай (A). Определим $\bar{p}^1_i=\bar{p}^1$ для всех $i=0,\ldots,s$. Пусть последовательность $\bar{p}_i$, $i=0,\ldots,s$, получается из последовательностей $\bar{p}^0_i$, $\bar{p}^1_i$ так же, как перед леммой 12, и $\xi_i=\varkappa(\bar{p}_i)$. Легко заметить, что $\xi_0=\xi$ и $\xi_s=\eta$. Из леммы 12, следствия 15 и эквивалентности (19) вытекает

$$\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{A}),\bar{a},\xi_i,\xi_{i+1}\rangle \equiv_1 \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{A}),\bar{a},\xi_{i+1},\xi_i\rangle. \tag{20}$$

Отсюда и из условий на модель $\mathfrak{N}$ имеем $\psi_0(\xi_i,\xi_{i+1})$. Так как ψ_0 определяет конгруэнтность на модели $\mathfrak{N}$, то $\psi_0(\xi,\eta)$.

Пусть имеет место случай (B). Из условий леммы следует

$$\langle \mathfrak{A}_1,\bar{p}^1\rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{A}_1,\bar{q}^1\rangle. \tag{21}$$

Пусть $f_1,\ldots,f_r,g_1,\ldots,g_r$ — атомы алгебр $\mathfrak{A}_1(\bar{p}^1)$ и $\mathfrak{A}_1(\bar{q}^1)$, $f=\bigvee f_i$, $g=\bigvee g_i$. По следствию 14 существует изоморфизм $\varphi:\mathfrak{A}_1(\bar{p}^1)\to\mathfrak{A}_1(\bar{q}^1)$ такой, что $\varphi(\bar{p}^1)=\bar{q}^1$, $|f_i|=|g_i|$ и $\|f^\perp\|=\|g^\perp\|$. Подалгебра $(f\vee g)^\perp$ алгебры $\mathfrak{A}_1$ не конструктивизируема. По лемме 11 ширина алгебры $(f\vee g)^\perp$ неограниченна. Поэтому для любой конечной последовательности $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_r\rangle$, $|\alpha_i|\le\omega$, в алгебре $(f\vee g)^\perp$ существует последовательность $\langle\beta_1,\ldots,\beta_r\rangle$ такая, что $|\beta_i|=|\alpha_i|$, $\beta_i\wedge\beta_j=0$, $i\ne j$. Выберем последовательность так, что $|\beta_i|=|f_i|$. Отображение $g_0(f_i)=\beta_i$ можно продолжить до изоморфного вложения $g:\mathfrak{A}_1(\bar{p}^1)\to(f\vee g)^\perp$. Заметим, что $\|f^\perp\|=\|\beta^\perp\|$, где $\beta=\bigvee\beta_i$. Действительно, $\mathfrak{A}=\hat{a}\oplus\hat{f}\oplus f^\perp$. Следовательно, $f^\perp$ — неконструктивизируемая алгебра Ершова, и, значит $f^\perp$ бесконечна. $\mathfrak{A}=\hat{a}\oplus\widehat{f\vee g}\oplus\hat{\beta}\oplus\beta^\perp$. Аналогично $\beta^\perp$ бесконечна.

Пусть $\bar{h}\rightleftharpoons g(\bar{p}^1)$. Определим последовательности $\bar{p}^1_0=\bar{p}^1$, $\bar{p}^1_i=\bar{h}$, $i=1,\ldots,s$, $\bar{p}^0_{s+1}=\bar{p}^0_s$, $\bar{p}^1_{s+1}=\bar{q}^1$.

Справедлива эквивалентность

$$\langle \mathfrak{A}_1,\bar{p}^1_i,\bar{p}^1_{i+1}\rangle \equiv_1 \langle \mathfrak{A}_1,\bar{p}^1_{i+1},\bar{p}^1_i\rangle. \tag{22}$$

Так как $\bar{p}^0_s=\bar{p}^0_{s+1}$, эквивалентность (19) справедлива и для $i=s$.

Пусть $\bar{p}_i$ получена, как и в случае (A), из $\bar{p}^0_i$,$\bar{p}^1_i$ и $\xi_i=\varkappa(\bar{p}_i)$. Тогда $\xi_0=\xi$, $\xi_{s+1}=\eta$. Из эквивалентностей (19), (22), леммы 12 и следствия 15 вытекает

$$\langle \mathbb{HF}(\mathfrak{A}),\bar{a},\xi_i,\xi_{i+1}\rangle \equiv_1 \langle \mathbb{HF}(\mathfrak{A}),\bar{a},\xi_{i+1},\xi_i\rangle.$$

Отсюда аналогично случаю (A) получаем $\psi(\xi,\eta)$. $\square$

Из лемм B, 13–16, 23 вытекает утверждение теоремы. $\square$

Следствие 16. *Если L — линейный порядок, Σ-определимый в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ над счетной алгеброй Ершова $\mathfrak{A}$, то L конструктивизируем.*

Следствие 17. *Существуют такие системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, что $\mathfrak{A} \leq_T \mathfrak{B}$, но $\mathfrak{A}$ не Σ-сводима к $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ — неконструктивизируемая суператомная булева алгебра. Тогда по теореме 2 из [15] ее ординальный тип $o(\mathfrak{A})$ неконструктивен. Из справедливости релятивизации этой теоремы получаем, что $o(\mathfrak{B}) \leq_T \mathfrak{B}$. По следствию 20 $o(\mathfrak{B})$ не Σ-определим в $\mathbb{HF}(\mathfrak{B})$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
2. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.
3. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
4. *Ершов Ю. Л.* Σ-определимость в допустимых множествах // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 4. С. 792–795.
5. *Гончаров С. С.* Конструктивизируемость декартовых степеней моделей // 15-я Всесоюзн. алгебраич. конф., Красноярск: Красноярск. гос. университет, 1979. С. 40.
6. *Хисамиев А. Н.* Об определимости модели в наследственно конечном допустимом множестве // Обобщенная вычислимость и определимость. Новосибирск, 1998. С. 15–20. (Вычислительные системы; вып. 161).
7. *Khisamiev A. N.* Numbering and definability in the hereditary finite superstructure of a model // Siberian Adv. Math. 1997. V. 7, N 3. P. 63–74.
8. *Хисамиев А. Н.* Сильная Δ_1-определимость модели в допустимом множестве // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 191–200.
9. *Пузаренко В. Г.* О вычислимости над моделями разрешимых теорий // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 2. С. 170–197.
10. *Richter L. J.* Degrees of structures // J. Symbolic Logic. 1981. V. 46, N 4. P. 723–731.
11. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2.
12. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.
13. *Хисамиев А. Н.* О внутренней перечислимости линейных порядков // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 6. С. 741–751.
14. *Ромина А. В.* Определимость булевых алгебр в $\mathbb{HF}$-надстройках // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 6. С. 711–720.
15. *Гончаров С. С.* Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 1. С. 31–40.

Статья поступила 22 мая 2002 г.

Хисамиев Асылхан Назифович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
hisamiev@math.nsc.ru