Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 513.81

НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КЛАССА $C^{1,\beta}$ С АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕТРИКОЙ

Ю. Ф. Борисов

Аннотация: Доказано, что в классе $C^{1,\beta}$ при $\beta < 1/13$ возможно непрерывное изгибание аналитической выпуклой поверхности положительной гауссовой кривизны (соответственно плоскости) с потерей ограниченности внешней кривизны в смысле Погорелова. Указан способ замены условия $\beta < 1/13$ условием $\beta < 1/7$.

Ключевые слова: непрерывное изгибание, аналитическая поверхность, положительная гауссова кривизна, локальная выпуклость.

Введение

Пусть F — простая поверхность в трехмерном метризованном евклидовом пространстве E^3 (непустое связное множество, локально гомеоморфное плоскости) и любые точки $X, Y \in F$ соединимы на F спрямляемым путем (такую поверхность называем «метрически связной»). Если $\Gamma(X,Y)$ — множество указанных путей, то равенство $\rho_F(X,Y) = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma(X,Y)} s(\gamma)$, где $s(\gamma)$ — длина γ, задает «внутреннюю метрику» ρ_F поверхности F. При условии $F \in C^1$ (возможности локального задания F вектор-функциями $r \in C^1$, для которых всюду $r_u \times r_v \neq 0$) метрика ρ_F и первая квадратичная форма ds_F^2 поверхности F взаимно определяют друг друга. Поэтому понятие внутренней геометрии F, трактуемой как геометрия метрического пространства (F, ρ_F), распространяется на все метрически связные поверхности, в частности, на произвольные выпуклые поверхности, внутренняя геометрия которых полностью описана в классических работах А. Д. Александрова, см. [1]. Эти работы получили обобщение в теории «двумерных многообразий ограниченной кривизны», образующих естественное расширение класса двумерных C^2-римановых пространств, известным образом метризованных [2]. При замене геодезической кривизны кривой и римановой (гауссовой) кривизны двумерного пространства их интегральными аналогами («поворот кривой» и «кривизна множества») все понятия римановой геометрии в многообразиях ограниченной кривизны определяются через метрику без привлечения локальных координат. Такая геометризация понятий оказалась плодотворной при решении задач «геометрии в целом» [1, 3].

С точки зрения внутренней геометрии многообразиями ограниченной кривизны наряду с выпуклыми поверхностями являются введенные и детально изученные А. В. Погореловым поверхности $F \in C^1$ «ограниченной внешней кривизны», для которых суммы площадей сферических изображений попарно не пересекающихся компактных множеств локально ограничены [4]. В обоих случаях верна теорема о равенстве кривизны множества и «ориентированной площади» его сферического изображения (для выпуклых поверхностей речь идет о площади сферического изображения, определяемого внешними нормалями к опорным плоскостям).

Таким образом, «внешне-геометрические» условия выпуклости или ограниченности внешней кривизны поверхности гарантируют наличие у нее «достаточно хорошей» внутренней геометрии и совпадение внутренней и внешней кривизн. Кроме того, из теорем Погорелова о регулярности выпуклых поверхностей с регулярной внутренней метрикой и обобщения его теорем о поверхностях ограниченной внешней кривизны [5] вытекает, что при указанных ограничениях на внешнюю геометрию поверхности достаточная регулярность ее внутренней метрики и положительность гауссовой кривизны обеспечивают сколь угодно высокую регулярность самой поверхности.

Естественно возник вопрос: влечет ли ограниченность внутренней кривизны поверхности $F \in C^1$ ограниченность ее внешней кривизны? Ответ оказался отрицательным даже при условиях аналитичности внутренней метрики и положительности гауссовой кривизны: в противном случае ввиду теорем Погорелова поверхность $F \in C^1$, изометричная сфере, сама была бы сферой того же радиуса, тогда как с помощью конструкции Нэша — Кейпера [6, 7] ее можно сделать сколь угодно малой.

Вместе с тем в начале 50-х годов при попытках положительного решения указанного вопроса автором было обнаружено, что для сохранения длин векторов в процессе параллельного переноса по Леви-Чивита вдоль кривых на поверхности $F \in C^1$ и равностепенной сходимости такого процесса на всяком множестве путей ограниченной длины, проходящих в области с компактным замыканием, условие $F \in C^{1,\beta}$, известным образом усиливающее условие $F \in C^1$, необходимо при $\beta = 1/2$ и достаточно при $\beta > 1/2$. При этом в случае $\beta > 1/2$ параллельный перенос принадлежит внутренней геометрии F, позволяя определить для широкого класса множеств кривизну и установить ее связь со сферическим отображением поверхности [8, 9]. Это послужило основанием следующей гипотезы: если $F \in C^1$ и (F, ρ_F) — многообразие ограниченной знакопостоянной кривизны, то из условия $F \in C^{1,\beta}$ ограниченность внешней кривизны F следует при $\beta > 1/2$ и не следует при $\beta \leq 1/2$ даже в случае аналитичности ρ_F и положительности гауссовой кривизны. Первое утверждение удалось доказать при замене условия $\beta > 1/2$ условием $\beta > 2/3$ [10], замененным равенством $\beta = 2/3$ в неопубликованной работе С. З. Шефеля. Тем самым установлено, что при изгибании регулярной поверхности положительной кривизны в классе C^1 с потерей ограниченности внешней кривизны (каковы, например, упомянутые уже «кейперовские» изгибания сферы) «степень гладкости» поверхности, оцениваемая показателем β в условии $F \in C^{1,\beta}$, уменьшается скачкообразно и получена нижняя оценка скачка. Верхняя оценка такого скачка установлена в настоящей работе: по теореме 2 (§ 2) в классе $C^{1,\beta}$ при $\beta < 1/13$ возможно изгибание (и притом непрерывное) аналитической поверхности положительной гауссовой кривизны с потерей локальной выпуклости, а тем самым и ограниченности внешней кривизны. Этот результат дополнен теоремой 3 (§ 2) об аналогичном изгибании плоскости в поверхности, не содержащие прямых. Такие поверхности также не имеют ограниченной внешней кривизны. В основе обеих теорем лежит «деформационная теорема» (§ 1, теорема 1), доказательство которой занимает подавляющую часть работы. В конце § 1 указан способ усиления этой теоремы при сохранении схемы доказательства, позволяющий заменить в теоремах 2 и 3 условие $\beta < 1/13$ условием $\beta < 1/7$.

В заключение заметим, что условие $f \in C^{1,\beta}$ равносильно локальной принадлежности F фигурирующему в теоремах 1–3 классу $L^{1,\beta}$ поверхностей, единичные нормали которых при подходящем $K > 0$ удовлетворяют неравенству $|n(M_2) - n(M_1)| \le K\rho_F^{\beta}(M_1, M_2)$, делающему геометрически прозрачной оценку степени гладкости поверхности $F \in C^{1,\beta}$ показателем Гёльдера β.

§ 1. Деформационная теорема

Пусть $\mathbb{V}^3$, $\mathbb{E}^3$ — векторное и точечное евклидовы пространства (трехмерные и метризованные), H либо $\mathbb{R}^2$, либо круг $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < R^2, R > 0\}$, функция $r : H \to \mathbb{V}^3$ удовлетворяет условиям:

1) $r_u \times r_v \ne 0$;

2) $|r_u|$, $|r_v| \ge C_1$, $\left|\frac{\partial^{p+q} r_u}{\partial u^p \partial v^q}\right| \left|\frac{\partial^{p+q} r_v}{\partial u^p \partial v^q}\right| \le \frac{C_2 p! q!}{\gamma^{p+q}}$ при всех $p \ge 0$, $q \ge 0$, $C_1, C_2, \gamma > 0$ — постоянные;

3) для любых $(u_1, v_1), (u_2 v_2) \in H$

$$|r(u_2, v_2) - r(u_1, v_1)| \ge A\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2},$$

где $A > 0$ — постоянная.

Класс поверхностей $F \subset \mathbb{E}^3$, задаваемых вектор-функциями указанного вида, обозначаем через $\mathscr{A}$. Наряду с $\mathscr{A}$ рассматривается класс $L^{1,1/13-\eta}$, $0 < \eta < 1/13$, поверхностей $F \subset \mathbb{E}^3$, подчиненных условиям:

1) существует гомеоморфизм H на F, задаваемый вектор-функцией $r : H \to \mathbb{V}^3$ такой, что $r \in C^1$ и $r_u \times r_v \ne 0$;

2) непрерывное поле $n : F \to \mathbb{V}^3$ единичных нормалей к F (определенное с точностью до замены на $-n$) таково, что $|n(M_2) - n(M_1)| \le K s_{M_1 M_2}^{1/13-\eta}$ для любых $M_1, M_2 \in F$, где $s_{M_1 M_2}$ — расстояние между M_1, M_2 на F, $K > 0$ — постоянная.

Без уменьшения общности считаем, что $C_1 \le 1$, $C_2 \ge 1$ в определении класса $\mathscr{A}$.

Линейный элемент поверхности F, параметризованной функцией $r : H \to \mathbb{V}^3$, $r \in C^1$ (т. е. квадратичную форму $(r_u^2)\,du^2 + 2(r_u r_v)\,du dv + (r_v^2)\,dv^2)$, обозначаем через ds_F^2.

Условие $r_u \times r_v \ne 0$, равносильное положительности ds_F^2, заранее не предполагается.

Теорема 1. *Пусть функция $r : H \to \mathbb{V}^3$, задающая поверхность $F \in \mathscr{A}$, подчинена условиям:*

$$\max\left\{\frac{r_u^2}{r_v^2}, \frac{r_v^2}{r_u^2}\right\} \le 1 + \varepsilon, \quad \frac{|r_u r_v|}{|r_u|\,|r_v|} \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — постоянная, постоянные векторы $(a_1, a_2, a_3) = a$, $(b_1, b_2, b_3) = b$, $(c_1, c_2, c_3) = c$ некомпланарны, квадратичные формы $f_1 = a_1 x^2 + 2a_2 xy + a_3 y^2$, $f_2 = b_1 x^2 + 2b_2 xy + b_3 y^2$, $f_3 = c_1 x^2 + 2c_2 xy + c_3 y^2$ положительны,

$$f = m_{11} x^2 + 2m_{12} xy + m_{22} y^2 = \chi_1(u,v) f_1 + \chi_2(u,v) f_2 + \chi_3(u,v) f_3,$$

где функции $\chi_i : H \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, таковы, что $1 \le \chi_i(u,v) \le 2$; $\left|\frac{\partial^{p+q}\chi_i}{\partial u^p \partial v^q}\right| \le \frac{p!q!}{\gamma^{p+q}}$ при $p + q > 0$ (γ — число из определения класса $\mathscr{A}$), числа Q_1, η подчинены неравенствам $Q_1 > 0$, $0 < \eta < 1/13$.

Тогда при подходящем значении ε, зависящем только от η, f_1, f_2, f_3 и чисел C_1, C_2 из определения класса $\mathscr{A}$, существуют $\alpha^{(0)} \le 1$, $0 < \alpha^{(0)} \le \gamma$, и семейство функций $r_\alpha^* : H \to \mathbb{V}^3$, $\alpha \in [0, \alpha^{(0)}]$, удовлетворяющие условиям:

1) $r_0^* = r$, при всяком α функция r_α^* принадлежит $C^{1,1/13-\eta}$, $\frac{\partial r_\alpha^*}{\partial u} \times \frac{\partial r_\alpha^*}{\partial v} \neq 0$, r_α^* задает поверхность $F_\alpha^* \in L^{1,1/13-\eta}$, причем постоянная K из определения класса $L^{1,1/13-\eta}$ не зависит от α,

$$ds^2_{F_\alpha^*} = ds^2_F + \frac{1}{2}\alpha^2(m_{11}\,du^2 + 2m_{12}\,dudv + m_{22}\,dv^2),$$

$$\left|r_\alpha^* - r\right| < \frac{3\alpha^2}{Q_1}, \quad \left|\frac{\partial r_\alpha^*}{\partial u} - r_u\right|, \quad \left|\frac{\partial r_\alpha^*}{\partial v} - r_v\right| < 48C\alpha;$$

2) функции $r_\alpha^*, \eta_\alpha^*$, $\frac{\partial r_\alpha^*}{\partial u}$, $\frac{\partial r_\alpha^*}{\partial v}$, $n_\alpha^* = \frac{\frac{\partial r_\alpha^x}{\partial u} \times \frac{\partial r_\alpha^*}{\partial v}}{\left|\frac{\partial r_\alpha^*}{\partial u} \times \frac{\partial r_\alpha^*}{\partial v}\right|}$ равностепенно непрерывны по α.

Кроме того, для любого $\delta > 0$ существует постоянная $\alpha^* > 0$, зависящая только от δ, C_1, C_2, f_1, f_2, f_3 и такая, что при $\alpha^{(0)} \leq \alpha^*$ для всех $\alpha \in [0, \alpha^{(0)}]$ выполнено неравенство $\left|n_\alpha^* - n\right| \leq \delta$.

Доказательство. 1°. По ходу дела будут введены постоянные $P \geq 1$ (в п. 2°), $\mathscr{E}$, $C \geq 1$ (в п. 4°) и $C^* \geq 1$ (в п. 5°), зависящие только от f_1, f_2, f_3, C_1, C_2. Пусть $\eta_1 = \frac{169\eta}{1-13\eta}$, r — наименьшее из чисел таких, что $r \geq 1$ и

$$2^{\frac{r,r}{12}} \geq \max\left\{\frac{3 \cdot 2^{29}\sqrt{6}CC_2\mathscr{E}}{C_1}, 3C^*P\right\}, \tag{$*$}$$

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{30}, \frac{\sqrt{3}C_1^2}{40C_2^2}, \frac{1}{2^{(2+\eta_1/12)r}}\right\}. \tag{$**$}$$

Очевидно, ε зависит лишь от η, f_1, f_2, f_3, C_1 и C_2. Число $\alpha^{(0)}$ подчиним ряду дополнительных условий малости, вводимых по мере надобности. Зафиксируем $\alpha \in [0, \alpha^{(0)}]$, и пусть $r_0^* = r$, так что $F_0^* = F$. При $\alpha > 0$ функция r_α^* — предел некоторой последовательности аналитических функций, $r^{(-1)} = r^{(0)} = r$. Существуют и однозначно определены такие α_k, $k = 1, 2, \ldots$, что

$$\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k}{2^r}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \alpha^2.$$

Положим $T_0 = 0$, $T_n = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2$ при $n \geq 1$, $\alpha_0 = \alpha_1$. Для $r^{(n)}$ и F_n при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ будут соблюдены три условия.

1. Имеет место равенство

$$ds^2_{F_n} = ds^2_F + T_n(m_{11}\,du^2 + 2m_{12}\,dudv + m_{22}\,dv) + \frac{\alpha_{n+1}^2}{P}\big(m_{11}^{(n)}\,du^2 + 2m_{12}^{(n)}\,dudv + m_{22}^{(n)}\,dv^2\big),$$

и при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$ выполнена оценка

$$\left|\frac{\partial^{s+t} m_{ij}^{(n)}}{\partial u^s \partial v^t}\right| \leq \frac{a_1^{s+t} 2^{(12+\eta_1)rn(s+t)} s!t!}{\alpha_n^{s+t}},$$

где Q_1 — число из утверждения теоремы, без уменьшения общности подчиненное условию $Q_1 \geq \max\left\{\frac{C_2}{\gamma}, 3 \cdot 2^{27}C\right\}$.

2. При $s + t > 0$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^{s+t} r_u^{(n)}}{\partial u^s \partial v^t}\right|, \left|\frac{\partial^{s+t} r_v^{(n)}}{\partial u^s \partial v^t}\right| \leq \frac{\alpha_n Q_1^{s+t} 2^{(12+\eta_1)rn(s+t)} s!t!}{\alpha_n^{s+t}},$$

где Q_1 — число из утверждения теоремы, без уменьшения общности подчиненное условию $Q_1 \geq \max\left\{\frac{C_2}{\gamma}, 3 \cdot 2^{27} C\right\}$.

3. При всех n выполнены неравенства

$$\left|r^{(n)} - r^{(n-1)}\right| \leq \frac{6\alpha_n^2}{2^{2r} Q_1}, \quad \left|r_u^{(n)} - r_u^{(n-1)}\right|, \left|r_v^{n)} - r_v^{(n-1)}\right| \leq 24 C \alpha_n.$$

2°. Пусть определены все $r^{(k)}$, F_k, $k \leq n$, $n \geq 0$, и для них выполнены условия 1–3 из 1°.

Рассмотрим квадратичную форму

$$\tilde{f}_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_{n+1}^2 (m_{11}\, du^2 + 2m_{12}\, dudv + m_{22}\, dv^2) - \frac{\alpha_{n+1}^2}{P}$$
$$\times \left(m_{11}^{(n)}\, du^2 + 2m_{12}^{(n)}\, dudv + m_{22}^{(n)}\, dv^2\right) = \widetilde{m}_{11}^{(n+1)}\, du^2 + 2\widetilde{m}_{12}^{(n+1)}\, dudv + \widetilde{m}_{22}^{(n+1)}\, dv^2.$$

Ввиду формул для m_{ij}

$$\begin{aligned}
\widetilde{m}_{11}^{(n+1)} &= \frac{1}{2}\alpha_{n+1}^2 \left(a_1\chi_1 + b_1\chi_2 + c_1\chi_3 - \frac{2m_{11}^{(n)}}{P}\right),\\
\widetilde{m}_{12}^{(n+1)} &= \frac{1}{2}\alpha_{n+1}^2 \left(a_2\chi_1 + b_2\chi_2 + c_2\chi_3 - \frac{2m_{12}^{(n)}}{P}\right),\\
\widetilde{m}_{22}^{(n+1)} &= \frac{1}{2}\alpha_{n+1}^2 \left(a_3\chi_1 + b_3\chi_2 + c_3\chi_3 - \frac{2m_{22}^{(n)}}{P}\right).
\end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $\widetilde{\chi}_i^{(n)}$ — коэффициент при r_i в разложении вектор-функции

$$\left(-\frac{2m_{11}^{(n)}}{P}, -\frac{2m_{12}^{(n)}}{P}, -\frac{2m_{22}^{(n)}}{P}\right)$$

по векторам $r_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $r_2 = (b_1, b_2, b_3)$, $r_3 = (c_1, c_2, c_3)$. Полагая $\approx{\chi}_i^{(n)} = \chi_i + \widetilde{\chi}_i^{(n)}$, получим

$$\left(\widetilde{m}_{11}^{n+1}, \widetilde{m}_{12}^{n+1}, \widetilde{m}_{22}^{n+1}\right) = \frac{1}{2}\alpha_{n+1}^2 \left(\approx{\chi}_1^{(n)} r_1 + \approx{\chi}_2^{(n)} r_2 + \approx{\chi}_3^{(n)} r_3\right). \tag{2}$$

Функции $\widetilde{\chi}_i^{(n)}$ — линейные комбинации $\frac{2m_{11}^{(n)}}{P}, \frac{2m_{12}^{(n)}}{P}, \frac{2m_{22}^{(n)}}{P}$ с постоянными коэффициентами, зависящими только от r_1, r_2, r_3. Выберем P настолько большим, что

$$\frac{1}{2} \leq \approx{\chi}_i^{(n)} \leq 3, \tag{3}$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t} \approx{\chi}_i^{(n)}}{\partial u^s \partial v^t}\right| \leq \frac{2Q_1^{s+t} s!t! 2^{(12+\eta_1) rn(s+t)}}{\alpha_n^{s+t}} \quad \text{при } s + t > 0. \tag{4}$$

Такое P, зависящее лишь от квадратичных форм f_1, f_2, f_3, существует в силу предположений относительно Q_1, $m_{ij}^{(n)}$, χ_i и неравенств

$$\alpha_n \leq \alpha_1 < \alpha \leq \alpha_0^{(0)} < \gamma, \quad Q_1 \geq 3 \cdot 2^{27} C > 1.$$

Поскольку квадратичные формы f_1, f_2, f_3 положительны,

$$f_i = \varepsilon_{i1}^2 (A_i x + B_i y)^2 + \varepsilon_{i2}^2 (S_i x + D_i y)^2 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{5}$$

где ε_{i1}, $\varepsilon_{i2} > 0$, а матрицы $\begin{pmatrix} A_i & B_i \\ S_i & D_i \end{pmatrix}$ ортогональные.

Из (2) и (5) следует, что

$$\tilde{f}_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_{n+1}^2 \sum_{i=1}^{3} \overset{\approx}{\chi}_i^{(n)} f_i = \frac{1}{2}\alpha_{n+1}^2 \sum_{i=1}^{3} \overset{\approx}{\chi}_i^{(n)} \bigl[\varepsilon_{i1}^2 (A_i\,du + B_i\,dv)^2 + \varepsilon_{i2}(S_i\,du + D_i\,dv)^2\bigr]. \tag{6}$$

Переход от $r^{(n)}$ к $r^{(n+1)}$ состоит из шести шагов, на которых получаются функции $\rho_n^{(j)}$ (так что $\rho_n^{(6)} = r^{(n+1)}$). Кроме того, полагаем $r^{(n)} = \rho_n^{(0)} = \rho_n^{(-1)}$.

Пусть $j = 2(i-1)$, $i = 1, 2, 3$. Переходы от $\rho_n^{(j)}$ к $\rho_n^{(j+1)}$ и от $\rho_n^{(j+1)}$ к $\rho_n^{j+2)}$ определим в предположении, что $\bigl|\frac{\partial \rho_n^j}{\partial u} \times \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v}\bigr| > 0$ при $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ всюду на H (априорность такого предположения будет снята в п. 4°).

Введем координаты

$$u' = A_i u + B_i v, \quad v' = S_i u + D_i v. \tag{7}$$

Поскольку $\bigl|\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'} \times \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'}\bigr| > 0$ всюду, корректно следующее определение $\rho_n^{(j+1)}$ в координатах u', v':

$$\begin{aligned} \rho_n^{(j+1)} = \rho_n^{(j)} &- \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8\lambda_{n+1}^{(i,1)}} \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u' \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'} \\ &+ \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\lambda_{n+1}^{(i,1)}} \sin\biggl(\lambda_{n+1}^{(i,1)} u' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8} \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u'\biggr) \sqrt{\biggl(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\biggr)^2}\, m_n^{(j)}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1} = \varepsilon_{i1}\alpha_{n+1} \sqrt{\frac{\overset{\approx}{\chi}_i^{(n)}}{\bigl(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\bigr)^2}}, \tag{9}$$

$$\lambda_{n+1}^{(i,1)} = \frac{Q_2 \cdot 2^{(n + \frac{j+1}{6})(12+\eta_1)r}}{\alpha_{n+1}}, \tag{10}$$

$$m_n^{(j)} = \frac{\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'} \times \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'}}{\bigl|\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'} \times \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'}\bigr|}, \tag{11}$$

Q_2 ($1 \le Q_2 < Q_1$) — постоянная, которая будет выбрана позже. В дальнейшем в тех же координатах будет

$$\begin{aligned} \rho_n^{(j+2)} = \rho_n^{(j+1)} &- \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,2)^2}}{8\lambda_n^{(i,2)}} \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,2)} v' \frac{\partial \rho_n^{(j+1)}}{\partial v'} \\ &+ \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,2)}}{\lambda_{n+1}^{(i,2)}} \sin\biggl(\lambda_{n+1}^{(1,2)} v' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,2)2}}{8} \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,2)} v'\biggr) \sqrt{\biggl(\frac{\partial \rho_n^{(j+1)}}{\partial v'}\biggr)^2}\, m_n^{(j+1)}, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,2)} = \varepsilon_{1,2}\alpha_{n+1} \sqrt{\frac{\overset{\approx}{\chi}_i^{(n)}}{\bigl(\frac{\partial \rho_n^{(j+2)}}{\partial v'}\bigr)^2}}, \tag{13}$$

$$m_n^{(j+1)} = \frac{\frac{\partial \rho_n^{(j+1)}}{\partial u'} \times \frac{\partial \rho_n^{(j+1)}}{\partial v'}}{\bigl|\frac{\partial \rho_n^{(j+1)}}{\partial u'} \times \frac{\partial \rho_n^{(j+1)}}{\partial v'}\bigr|}, \quad \lambda_{n+1}^{(i,2)} = \frac{Q_2 \cdot 2^{(n + \frac{j+2}{6})(12+\eta_1)r}}{\alpha_{n+1}}. \tag{14}$$

Полагая $i = 1, 2, 3$, при сделанном предположении получим все функции $\rho_n^{(j)}$, в том числе и $\rho_n^{(6)} = r^{(n+1)}$.

3°. Будем опираться на следующие леммы, в которых $\varphi, f, f_1, f_2, \dots, f_l$ — вещественные функции, φ определена в области $G \subset \mathbb{R}$, а f, f_l — в выпуклой области $H \subset \mathbb{R}^2$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия:*

1) *всюду в G справедлива оценка $\left|\frac{d^k\varphi}{dz^k}\right| \le \frac{k!}{\rho^k}$, $k \ge 1$, где $\rho > 0$ — непрерывная функция от z;*

2) *при всех u, v имеют место соотношения $f(u,v) \in G$ и $\left|\frac{\partial^{p+q} f}{\partial u^p \partial v^q}\right| \le \frac{\mu p! q!}{\beta^{p+q}}$, где $p + q \ge 1$, а $\mu, \beta > 0$ — непрерывные функции u, v.*

Тогда для функции $\psi = \varphi(f)$ в точках, где $\mu \le 1$, при $m = \frac{\ln(\frac{4}{\rho}+3)}{\ln 2}$ справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^{p+q}\psi}{\partial u^p \partial v^q}\right| \le \frac{2^{m(p+q)}\mu p! q!}{\beta^{p+q}}, \quad p + q \ge 1.$$

Доказательство. Ввиду условия 2 и выпуклости H при (u_0, v_0), $(u, v) \in H$, где $|u - u_0| < \beta_0$, $|v - v_0| < \beta_0$, $\beta_0 = \beta(u_0, v_0)$, $\mu_0 = \mu(u_0, v_0) \le 1$, будет

$$f(u,v) = f(u_0,v_0) + \sum_{p+q\ge 1} \frac{1}{p!q!} \left(\frac{\partial^{p+q} f}{\partial u^p \partial v^q}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} (u-u_0)^p (v-v_0)^q \tag{15}$$

и ряд в правой части сходится абсолютно.

Рассмотрим ряд Тейлора для φ при $z = z_0 = f(u_0, v_0)$, абсолютно сходящийся к φ при $|z - z_0| < \rho_0 = \rho(z_0)$ ввиду условий 1 и 2:

$$\varphi(z) = \varphi(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k\varphi}{dz^k}\right) (z - z_0)^k. \tag{16}$$

Пусть $u = u_0 + \frac{\beta_0}{h}$, $v = v_0 + \frac{\beta_0}{h}$, где $h > 2$. По условию 2

$$\sum_{p+q\ge 1} \frac{1}{p!q!} \left|\frac{\partial^{p+q} f}{\partial u^p \partial v^q}\right|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} |u-u_0|^p |v-v_0|^q \le \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{h^k} < \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{h}\right)^k = \frac{2M}{h-2}. \tag{17}$$

Если $h = \frac{4}{\rho_0} + 3$, то $h - 2 > \frac{4}{\rho_0}$, $\frac{2\mu_0}{h-2} < \frac{\rho_0\mu_0}{2}$. Ввиду (15), (17) и неравенства $\mu_0 \le 1$ имеем

$$|f(u,v) - f(u_0,v_0)| < \frac{\rho_0\mu_0}{2} \le \frac{\rho_0}{2}.$$

Отсюда вытекает, что при подстановке ряда (15) в ряд (16) вместо z получим ряд, абсолютно сходящийся при указанных u, v к $\psi(u,v)$:

$$\psi(u,v) = \psi(u_0,v_0) + \sum_{p+q\ge 1} W_{pq} (u-u_0)^p (v-v_0)^q. \tag{18}$$

Сумма ряда $\sum\limits_{p+q\ge 1} |W_{pq}| \left(\frac{\beta_0}{h}\right)^{p+q}$, очевидно, не превосходит

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left|\frac{d^k\varphi}{dz^k}\right| \left(\frac{\rho_0\mu_0}{2}\right)^k \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_0}{2}\right)^k = \frac{\mu_0}{2-\mu_0} \le \mu_0.$$

Следовательно, $|W_{pq}|\bigl(\frac{\beta}{h}\bigr)^{p+q} < \mu_0$ при $p+q\ge 1$, откуда $|W_{pq}| < \frac{h^{p+q}\mu_0}{\beta^{p+q}}$. Поскольку

$$W_{pq}=\frac{1}{p!q!}\left(\frac{\partial^{p+q}\psi}{\partial u^p\partial v^q}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}},\quad h=\frac{4}{\rho_0}+3,$$

то

$$\left|\frac{\partial^{p+q}\psi}{\partial u^p\partial v^q}\right|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}\le\frac{\mu_0\bigl(\frac{4}{\rho_0}+3\bigr)^{p+q}p!q!}{\rho_0^{p+q}}=\frac{2^{m(p+q)}\mu_0p!q!}{\beta_0^{p+q}},$$

что и утверждалось.

Лемма 2. *Пусть* $\psi=f_1f_2,\dots,f_l$ *и*

$$\left|\frac{\partial^{p+q}f_1}{\partial u^p\partial v^q}\right|\le\frac{T_1p!q!}{\rho^{p+q}},\left|\frac{\partial^{p+q}f_2}{\partial u^p\partial v^q}\right|\le\frac{T_2p!q!}{\rho^{p+q}},\dots,\left|\frac{\partial^{p+q}f_l}{\partial u^p\partial v^q}\right|\le\frac{T_lp!q!}{\rho^{p+q}}$$

при всех $p\ge 0$, $q\ge 0$, *где* $T_1>0,\dots,T_l>0$, $\rho>0$ — *функции* u, v. *Тогда*

$$\left|\frac{\partial^{p+q}\psi}{\partial u^p\partial v^q}\right|\le\frac{T_1\dots T_l\cdot 2^{(l-1)(p+q)}p!q!}{\rho^{p+q}},\quad p\ge 0,\ q\ge 0.$$

Доказательство. Пусть сначала $l=2$. Имеем

$$\frac{\partial^{p+q}\psi}{\partial u^p\partial v^q}=\sum_{i=0}^{q}C_q^i\left(\sum_{k=0}^{p}C_p^k\frac{\partial^{k+i}f_1}{\partial u^k\partial v^i}\cdot\frac{\partial^{p-k+q-i}f_2}{\partial u^{p-k}\partial v^{q-i}}\right).$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial^{p+q}\psi}{\partial u^p\partial v^q}\right|\le T_1T_2\sum_{k=0}^{p}\sum_{i=0}^{q}\frac{p!}{k!(p-k)!}\cdot\frac{q!}{i!(q-i)!}\cdot\frac{k!i!}{\rho^{k+i}}\cdot\frac{(p-k)!(q-i)!}{\rho^{p+q-k-i}}$$
$$=T_1T_2\frac{(p+1)(q+1)p!q!}{\rho^{p+q}}\le\frac{T_1T_2\cdot 2^{p+q}p!q!}{\rho^{p+q}}.$$

Переход к случаю произвольного l получается с помощью очевидной индукции.

Лемма 3. *Пусть* $\psi=f_1f_2$ *и* $|f_1|\le T_1$, $|f_2|\le T_2$, *а при* $p+q>0$

$$\left|\frac{\partial^{p+q}f_1}{\partial u^p\partial v^q}\right|\le\frac{\omega T_1p!q!}{\rho^{p+q}},\quad\left|\frac{\partial^{p+q}f_2}{\partial u^p\partial v^q}\right|\le\frac{\omega T_2p!q!}{\rho^{p+q}},$$

где $1\ge\omega>0$, $T_1>0$, $T_2>0$, $\rho>0$ — *функции* u, v. *Тогда при* $p+q>0$

$$\left|\frac{\partial^{p+q}\psi}{\partial u^p\partial v^q}\right|\le\frac{\omega T_1T_2\cdot 2^{p+q}p!q!}{\rho^{p+q}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial^{p+q}\psi}{\partial u^p\partial v^q}=\sum_{i=0}^{q}\sum_{k=0}^{p}C_q^iC_p^k\frac{\partial^{k+i}f_1}{\partial u^k\partial v^i}\cdot\frac{\partial^{p-k+q-i}f_2}{\partial u^{p-k}\partial v^{q-i}}.$$

Если $p+q>0$, то ввиду условия $\omega\le 1$

$$\left|\frac{\partial^{k+i}f_i}{\partial u^k\partial v^i}\right|\left|\frac{\partial^{p-k+q-i}f_2}{\partial u^{p-k}\partial v^{k-i}}\right|\le\omega T_1T_2\frac{k!i!}{\rho^{k+1}}\cdot\frac{(p-k)!(q-i)!}{\rho^{p+q-k-i}}$$

и

$$\left|\frac{\partial^{p+q}\psi}{\partial u^p\partial v^q}\right|\le\omega T_1T_2\sum_{i=0}^{q}\sum_{k=0}^{p}\frac{q!}{i!(q-i)!}\cdot\frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{k!i!(p-k)!(q-i)!}{\rho^{p+q}}$$
$$=\omega T_1T_2\frac{(p+1)(q+1)p!q!}{\rho^{p+q}}\le\frac{\omega T_1T_2\cdot 2^{p+q}p!q!}{\rho^{p+q}}.$$

Лемма 4. *Пусть $f(u,v)$ — аналитическая функция, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ u & v \end{pmatrix}$ — ортогональная матрица, функция $\varphi : H \to \mathbb{R}$ задана формулой*

$$\varphi(u,v) = f[\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v].$$

Тогда при $p+q>0$ и произвольных u_0, v_0

$$\left|\left(\frac{\partial^{p+q}\varphi}{\partial u^p \partial v^q}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}\right| \le 4^{p+q} p! q! \max\left\{\left|\left(\frac{\partial^{s+t} f}{\partial u^s \partial v^t}\right)_{\substack{u=\alpha u_0+\beta v_0\\ v=\gamma u_0+\delta v_0}}\right|\frac{1}{s!t!}\right\},$$

где max *берется по всем s, t, для которых $s+t=p+q$.*

Доказательство. Как известно, разложение φ по степеням $u-u_0$, $v-v_0$ при достаточно малых $|u-u_0|$, $|v-v_0|$ можно получить, полагая

$$x = \alpha(u-u_0) + \beta(v-v_0), \quad y = \gamma(u-v_0) + \delta(v-v_0)$$

в ряде

$$\varphi(u_0,v_0) + \sum_{s+t>0} \frac{1}{s!t!}\left(\frac{\partial^{s+t} f}{\partial u^s \partial v^t}\right)_{\substack{u=\alpha u_0+\beta v_0\\ v=\gamma u_0+\delta v_0}} x^s y^t. \tag{19}$$

Отсюда следует, что $\frac{1}{p!q!}\left(\frac{\partial^{p+q}\varphi}{\partial u^p \partial v^q}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}$ — коэффициент при $x^p y^q$ в полиноме

$$\sum_{s+t=p+q} \frac{1}{s!t!}\left(\frac{\partial^{s+t} f}{\partial u^s \partial v^t}\right)_{\substack{u=\alpha u_0+\beta v_0\\ v=\gamma u_0+\delta v_0}} (\alpha x+\beta y)^s(\gamma x+\delta y)^t. \tag{20}$$

Поскольку $|\alpha|,|\beta|,|\gamma|,|\delta| \le 1$, коэффициент при $x^p y^q$ в $(\alpha x+\beta y)^s(yx+\delta y)^t$ по модулю не превосходит C^p_{p+q}, а так как число слагаемых в (20) равно $p+q+1$, то

$$\left|\frac{1}{p!q!}\left(\frac{\partial^{p+q}\varphi}{\partial u^p \partial v^q}\right)_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}\right| \le (p+q+1)C^p_{p+q} \max\left|\frac{1}{s!t!}\left(\frac{\partial^{s+t} f}{\partial u^s \partial v^t}\right)_{\substack{u=\alpha u_0+\beta v_0\\ v=\gamma u_0+\delta v_0}}\right|.$$

Поскольку $p+q+1 \le 2^{p+q}$, $C^p_{p+q} \le 2^{p+q}$, лемма доказана.

4°**.** Проверим выполнение условий 1–3 из 1° для поверхности F_{n+1}. В этом пункте будет проверено выполнение условий 2 и 3. Достаточно показать, что при всех j

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\right)}{\partial u^s \partial v^t}\right|, \left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right)}{\partial u^s \partial v^t}\right| \le \frac{\alpha_{n+1} Q_1^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \quad s+t>0, \tag{21}$$

$$\left|\rho_n^{(j)} - \rho_n^{j-1)}\right| \le \frac{\alpha_{n+1}^2}{Q_1 \cdot 2^{2r}}, \tag{22}$$

$$\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u} - \frac{\partial\rho_n^{(j-1)}}{\partial u}\right| \le 4C\alpha_{n+1}, \tag{23}$$

$$\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v} - \frac{\partial\rho_n^{(j-1)}}{\partial v}\right| \le 4C\alpha_{n+1}. \tag{24}$$

По предположению индукции неравенства (21)–(24) верны при $j=0$. Поэтому достаточно вывести их для $j+1$, $j+2$, где $j \le 2(i-1)$, $i \in \{1,2,3\}$, в предположении, что они верны при всех $j \le 2(i-1)$. Из этого предположения и свойства 3 функций $r^{(n)}$ при $k \le n$ следует, что

$$\left|\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u} - r_u\right|, \left|\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v} - r_v\right| \le 24C \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + 24C\alpha_1 \le 72C\alpha_1.$$

Из неравенств $C_1 \le |r_u|$, $|r_v| \le C_2$, $\frac{|r_u r_v|}{|r_u|\,|r_v|} \le \varepsilon \le 1/30$, легко вытекает, что при достаточной малости $\alpha^{(0)} > \alpha_1$ будет $\left|\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u} \times \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v}\right| \ge C_0 > 0$, где C_0 не зависит ни от n, ни от j. Поэтому, приняв такое требование малости $\alpha^{(0)}$, мы избавляемся от априорного условия при переходах от $\rho_n^{(j)}$ к $\rho_n^{(j+1)}$ и от $\rho_n^{(j+1)}$ к $\rho_n^{(j+2)}$, описанных в конце п. 2°. Поскольку $Q_1 \ge \frac{C_2}{\gamma}$ и $C_2 \ge 1$, функция $r^{(0)} = r$ обладает свойствами 2 и 3. Поэтому вывод (21)–(24) для $j+1$, $j+2$ из тех же неравенств для $j = 2(i-1)$, осуществленный в п. 4°, завершает построение последовательности функций с такими свойствами.

Замечая, что

$$\cos\left(\lambda_{n+1}^{(i,1)} u' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8} \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u'\right)$$
$$= \cos \lambda_{n+1}^{(i,1)} u' - 2\cos \lambda_{n+1}^{(i,1)} u' \sin^2\left(\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{16} \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u'\right)$$
$$+ \sin \lambda_{n+1}^{(i,1)} u' \sin\left(\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8} \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u'\right),$$

и полагая

$$\frac{-\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)} \cdot \frac{\partial \tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\partial u'}}{4\lambda_{n+1}^{(i,1)}} \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u' \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'} = a_1^{n,j+1}, \qquad -\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{4} \cos 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u' \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'} = a_2^{n,j+1},$$

$$-\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8\lambda_{n+1}^{(i,1)}} \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u' \frac{\partial^2 \rho_n^{(j)}}{\partial u'^2} = a_3^{n,j+1},$$

$$\frac{\frac{\partial \tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\partial u'}}{\lambda_{n+1}^{(i,1)}} \sin\left(\lambda_{n+1}^{(i,1)} u' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8} \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u'\right) \sqrt{\left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}\, m_n^{(j)} = a_4^{n,j+1},$$

$$\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)} \cos \lambda_{n+1}^{(i,1)} u' \sqrt{\left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}\, m_n^{(j)} = a_5^{n,j+1},$$

$$-2\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)} \cos \lambda_{n+1}^{(i,1)} u' \sin^2\left(\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{16} \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u'\right) \sqrt{\left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}\, m_n^{(j)} = a_6^{n,j+1},$$

$$\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)} \sin \lambda_{n+1}^{(i,1)} u' \sin\left(\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8} \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u'\right) \sqrt{\left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}\, m_n^{(j)} = a_7^{n,j+1},$$

$$-\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2} \frac{\partial \tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\partial u'}}{4\lambda_{n+1}^{(i,1)}} \cos\left(\lambda_{n+1}^{(i,1)} u' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8} \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u'\right) \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u' \sqrt{\left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}\, m_n^{(j)} = a_8^{n,j+1},$$

$$-\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^3}}{4}\cos\left(\lambda_{n+1}^{(i,1)}u' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'\right)\cos 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}m_n^{(j)} = a_9^{n,j+1},$$

$$\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\lambda_{n+1}^{(i,1)}}\sin\left(\lambda_{n+1}^{(i,1)}u' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'\right)\frac{\partial\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}}{\partial u'}m_n^{(j)} = a_{10}^{n,j+1},$$

$$\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\lambda_{n+1}^{i,1}}\sin\left(\lambda_{n+1}^{(i,1)}u' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'\right)\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}\frac{\partial m_n^{(j)}}{\partial u'} = a_{11}^{n,j+1};$$

$$-\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{4}\frac{\frac{\partial\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\partial v'}}{\lambda_{n+1}^{(i,1)}}\sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'} = b_1^{n,j+1}, \quad -\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8\lambda_{n+1}^{(i,1)}}\sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'\frac{\partial^2\rho_n^{(j)}}{\partial u'\partial v'} = b_2^{n,j+1},$$

$$\frac{\frac{\partial\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\partial v'}}{\lambda_{n+1}^{(i,1)}}\sin\left(\lambda_{n+1}^{(i,1)}u' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'\right)\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}m_n^{(j)} = b_3^{n,j+1},$$

$$\frac{-\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{4}\frac{\frac{\partial\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\partial v'}}{\lambda_{n+1}^{(i,1)}}\cos\left(\lambda_{n+1}^{(i,1)}u' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'\right)\sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}m_n^{(j)} = b_4^{n,j+1},$$

$$\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\lambda_{n+1}^{(i,1)}}\sin\left(\lambda_{n+1}^{(i,1)}u' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'\right)\frac{\partial\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}}{\partial v'}m_n^{(j)} = b_5^{n,j+1},$$

$$\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\lambda_{n+1}^{(i,1)}}\sin\left(\lambda_{n+1}^{(i,1)}u' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'\right)\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}\frac{\partial m_n^{(j)}}{\partial v'} = b_6^{n,j+1},$$

из (8) и (12) (см. п. 2°) выводим

$$\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial u'} = \frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'} + \sum_{l=1}^{11} a_l^{n,j+1}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial v'} = \frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'} + \sum_{l=1}^{6} b_l^{n,j+1}. \tag{26}$$

Опираясь на леммы из п. 3°, оценим производные вектор-функций $a_l^{n,j+1}$, $b_l^{n,j+1}$ по u', v'. Из леммы 4 и неравенства (21) при $s+t>0$ вытекает оценка

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)_x}{\partial u'^s\partial v'^t}\right|, \left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)_x}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \le \frac{2\alpha_{n+1}(4Q_1)^{s+t}\cdot 2^{12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}} \tag{27}$$

(a_x — координата a по оси x). (Мы воспользовались тем, что

$$\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'} = \frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u'}, \quad \frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'} = \frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v'},$$

где $\frac{\partial u}{\partial u'}$, $\frac{\partial v}{\partial u'}$, $\frac{\partial u}{\partial v'}$, $\frac{\partial v}{\partial v'}$ — постоянные, образующие ортогональную матрицу.) Ввиду (27) при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\big(\frac{\partial^2 \rho_n^{(j)}}{\partial u'^2}\big)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| = \left|\frac{\partial^{s+t+1}\big(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\big)_x}{\partial u'^{s+1} \partial v'^t}\right|$$
$$\leq \frac{8\alpha_{n+1} Q_1 \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)} \cdot (4Q_1)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)} s!t!(s+1)}{\alpha_{n+1} \cdot \alpha_{n+1}^{s+t}}$$
$$\leq \frac{8Q_1 \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)}}{\alpha_{n+1}} \cdot \frac{\alpha_{n+1} \cdot (8Q_1)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}.$$

Такую же оценку получим для производных от $\big(\frac{\partial^2 \rho_n^{(j)}}{\partial u' \partial v'}\big)_x$. В результате при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$ будет

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\big(\frac{\partial^2 \rho_n^{(j)}}{\partial u'^2}\big)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right|, \left|\frac{\partial^{s+t}\big(\frac{\partial^2 \rho_n^{(j)}}{\partial u' \partial v'}\big)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right|$$
$$\leq \frac{8Q_1 \cdot 2^{12+\eta_1)r(n+j/6)} (8Q_1)^{s+t} \cdot 2^{12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \quad (28)$$

Оценим сверху и снизу $\big|\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\big|$, $\big|\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'}\big|$, $\big|\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'} \times \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'}\big|$. Как уже установлено,

$$\left|\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u} - r_u\right| \leq \alpha_1 \cdot 72C. \quad (29)$$

Точно так же

$$\left|\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v} - r_v\right| \leq \alpha_1 \cdot 72C. \quad (30)$$

Согласно (29), (30)

$$|r_u| - 72C\alpha_1 \leq \left|\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u}\right| \leq |r_u| + 72C\alpha_1, \quad (31)$$

$$|r_v| - 72C\alpha_1 \leq \left|\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v}\right| \leq |r_v| + 72C\alpha_1, \quad (32)$$

а углы φ_1, φ_2 между r_u и $\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u}$, r_v и $\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v}$ таковы, что

$$\sin\varphi_1 \leq \frac{72C\alpha_1}{\big|r_u^{(0)}\big|} \leq \frac{72C\alpha_1}{C_1}, \quad (33)$$

$$\sin\varphi_2 \leq \frac{72C\alpha_1}{\big|r_v^{(0)}\big|} \leq \frac{72C\alpha_1}{C_1} \quad (34)$$

(учтены оценки $|r_u|, |r_v| \geq C_1$ из определения класса $\mathscr{A}$).

Пусть $\alpha^{(0)}$ столь мало, что

$$\frac{72C\alpha^{(0)}}{C_1} \leq \varepsilon, \quad \left|\varphi - \frac{\pi}{2}\right| \leq 2\arcsin\varepsilon, \quad (35)$$

где φ — угол между $\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u}$, $\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v}$. Выполнимость второго условия вытекает из (33), (34) и неравенства $\frac{|r_u r_v|}{|r_u|\,|r_v|} \leq \varepsilon$.

Имеем

$$\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'} = \frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u'}, \quad \frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'} = \frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v'},$$

$$\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2 = \left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2 + 2\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial u'} + \left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2, \tag{36}$$

$$\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}=\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\right)^2\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'}+\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'}+\frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'}\right)+\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right)^2\frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'},$$

$$\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)^2 = \left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right)^2 + 2\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial v}{\partial v'} + \left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial v'}\right)^2. \tag{37}$$

Ввиду (35) и неравенств $0 < \varepsilon \le \frac{1}{30}$ имеем

$$\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right| = 2\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\right|\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right|\varepsilon', \ldots, \tag{38}$$

где $0 \le \varepsilon' < \varepsilon$, $\frac{72C\alpha_1}{|r_u|}$, $\frac{72C\alpha_1}{|r_v|} < \varepsilon$. Поэтому

$$(1-\varepsilon)|r_u| < \left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\right| < (1+\varepsilon)|r_u|, \tag{39}$$

$$(1-\varepsilon)|r_v| < \left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right| < (1+\varepsilon)|r_v|, \tag{40}$$

$$\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right| \le 2\varepsilon(1+\varepsilon)^2|r_u|\,|r_v|. \tag{41}$$

Учитывая, что по условию теоремы $\frac{1}{1+\varepsilon} \le \frac{|r_v^{(0)}|^2}{|r_u^{(0)}|^2} \le 1+\varepsilon$ и тем самым

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \le \frac{\left|r_v^{(0)}\right|}{\left|r_u^{(0)}\right|} \le \sqrt{1+\varepsilon}, \tag{42}$$

из ортогональности матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}$ и равенств (37) выводим

$$\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2 \le (1+7\varepsilon+13\varepsilon^2+9\varepsilon^3+2\varepsilon^4)|r_u|^2,$$

$$\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2 \le \left[\frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon} - 4\varepsilon(1+\varepsilon)^2\sqrt{1+\varepsilon}\right]|r_u|^2.$$

Поскольку $\varepsilon \le \frac{1}{30}$, отсюда следует, что

$$|r_u|(1-8\varepsilon) \le \left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right| \le |r_u|(1+8\varepsilon). \tag{43}$$

Аналогично

$$|r_v|(1-8\varepsilon) \le \left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right| \le |r_v|(1+8\varepsilon). \tag{44}$$

Ввиду оценок $|r_u|$, $|r_v|$

$$C_1(1-8\varepsilon) \le \left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right|, \left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right| \le C_2(1+8\varepsilon), \tag{45}$$

а согласно (37)

$$\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right| \le \left|\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\right)^2\right| + 2\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right|$$

(мы учли, что $\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} + \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} = 0$). Из (39), (40) видно, что

$$\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right)^2 \ge \left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\right)^2, \quad \left|\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\right)^2\right| \le |(1+\varepsilon)^2|r_v|^2 - (1-\varepsilon)^2|r_u|^2|.$$

Так как в силу (42) $(1+\varepsilon)^2\big|r_v^{(0)}\big|^2 \ge \big|r_u^{(0)}\big|^2(1+\varepsilon)^3$, то

$$|(1+\varepsilon)^2|r_v|^2 - (1-\varepsilon)^2|r_u|^2| \le [(1+\varepsilon)^2 - (1-\varepsilon)^2]|r_u|^2 = \varepsilon(5+2\varepsilon+\varepsilon^2)|r_u|^2.$$

При $\big(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\big)^2 \le \big(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\big)^2$ та же оценка с заменой $|r_u|$ на $|r_v|$. Ввиду (41) и (42)

$$\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right| \le 2\varepsilon(1+\varepsilon)^2\sqrt{1+\varepsilon}|r_u|^2.$$

В результате

$$\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right| \le [5\varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon^3 + 4\varepsilon(1+\varepsilon)^2\sqrt{1+\varepsilon}]|r_u|^2.$$

Так как $\varepsilon \le \frac{1}{30}$, то

$$\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right| \le 10\varepsilon|r_u|^2 \le 10\varepsilon C_2^2. \tag{46}$$

Если ψ — угол между $\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}$, $\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}$, то ввиду (45), (46) $|\cos\psi| \le \frac{10\varepsilon C_2^2}{C_1^2(1-8\varepsilon)^2}$. Так как $\varepsilon < \frac{1}{30}$, то $(1-8\varepsilon)^2 > \frac{1}{2}$ и

$$|\cos\psi| \le \frac{20C_2^2}{C_1^2}\varepsilon. \tag{47}$$

Поскольку $\varepsilon \le \frac{\sqrt{3}}{40}\frac{C_1^2}{C_2^2}$ (п. 1°, (∗∗)), то

$$\sin\psi > \sqrt{1 - \frac{20^2C_2^4}{C_1^4}\varepsilon^2} \ge \frac{1}{2}. \tag{48}$$

Из (45) и неравенства $(1-8\varepsilon)^2 > \frac{1}{2}$ следует, что

$$\frac{C_1}{\sqrt{2}} \le \left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right|, \left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right| \le 2C_2. \tag{49}$$

В силу (48), (49)

$$\frac{C_1^2}{4} \le \left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'} \times \frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right| \le 4C_2^2. \tag{50}$$

Применяя лемму 4 к функции $\overset{\approx}{\chi}{}_i^{(n)}$ и пользуясь оценками (4), при $s+t>0$ получим

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\overset{\approx}{\chi}{}_i^{(n)}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \le \frac{2(4Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_n^{s+t}}. \tag{51}$$

Теперь будем оценивать производные по u', v' сомножителей, входящих в выражение вектор-функций $a_l^{n,j+1}$, $b_l^{n,j+1}$. Начнем с оценки производных вектор-функции $m_n^{(j)} = \frac{\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\times\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}}{\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\times\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right|}$. Если $(a)_x$ — координата вектор-функции a по оси x, то модули производных $(a)_x$ не превосходят модулей производных a,

$$\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\times\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)_x = g_1(u',v')+g_2(u',v'),$$

где g_1, g_2 с точностью до знака суть произведения координат $\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}$, $\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}$, производные которых по модулю оцениваются неравенствами (27), а модули самих функций — неравенствами (49). Применяя к g_1 лемму 3, можно положить

$$T_1 = T_2 = 2C_2, \quad \rho = \frac{\alpha_{n+1}}{4Q_1\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)}}, \quad \omega = \frac{2\alpha_{n+1}}{2C_2} = \frac{\alpha_{n+1}}{C_2}$$

($\omega>1$ в силу (35) и неравенств для C, C_1, C_2 и ε). В результате при $s+t>0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}g_1}{\partial'^s\partial v'^t}\right| \le \frac{4C_2\alpha_{n+1}(8Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}.$$

Такая же оценка справедлива для производных g_2, так что при $s+t>0$

$$\left|\frac{\partial\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\times\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)_x}{\partial'^s\partial v'^t}\right| \le \frac{8C_2\alpha_{n+1}(8Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \tag{52}$$

Оценим производные функции:

$$\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\times\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right|^2 = \left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\times\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)^2 = \sum_{l=1}^{3}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\times\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)_{x_l}^2.$$

Применяя лемму 3 к $\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\times\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)_{x_l}^2$ ввиду (50) можно положить $T_1=T_2=4C_2^2$, а вследствие (52) — $\rho = \frac{\alpha_{n+1}}{8Q_1\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+1/6)}}$, $\omega = \frac{8C_2\alpha_{n+1}}{4C_2^2} = \frac{2\alpha_{n+1}}{C_2}$, в силу (35) снова $\omega<1$.

По лемме 3 при $s+t>0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\times\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right|^2\right)}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \le \frac{96C_2^3\alpha_{n+1}(16Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \tag{53}$$

Оценим производные функции:

$$\frac{1}{\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\times\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\times\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)^2}} = \psi_1.$$

Пусть $f_1 = \left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\times\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)^2$, функция φ задана формулой $\varphi(z)=z^{-1/2}$. Тогда $\psi_1=\varphi(f_1)$.

Для оценки производных при $u' = u'_0$, $v' = v'_0$ заметим, что

$$\psi_1(u',v') = \frac{1}{\sqrt{\frac{f_1(u',v')}{f_1(u'_0,v'_0)} \cdot f_1(u'_0,v'_0)}} = \frac{1}{\sqrt{f_1(u'_0,v'_0)}}\varphi\left[\frac{f_1(u',v')}{f_1(u'_0,v'_0)}\right].$$

Применим лемму 1 к функции $\psi = \varphi(f)$, где $f = \frac{f_1}{f_1(u'_0,v'_0)}$. Поскольку

$$\frac{d^k\varphi}{dz^k} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)z^{-(1/2)-k},$$

в условии леммы 1 можно положить $\rho(z) = \begin{cases} z^{3/2} & \text{при } z \le 1, \\ 1 & \text{при } z > 1. \end{cases}$ Ввиду неравенства (50) всюду $f_1 \ge \frac{C_1^4}{16}$, $\frac{1}{f_1} \le \frac{16}{C_1^4}$. Считая $\alpha^{(0)}$ столь малым, что $\frac{96\cdot 16C_2^3\alpha_{n+1}}{C_1^4} \le 1$, можно в силу (53) положить $\mu = \frac{96\cdot 16C_2^3\alpha_{n+1}}{C_1^4}$, $\beta = \frac{\alpha_{n+1}}{16Q_1\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)}}$. Наконец, ввиду (50) при всех u', v' будет $f(u',v') > 0$. Поэтому условия леммы 1 для ψ, φ, f выполнены, при этом в рассматриваемой точке

$$u = u'_0,\ v' = v'_0, \quad z = \frac{f_1(u',v')}{f_1(u'_0,v'_0)} = 1, \quad \rho = 1.$$

Применяя к ψ лемму 1 и учитывая, что $\frac{1}{\sqrt{f_1(u'_0,v'_0)}} \le \frac{4}{C_1^2}$, при $s+t > 0$ получим

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(1/\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\cdot\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right|\right)}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \le \frac{2^{\frac{\ln 7}{\ln 2}(s+t)}\cdot 96\cdot 16C_2^3\alpha_{n+1}\cdot 4}{C_1^4\cdot C_1^2}\cdot\frac{(16Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}} \le \frac{96\cdot 64C_2^3\alpha_{n+1}}{C_1^6}\cdot\frac{(128Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \quad (54)$$

Кроме того, из (50) следует, что

$$\frac{1}{\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\times\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right|} \le \frac{4}{C_1^2}. \quad (55)$$

Имеем $\left(m_n^{(j)}\right)_x = f_1(u',v')f_2(u',v')$, где

$$f_1(u',v') = \left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\times\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)_x, \quad f_2(u',v') = \frac{1}{\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\cdot\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right|}.$$

Применяя к $\left(m_n^{(j)}\right)_x$ лемму 3, можно в силу неравенств (50), (55) положить $T_1 = 4C_2^2$, $T_2 = \frac{4}{C_1^2}$, после чего, введя очередное требование малости $\alpha^{(0)}$ и учтя (52), (54), положить

$$\omega = \max\left\{\frac{8C_2\alpha_{n+1}}{4C_2^2}, \frac{96\cdot 64\cdot C_2^3\alpha_{n+1}C_1^2}{C_1^6\cdot 4}\right\} = C_3\alpha_{n+1},$$

где $C_3 = \frac{3\cdot 2^9C_2^3}{C_1^4}$, $\rho = \frac{\alpha_{n+1}}{128Q_1\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)}}$. По лемме 3 при $s+t>0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(m_n^{(j)}\right)_x}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \le \frac{16C_2^2C_3\alpha_{n+1}}{C_1^2}\cdot\frac{(256Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \quad (56)$$

Имеем

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left[\frac{\partial\left(m_n^{(j)}\right)_x}{\partial u'}\right]}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| = \left|\frac{\partial^{s+t+1}\left(m_n^{(j)}\right)_x}{\partial u'^{s+1}\partial v'^t}\right|$$
$$\leq \frac{16C_2^2C_3\cdot 256Q_1\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)}}{C_1^2}\cdot\frac{(512Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}.$$

Такова же оценка для производных от $\frac{\partial(m_n^{(j)})_x}{\partial v'}$. В результате при всех $s\geq 0$, $t\geq 0$ будет

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial(m_n^{(j)})}{\partial u'}\right)_x}{\partial u'^s\partial v'^t}\right|, \left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial(m_n^{(j)})}{\partial v'}\right)_x}{\partial u'^s\partial v'^t}\right|$$
$$\leq \frac{Q_1 256\cdot 16C_2^2C_3\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)}}{C_1^2}\cdot\frac{(512Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \quad (57)$$

Для оценки производных $\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2$ заметим, что $\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2=\sum\limits_{l=1}^{3}\psi_l$, где $\psi_l=f_l^2$, а производные f_l подчиняются неравенству (27), при этом $|f_l|\leq 2C_2$ (см. (49)). Применяя к ψ_l лемму 3, можно положить $T_1=T_2=2C_2$,

$$\rho=\frac{\alpha_{n+1}}{4Q_1\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)}},\quad \omega=\frac{2\alpha_{n+1}}{2C_2}=\frac{\alpha_{n+1}}{C_2}$$

($\omega\leq 1$ ввиду малости α_0). Поэтому при $s+t>0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}{\partial u'^s\partial v'^t}\right|\leq 12C_2\alpha_{n+1}\cdot\frac{(8Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \quad (58)$$

Учитывая, что ввиду (49)

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}\leq\frac{2}{C_1^2}, \quad (59)$$

аналогично найдем, что при $s+t>0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}\right)}{\partial u'^s\partial v'^t}\right|\leq\frac{48C_2^2\alpha_{n+1}}{C_1^2}\cdot\frac{(64Q_1)^{(s+t)}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \quad (60)$$

а при $s\geq 0$, $t\geq 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}}{\partial u'}\right)}{\partial u'^s\partial v'^t}\right|, \left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)^2}}{\partial u'}\right)}{\partial u'^s\partial v'^t}\right|$$
$$\leq\frac{64\cdot 48C_2^2Q_1\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)}}{C_1^2}\cdot\frac{(128Q_1)^{(s+t)}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \quad (61)$$

Поскольку ввиду (59)

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}}\leq\frac{\sqrt{2}}{C_1}, \quad (62)$$

тем же способом получим, что при $s+t>0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(1/\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}\right)}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \leq \frac{48\cdot 2C_2^2\alpha_{n+1}}{C_1^4}\cdot\frac{(512Q_1)^{(s+t)}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \quad (63)$$

Оценим производные от $\sqrt{\approx{\chi}_i^{(n)}}$. Ввиду леммы 4 и неравенства (4) при $s+t>0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\sqrt{\approx{\chi}_i^{(n)}}}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \leq \frac{2\cdot(4Q_1)^{(s+t)}\cdot 2^{(12+\eta_1)rn(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \quad (64)$$

Имеем

$$2^{(12+\eta_1)rn(s+t)} = 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}\cdot 2^{-(2+\eta_1/6)jr(s+t)}, \quad \alpha_n = 2^r\alpha_{n+1}.$$

Учитывая, что в (64) $s+t>0$, получим

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\approx{\chi}_i^{(n)}}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \leq \frac{1}{2^r}\cdot\frac{2\cdot(4Q_1)^{(s+t)}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \quad (65)$$

Из (65) и леммы 1 нетрудно вывести, что при $s+t>0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\sqrt{\approx{\chi}_i^{(n)}}}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \leq \frac{1}{2^r}\cdot\frac{2\cdot(64Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \quad (66)$$

Оценим производные от

$$\sqrt{\frac{\approx{\chi}_i^{(n)}}{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}} = \sqrt{\approx{\chi}_i^{(n)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}}$$

с помощью леммы 3. Положим

$$\sqrt{\approx{\chi}_i^{(n)}} = f_1, \quad \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}} = f_2, \quad T_1 = \sqrt{3}, \quad T_2 = \frac{\sqrt{2}}{C_1},$$

$$\omega = \max\left\{\frac{2}{\sqrt{3}\cdot 2^r},\ \frac{48\cdot 2C_2^2\alpha_{n+1}\cdot C_1}{C_1^4\sqrt{2}}\right\}, \quad \rho = \frac{\alpha_{n+1}}{512Q_1\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)}}.$$

Считая $\alpha^{(0)}$ настолько малым, что $\frac{48\sqrt{2}C_2^2\alpha^{(0)}}{C_1^3} < \frac{2}{\sqrt{3}\cdot 2^r}$ (еще одно требование малости на $\alpha^{(0)}$, на этот раз зависящее от величины r), будем иметь $\omega = \frac{2}{\sqrt{3}\cdot 2^r} < 1$. Ввиду (3), (62) и леммы 3 при $s+t>0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\sqrt{\approx{\chi}_i^{(n)}/\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}\right)}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \leq \frac{2\sqrt{2}}{2^2C_1}\cdot\frac{(1024Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \quad (67)$$

Так как $\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)} = \varepsilon_{i,1}\alpha_{n+1}\sqrt{\approx{\chi}_i^{(n)}/\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2}$, при $s+t>0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \leq \frac{1}{2^r}\cdot\frac{2\sqrt{2}\varepsilon_{i1}\alpha_{n+1}}{C_1}\cdot\frac{(1024Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \quad (68)$$

Кроме того, из (3) и (62) следует, что

$$\left|\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}\right| \le \frac{\varepsilon_{i1}\sqrt{6}\alpha_{n+1}}{C_1}. \tag{69}$$

Из (68) получаем: при всех $s \ge 0$, $t \ge 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\partial u'}\right)}{\partial u'^s \partial v'^t}\right|, \left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\partial v'}\right)}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \le \frac{1}{2^r}\cdot\frac{1024Q_1 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)}}{C_1}\cdot\frac{2\sqrt{2}\varepsilon_{i1}(2048Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \tag{70}$$

Будем оценивать производные от функций $\left(a_l^{n,j+1}\right)_x$, $\left(b_l^{n,j+1}\right)_x$, где x — произвольная координатная ось. Каждая из этих функций является произведением функций, для которых оценки производных либо уже получены, либо получаются непосредственно. Поэтому каждая из нужных нам оценок выводится с помощью леммы 2. Обозначения $f_1, \dots, f_l$, $T_1, \dots, T_l$, ρ имеют смысл, указанный в лемме 2. Имеем $\left(a_1^{n,j+1}\right)_x = f_1, f_2, f_3, f_4$, где

$$f_1 = -\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{4\lambda_{n+1}^{(i,1)}}, \quad f_2 = \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\partial u'}, \quad f_3 = \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u', \quad f_4 = \left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)_x.$$

Ввиду (10) и неравенств $Q_1 \ge 1$, $\alpha_{n+1} < \alpha \le \alpha^{(0)} \le 1$ при всех $s \ge 0$, $t \ge 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'\right)}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \le 2^s\left(\lambda_{n+1}^{(i,1)}\right)^s = \frac{(2Q_2)^s\cdot 2^{(n+(j+1)/6)(12+\eta_1)rs}}{\alpha_{n+1}^s} \le \frac{(2Q_2)^{s+t}2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \tag{71}$$

Вводя условие $2^{\eta_1 r/12}Q_2 > Q_1$, согласно (10), (27), (49), (68)–(71) и неравенствам $\alpha_{n+1} < 1 \le C_2$, $r > 1$, можно положить

$$T_1 = \frac{\varepsilon_{i1}\alpha_{n+1}^2\sqrt{6}}{4C_1\cdot Q_2\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)}}, \quad T_2 = \frac{1024Q_1\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+j/6)}2\sqrt{2}\varepsilon_{i1}}{C_1\cdot 2^r},$$
$$T_3 = 1, \quad T_4 = 2C_2, \quad \rho = \frac{\alpha_{n+1}}{2^{11}Q_2\cdot 2^{12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)}}.$$

Согласно лемме 2 при всех $s \ge 0$, $t \ge 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(a_1^{n,j+1}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \le \frac{2^{11}C_2\sqrt{3}\varepsilon_{i1}^2\cdot\alpha_{n+1}^2}{\frac{Q_2}{Q_1}\cdot 2^{(3+\eta_1/6)r}C_1^2}\cdot\frac{(2^{14}Q_2)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \tag{72}$$

Аналогично находим, что при всех $s \ge 0$, $t \ge 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(a_2^{j+1}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \le \frac{3C_2\varepsilon_{i1}^2\cdot\alpha_{n+1}^2}{C_1^2}\cdot\frac{(2^{13}Q_2)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)}}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \tag{73}$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(a_3^{n,j+1}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \le \frac{6\varepsilon_{i1}^2\cdot\alpha_{n+1}^3}{\frac{Q_2}{Q_1}\cdot 2^{(2+\eta_1/6)r}C_1^2}\cdot\frac{(2^{13}Q_2)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta)r(n+(j+1)/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \tag{74}$$

Для оценок производных других функций $a_l^{n,j+1}$ установим вспомогательные оценки. Оценим производные от $\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(i)}u' = f_1 f_2$, где $f_1 = \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}$, $f_2 = \sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'$. По предыдущему можно положить

$$T_1 = \frac{3\varepsilon_{i1}^2\alpha_{n+1}^2}{4C_1^2}, \quad T_2 = 1, \quad \rho = \frac{\alpha_{n+1}}{2^{11}Q_2\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)}}.$$

Поэтому при всех $s\ge 0$, $t\ge 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\big(\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(j,1)}u'\big)}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \le \frac{3\varepsilon_{i1}^2\cdot\alpha_{n+1}^2}{C_1^2}\cdot\frac{(2^{12}Q_2)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \tag{75}$$

Теперь оценим производные от $\sin\big(\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(j,1)}u'\big)$, пользуясь леммой 1 и полагая $\varphi(z) = \sin z$, $f(u',v') = \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}(u'v')}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(j,1)}u'$. При этом с учетом (75) можно положить $\rho = 1$, $\mu = \frac{3\varepsilon_{i1}^2\alpha_{n+1}^2}{4C_1^2}$, $\beta = \frac{\alpha_{n+1}}{2^{12}Q_2 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)}}$. На $\alpha^{(0)}$ наложим еще одно требование малости, обеспечивающее выполнение неравенства $\mu\le 1/2$ при всех u', v' (это усиленное требование скоро будет использовано). По лемме 1 при $s+t>0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\big[\sin\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(j,1)}u'\big]}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \le \frac{3\varepsilon_{i1}^2\cdot\alpha_{n+1}^2}{4C_1^2}\cdot\frac{(2^{15}Q_2)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \tag{76}$$

Ввиду (69) оценка (76) справедлива и при $s=t=0$. Теперь оценим с помощью леммы 1 производные от $\sin\big(\lambda_{n+1}^{(i,1)}u' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'\big)$. Полагая

$$\varphi(z) = \sin z, \quad f(u',v') = \lambda_{n+1}^{(i,1)}u' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u',$$

можем взять $\rho = 1$. Ввиду (75) и неравенства $\frac{3\varepsilon_{i1}^2\alpha_{n+1}^2}{4C_1^2}\le\frac12$ можно положить $\mu = 1$, $\beta = \frac{\alpha_{n+1}}{2^{12}Q_2\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)}}$, в результате чего при всех $s\ge 0$, $t\ge 0$ получим

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\big[\sin\big(\lambda_{n+1}^{(i,1)}u' - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8}\sin 2\lambda_{n+1}^{(i,1)}u'\big)\big]}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \le \frac{(2^{15}Q_2)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \tag{77}$$

Вводя требование $\frac{48C_2^2C_3\alpha^{(0)}}{C_1^2}\le 1$, теперь при всех $s\ge 0$, $t\ge 0$ найдем, что

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\big(a_4^{n,j+1}\big)_x}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \le \frac{\sqrt{2}\cdot 2^{12}\cdot\varepsilon_{i1}C_2\cdot\alpha_{n+1}}{C_1\frac{Q_2}{Q_1}\cdot 2^{(3+\eta_1/6)r}}\cdot\frac{(2^{18}Q_2)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \tag{78}$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\big(a_5^{n,j+1}\big)_x}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \le \frac{2\sqrt{6}\alpha_{n+1}C_2\varepsilon_{i1}}{C_1}\cdot\frac{(2^{13}Q_2)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \tag{79}$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\big(a_6^{n,j+1}\big)_x}{\partial u'^s\partial v'^t}\right| \le \frac{36\sqrt{6}\varepsilon_{i1}^3C_2\alpha_{n+1}^5}{16C_1^5}\cdot\frac{(2^{20}Q_2)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \tag{80}$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(a_7^{n,j+1}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{6\sqrt{6}\varepsilon_{i1}^3 C_2 \alpha_{n+1}^3}{16C_1^3} \cdot \frac{(2^{16}Q_2)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \quad (81)$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(a_8^{n,j+1}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{3 \cdot 2^{11}\sqrt{2}\varepsilon_{i1}^3 C_2 \alpha_{n+1}^3}{C_1^3 \frac{Q_2}{Q_1} \cdot 2^{(3+\eta_1/6)r}} \cdot \frac{(2^{20}Q_2)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \quad (82)$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(a_9^{n,j+1}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{3\sqrt{6}\varepsilon_{i1}^3 C_2 \alpha_{n+1}^3}{C_1^3} \cdot \frac{(2^{21}Q_2)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \quad (83)$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(a_{10}^{n,j+1}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{64 \cdot 48\sqrt{6}\varepsilon_{i1} C_2^2 \alpha_{n+1}^2}{C_1^3 \frac{Q_2}{Q_1} \cdot 2^{(2+\eta_1/6)r}} \cdot \frac{(2^{18}Q_2)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \quad (84)$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(a_{11}^{n,j+1}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{2^{13}\varepsilon_{i1} C_2^3 C_3 \sqrt{6}\alpha_{n+1}^2}{C_1^3 \frac{Q_2}{Q_1} \cdot 2^{(2+\eta_1/6)r}} \cdot \frac{(2^{18}Q_2)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \quad (85)$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(b_1^{n,j+1}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{2^{11}\sqrt{3}\varepsilon_{i1}^2 C_2 \alpha_{n+1}^2}{C_1^2 \frac{Q_2}{Q_1} \cdot 2^{(3+\eta_1/6)r}} \cdot \frac{(2^{14}Q_2)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \quad (86)$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(b_2^{n,j+1}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{6\varepsilon_{i1}^2 \alpha_{n+1}^3}{C_1^2 \frac{Q_2}{Q_1} \cdot 2^{(2+\eta_1/6)r}} \cdot \frac{(2^{13}Q_2)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \quad (87)$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(b_3^{n,j+1}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{2^{12}\sqrt{2}\varepsilon_{i1}\alpha_{n+1} C_2}{C_1 \frac{Q_2}{Q_1} \cdot 2^{(3+\eta_1/6)r}} \cdot \frac{(2^{18}Q_2)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \quad (88)$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(b_4^{n,j+1}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{3 \cdot 2^{11}\varepsilon_{i1}^3 C_2 \alpha_{n+1}^3 \sqrt{2}}{C_1^3 \frac{Q_2}{Q_1} \cdot 2^{(3+\eta_1/6)r}} \cdot \frac{(2^{21}Q_2)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \quad (89)$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(b_5^{n,j+1}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{3 \cdot 2^{10}\sqrt{6}\varepsilon_{i1}\alpha_{n+1}^2 C_2^2}{C_1^3 \frac{Q_2}{Q_1} \cdot 2^{(2+\eta_1/6)r}} \cdot \frac{(2^{18}Q_2)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}, \quad (90)$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(b_6^{n,j+1}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{3 \cdot 2^{13}\sqrt{6}\varepsilon_{i1} C_2^3 C_3 \alpha_{n+1}^2}{C_1^3 \frac{Q_2}{Q_1} \cdot 2^{(2+\eta_1/6)r}} \cdot \frac{(2^{18}Q_2)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \quad (91)$$

Положим $C = \frac{3\sqrt{6}\cdot 2^{22}\mathscr{E}^4 C_2^6}{C_1^7}$, где $\mathscr{E} = \max\limits_{i=1,2,3}\{1, \varepsilon_{i1}\}$ ($C \geq 3\sqrt{6}\cdot 2^{22}$, поскольку $\mathscr{E}, C_2 \geq 1$, $C_1 \leq 1$), $Q_2 = \frac{Q_1}{2^{23}\cdot 48C}$. Тогда $1 \leq Q_2 < Q_1$, так как $Q_1 \geq 2^{23}\cdot 48C$, и $\frac{Q_2}{Q_1} > \frac{1}{2^{\eta_1 r/12}}$, так как $2^{\eta_1 r/12} > 2^{23}\cdot 48C$ (см. п. 1°, (*)). В силу $\varepsilon_1 \leq 1/30$ (п. 1°, (**)) согласно (35) и неравенствам $C_1 \leq 1$, $C \geq 3\sqrt{6}\cdot 2^{22}$ имеем $\alpha^{(0)} < \frac{1}{2^{26}\cdot 3^3\cdot 5\sqrt{6}}$. Поэтому из (72)–(74), (78)–(91), неравенства $\frac{Q_2}{Q_1} > \frac{1}{2^{\eta_1 r/12}}$, определения C и равенств (25), (26) следует

$$\left|\left(\frac{\partial \rho_n^{(j+1)}}{\partial u'}\right)_x - \left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)_x\right| \leq \sum_{l=1}^{11}\left|\left(a_l^{n,j+1}\right)_x\right| \leq 2C\alpha_{n+1}, \quad (92)$$

$$\left|\left(\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial v'}\right)_x-\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)_x\right|\le\sum_{l=1}^{6}\left|\left(b_l^{n,j+1}\right)_x\right|\le 2C\alpha_{n+1}. \tag{93}$$

Поскольку производные по u, v связаны с производными по u', v' ортогональным преобразованием, а координатная ось x произвольна, из неравенств (92) и (93) вытекает, что

$$\left|\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial u}-\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\right|\le 4C\alpha_{n+1}, \tag{94}$$

$$\left|\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial v}-\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right|\le 4C\alpha_{n+1}. \tag{95}$$

Согласно (25), (26)

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial u'}\right)_x}{\partial u'^s\partial v'^t}\right|&\le\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)_x}{\partial u'^s\partial v'^t}\right|+\sum_{l=1}^{11}\left|\frac{\partial^{s+t}\left(a_l^{(n,j+1)}\right)_x}{\partial u'^s\partial v'^t}\right|,\\ \left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial v'}\right)_x}{\partial u'^s\partial v'^t}\right|&\le\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)_x}{\partial u'^s\partial v'^t}\right|+\sum_{l=1}^{6}\left|\frac{\partial^{s+t}\left(b_l^{(n,j+1)}\right)_x}{\partial u'^s\partial v'^t}\right|.\end{aligned} \tag{96}$$

Ввиду (96), (27), (72)–(74), (78)–(91), соотношений $\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{1}{2^{23}\cdot 48C}>\frac{1}{2^{\eta_1 r/12}}$, $\alpha^{(0)}<\frac{1}{2^{26}\cdot 3^3\cdot 5\sqrt{6}}$ и ортогональности матрицы перехода от u, v к u', v' при $s+t>0$ находим

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial u}\right)}{\partial u^s\partial v^t}\right|,\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial v}\right)}{\partial u^s\partial v^t}\right|\le\frac{\alpha_{n+1}\left(\frac{1}{16}Q_1\right)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}} \tag{97}$$

(эти оценки и подавно верны для производных по u', v'). Формулы (12) перехода от $\rho_n^{(j+1)}$ к $\rho_n^{(j+2)}$ получаются из формул (8) перехода от $\rho_n^{(j)}$ к $\rho_n^{(j+1)}$ переменой ролей u', v' и заменой $\tilde\alpha_{n+1}^{(i,1)}$ на $\tilde\alpha_{n+1}^{(i,2)}$, $\lambda_{n+1}^{(i,1)}$ на $\lambda_{n+1}^{(i,2)}$, j на $j+1$. Векторы, получаемые при этом из $a_l^{n,j+1}$, $b_l^{n,j+1}$, обозначим через $a_l^{n,j+2}$, $b_l^{n,j+2}$. Оценки $\left(a_l^{n,j+2}\right)_x$, $\left(b_l^{n,j+2}\right)_x$ и их производных вытекают из соответствующих оценок для $\left(a_l^{n,j+1}\right)_x$, $\left(b_l^{n,j+1}\right)_x$ при замене j на $j+1$. Это следует из (97), поскольку оценки

$$\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\right|,\quad\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right|,\quad\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u}\,\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v}\right|,$$

используемые при выводе неравенств (72)–(74), (78)–(91), не зависят от j. В результате

$$\left|\frac{\partial\rho_n^{(j+2)}}{\partial u}-\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial v}\right|\le 4C\alpha_{n+1}, \tag{98}$$

$$\left|\frac{\partial\rho_n^{(j+2)}}{\partial v}-\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial v}\right|\le 4C\alpha_{n+1}, \tag{99}$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j+2)}}{\partial u}\right)}{\partial u^s\partial v^t}\right|,\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j+2)}}{\partial v}\right)}{\partial u^s\partial v^t}\right|\le\frac{\alpha_{n+1}\left(\frac{1}{16}Q_1\right)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+2)/6)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}} \tag{100}$$

(при $s+t>0$). Наконец, оценим $\left|\rho_n^{(j+1)}-\rho_n^{(j)}\right|$, $\left|\rho_n^{(j+2)}-\rho_n^{(j+1)}\right|$. Согласно (8)

$$\left|\rho_n^{(j+1)}-\rho_n^{(j)}\right|<\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right|\left(\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8\lambda_{n+1}^{(i,1)}}+\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\lambda_{n+1}^{(i,1)}}\right).$$

Вследствие (49) $\left|\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right|\leq 2C_2$, далее,

$$\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}=\varepsilon_{i1}\alpha_{n+1}\sqrt{\frac{\overset{\approx}{\chi}{}_i^{(n)}}{\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)}},$$

откуда ввиду неравенств $\varepsilon_{i1}<\mathscr{E}$ и неравенства (69) имеем $\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}\leq\frac{\mathscr{E}\alpha_{n+1}\sqrt{6}}{C_1}$. Следовательно,

$$\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}}{\lambda_{n+1}^{(i,1)}}\leq\frac{\mathscr{E}\sqrt{6}\alpha_{n+1}^2}{C_1Q_2\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)}},$$

и тем более

$$\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{8\lambda_{n+1}^{(i,1)}}\leq\frac{\mathscr{E}\sqrt{6}\alpha_{n+1}^2}{C_1Q_2\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)}}\quad(\alpha^{(0)}<1,\ Q_2,\lambda_{n+1}^{(i,1)}\geq 1).$$

В результате

$$\left|\rho_n^{(j+1)}-\rho_n^{(j)}\right|\leq\frac{4C_2\mathscr{E}\sqrt{6}\alpha_{n+1}^2}{C_1Q_2\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+1)/6)}}$$

и точно так же

$$\left|\rho_n^{(j+2)}-\rho_n^{(j+1)}\right|\leq\frac{4C_2\mathscr{E}\sqrt{6}\alpha_{n+1}^2}{C_1Q_2\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+(j+2)/6)}}.$$

Так как $2^{\eta_1 r/12}>2^{23}\cdot 48C\cdot\frac{4C_2\mathscr{E}\sqrt{6}}{C_1}$ (см. п. 1°, условие 1) и $\frac{Q_1}{Q_2}=2^{23}\cdot 48C$, то $\frac{4C_2\mathscr{E}\sqrt{6}}{C_1Q_2\cdot 2^{\eta_1 r/12}}<\frac{1}{Q_1}$ и потому

$$\left|\rho_n^{(j+1)}-\rho_n^{(j)}\right|\leq\frac{\alpha_{n+1}^2}{Q_1\cdot 2^{2r}},\tag{101}$$

$$\left|\rho_n^{(j+2)}-\rho_n^{(j+1)}\right|\leq\frac{\alpha_{n+1}^2}{Q_1\cdot 2^{2r}}.\tag{102}$$

Для индексов $j+1$, $j+2$ неравенства (21) следуют из (97), (100); (22) — из (101), (102); (23), (24) — из (94), (95) и (98), (99). Ввиду сказанного в начале этого пункта проверка условий 2 и 3 из 1° для $r^{(n+1)}$ закончена.

Кроме того, очевидной индукцией получаем, что при $i=1,2,3$ и $j=2(i-1)$ в координатах u', v', отвечающих индексу i, для функций $\left(a_k^{n,j+1)}\right)_x$, $\left(b_l^{n,j+1)}\right)_x$ верны оценки (72)–(74), (78)–(91), а для $\left(a_k^{n,j+2)}\right)_x$, $\left(b_l^{n,j+2)}\right)_x$ — оценки, полученные из них заменой $j+1$ на $j+2$, ε_{i1} на ε_{i2}. Учитывая, что $\frac{1}{16}Q_1>2^{21}Q_2$ (поскольку $Q_1=2^{23}\cdot 48CQ_2$), $n+1\geq n+\frac{j+2}{6}$, и полагая

$$\omega_{s,t}=\frac{\left(\frac{1}{16}Q_1\right)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+1)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}},$$

найдем, что при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\big(a_k^{n,j+1}\big)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right|, \left|\frac{\partial^{s+t}\big(a_k^{n,j+2}\big)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq p_k \alpha_{n+1}^{m_k} C\omega_{s,t}, \tag{103}$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\big(b_l^{n,j+1}\big)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right|, \left|\frac{\partial^{s+t}\big(b_l^{n,j+2}\big)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq q_l \alpha_{n+1}^{n_l} C\omega_{s,t}, \tag{104}$$

где $p_k = 1$ при $k = 2, 5, 6, 7, 9$, $p_k = \frac{1}{2^{\eta_1 r/12} \cdot 2^{2r}}$ при $k = 3, 10, 11$,

$$p_k = \frac{1}{2^{\eta_1 r/12} \cdot 2^{3r}} \quad \text{при } k = 1, 4, 8, \tag{105}$$

$$\begin{gathered} m_k = 1 \text{ при } k = 4, 5, \quad m_k = 2 \text{ при } k = 1, 2, 10, 11, \\ m_k = 3 \text{ при } k = 3, 7, 8, 9, \quad m_k = 5 \text{ при } k = 6, \end{gathered} \tag{106}$$

$$q_l = \frac{1}{2^{\eta_1 r/12} \cdot 2^{2r}} \text{ при } l = 2, 5, 6, \quad q_l = \frac{1}{2^{\eta_1 r/12} \cdot 2^{3r}} \text{ при } l = 1, 3, 4, \tag{107}$$

$$n_l = 1 \text{ при } l = 3, \quad n_l = 2 \text{ при } l = 1, 5, 6, \quad n_l = 3 \text{ при } l = 2, 4. \tag{108}$$

5°. Покажем, что для F_{n+1} выполнено условие 1 из 1°. Пусть i — одно из чисел 1, 2, 3, $j = 2(i-1)$. Положим

$$a_4^{n,j+1} + \sum_{l=6}^{10} a_l^{n,j+1} = c_1^{n,j+1}, \quad \sum_{l=3}^{5} b_l^{n,j+1} = c_2^{n,j+1}.$$

Равенство (25) перепишется так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_n^{(j+1)}}{\partial u'} = \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'} + a_1^{n,j+1} - \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{4} \cos 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u' \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'} + a_3^{n,j+1} \\ + \tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)} \cos 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u' \sqrt{\left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2} m_n^{(j)} + c_1^{n,j+1} + a_1^{n,j+1}, \end{aligned} \tag{109}$$

а равенство (26) — следующим образом:

$$\frac{\partial \rho_n^{(j+1)}}{\partial v'} = \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'} + b_1^{n,j+1} + b_2^{n,j+1} + c_2^{n,j+1} + b_6^{n,j+1}. \tag{110}$$

Учитывая, что

$$a_1^{n,j+1} = \varphi_1 \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}, \quad c_1^{n,j+1} = \varphi_2 m_n^{(j)},$$

$$a_{11}^{n,j+1} = \varphi_3 \frac{\partial m_n^{(j)}}{\partial u'}, \quad b_1^{n,j+1} = \varphi_4 \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}, \quad c_2^{n,j+1} = \varphi_5 m_n^{(j)}, \quad b_6^{n,j+1} = \varphi_6 \frac{\partial m_n^{(j)}}{\partial v'},$$

где φ_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, — скалярные функции, получаем

$$\left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2 = \left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2 + \frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{2} \left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2 + R_1^{n,j+1}, \tag{111}$$

где

$$R_1^{n,j+1} = \sum_{l=1}^{3} \big(a_l^{n,j+1}\big)^2 + \big(c_1^{n,j+1}\big)^2 + \big(a_{11}^{n,j+1}\big)^2 + 2\big(a_1^{n,j+1} + a_3^{n,j+1} + a_{11}^{n,j+1}\big) \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}$$

$$+ 2a_1^{n,j+1}\big(a_2^{n,j+1} + a_3^{n,j+1} + a_{11}^{n,j+1}\big) + 2a_3^{n,j+1}\big(a_5^{n,j+1} + c_1^{n,j+1} + a_{11}^{n,j+1}\big) \\ + 2a_2^{n,j+1}\big(a_3^{n,j+1} + a_{11}^{n,j+1}\big) + 2a_5^{n,j+1}c_1^{n,j+1}, \quad (112)$$

$$\left(\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial v'}\right)^2 = \left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)^2 + R_2^{n,j+1}, \quad (113)$$

где

$$R_2^{n,j+1} = \big(b_1^{n,j+1}+b_2^{n,j+1}+c_2^{n,j+1}+b_6^{n,j+1}\big)^2+2\big(b_1^{n,j+1}+b_2^{n,j+1}+b_6^{n,j+1}\big)\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}. \quad (114)$$

Наконец,

$$\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial u'}\cdot\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial v'} = \frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\cdot\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'} + R_3^{n,j+1}, \quad (115)$$

где

$$R_3^{n,j+1} = a_2^{n,j+1}\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'} + \big(a_3^{n,j+1}+a_{11}^{n,j+1}\big)\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'} + \frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial u'}\big(b_1^{n,j+1}+b_2^{n,j+1}+b_6^{n,j+1}\big) \\ + \big(a_1^{n,j+1}+a_3^{n,j+1}+a_5^{n,j+1}+c_1^{n,j+1}\big)c_2^{n,j+1} + \sum_{l=1}^{11} a_l^{n,j+1}\big(b_1^{n,j+1}+b_2^{n,j+1}+b_3^{n,j+1}\big). \quad (116)$$

Точно так же получим

$$\left(\frac{\partial\rho_n^{(j+2)}}{\partial v'}\right)^2 = \left(\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial v'}\right)^2 + \frac{\tilde\alpha_{n+1}^{(i,2)^2}}{2}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial v'}\right)^2 + R_1^{n,j+2}, \quad (117)$$

$$\left(\frac{\partial\rho_n^{(j+2)}}{\partial u'}\right)^2 = \left(\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial u'}\right)^2 + R_2^{n,j+2}, \quad (118)$$

$$\frac{\partial\rho_n^{(j+2)}}{\partial u'}\,\frac{\partial\rho_n^{(j+2)}}{\partial v'} = \frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial u'}\,\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial v'} + R_3^{n,j+2}, \quad (119)$$

где $R_1^{n,j+2}$, $R_2^{n,j+2}$, $R_3^{n,j+2}$ выражаются равенствами (112), (114), (116), в которых произведена замена j на $j+1$. Из выражений для $\tilde\alpha_{n+1}^{(i,1)}$, $\tilde\alpha_{n+1}^{(i,2)}$ (см. 2°, равенства (9), (13)) следует

$$\frac{\tilde\alpha_{n+1}^{(i,1)^2}}{2}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha_{n+1}^2\approx\!\!\!\chi_i^{(n)}\varepsilon_{i1}^2, \quad \frac{\tilde\alpha_{n+1}^{(i,2)^2}}{2}\left(\frac{\partial\rho_n^{(j+1)}}{\partial v'}\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha_{n+1}^2\approx\!\!\!\chi_i^{(n)}\varepsilon_{i2}^2. \quad (120)$$

Из равенств (111), (113), (115), (117)–(120) вытекает, что

$$ds^2_{F_n^{(j+2)}} - ds^2_{F_n^{(j)}} = \frac{1}{2}\alpha_{n+1}^2\approx\!\!\!\chi_i^{(n)}\big(\varepsilon_{i1}^2\,du'^2 + \varepsilon_{i2}^2\,dv'^2\big) + \big(R_1^{n,j+1}+R_2^{n,j+2}\big)\,du'^2 \\ + \big(R_3^{n,j+1}+R_3^{n,j+2}\big)\,du'dv' + \big(R_2^{n,j+1}+R_1^{n,j+2}\big)\,dv'^2. \quad (121)$$

Возвращаясь к исходным координатам u, v, мы должны согласно выбору u', v' (см. 2°, равенство (7)) положить $du' = A_i\,du + B_i\,dv$, $dv' = S_i\,du + D_i\,dv$. В результате получим

$$ds^2_{F_n^{(j+2)}} - ds^2_{F_n^{(j)}} = \frac{1}{2}\alpha_{n+1}^2\approx\!\!\!\chi_i^{(n)}\big[\varepsilon_{i1}^2(A_i\,du+B_i\,dv)^2 + \varepsilon_{i2}^2(S_i\,du+D_i\,dv)^2\big] \\ + m_{11}^{n,i}\,du^2 + 2m_{12}^{n,i}\,dudv + 2m_{22}^{n,i}\,dv^2, \quad (122)$$

где $m_{11}^{n,i}$, $m_{12}^{n,i}$, $m_{22}^{n,i}$ — линейные комбинации $R_1^{n,j+1}$, $R_1^{n,j+2}$, $R_2^{n,j+1}$, $R_2^{n,j+2}$, $R_3^{n,j+1}$, $R_3^{n,j+2}$ с коэффициентами, зависящими только от A_i, B_i, S_i, D_i. Оценим $m_{11}^{n,i}$, $m_{12}^{n,i}$, $m_{22}^{n,i}$ и их производные по u', v'. Пусть $\psi_l^{(1)} = \left(a_l^{n,j+1}\right)_x^2$, где x — ось, имеющая направление вектора $a_l^{n,j+1}$ при рассматриваемых значениях u', v', $l = 1, 2, 3, 11$. Применяя к $\psi_l^{(1)}$ лемму 2, положим $f_1 = f_2 = \left(a_l^{n,j+1}\right)_x$. Ввиду неравенств (103) можно взять $T_1 = T_2 = C\alpha_{n+1}^2$, $\rho = \frac{16\alpha_{n+1}}{Q_1 \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+1)}}$. Поэтому при $l = 1, 2, 3, 11$ и всех $s \geq 0$, $t \geq 0$ имеем

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\psi_l^{(1)}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq C^2 \alpha_{n+1}^4 \widetilde{\omega}_{s,t}, \tag{123}$$

где $\widetilde{\omega}_{s,t} = \frac{(\frac{1}{8}Q_1)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+1)(s+t)} s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}$.

Поскольку ввиду (35) и неравенств $\varepsilon \leq \frac{1}{2^{\eta_1 r/12} \cdot 2^r}$, $\alpha^{(0)} < \frac{1}{2^{\eta_1 r/12} \cdot 2^{2r}}$, из (103) следует, что при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(c_1^{(n,j+1)}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq 6C \cdot \frac{1}{2^{\frac{\eta}{12}r} \cdot 2^{2r}} \alpha_{n+1}\omega_{s,t}. \tag{124}$$

Полагая $\psi_1^{(2)} = \left(c_1^{n,j+1}\right)^2$, из (124) с помощью леммы 2 при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$ приходим к неравенству

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\psi_1^{(2)}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq 36C^2 \cdot \frac{1}{2^{\frac{\eta_1}{6}r} \cdot 2^{4r}} \alpha_{n+1}^2 \widetilde{\omega}_{s,t}. \tag{125}$$

Пусть

$$\psi_{l,0}^{(3)} = a_l^{n,j+1} \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}, \quad \psi_{l,k}^{(4)} = a_l^{n,j+1} a_k^{n,j+1}, \quad \psi_{l,1}^{(5)} = a_l^{n,j+1} c_1^{n,j+1}.$$

В силу неравенств (49) и (97) при $s \geq 0$, $t \geq 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right|, \left|\frac{\partial^{s+t}\left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)_x}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq C_4 \omega_{s,t}, \tag{126}$$

где $C_4 = 2C_2$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Пользуясь неравенствами (103), (126) и применяя лемму 2, при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$ получим

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\psi_{l,0}^{(3)}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{3CC_4}{2^{\frac{\eta_1}{12}r} \cdot 2^{2r}} \alpha_{n+1}^2 \widetilde{\omega}_{s,t}, \tag{127}$$

где $l = 1, 3, 11$. Неравенство (127) сохраняется при замене $\psi_{l,0}^{(3)}$ на $a_k^{n,j+1} \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'}$ $(l = 1, 3, 11)$. Аналогично получим, что при $l = 1, 2, 3$, $k = 2, 3, 5, 11$ и всех $s \geq 0$, $t \geq 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\psi_{l,k}^{(4)}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq 3C^2 \alpha_{n+1}^3 \widetilde{\omega}_{s,t}. \tag{128}$$

Наконец, пользуясь (124) и (103), при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$ имеем

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\psi_{l,1}^{(5)}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq 18C^2 \frac{1}{2^{\frac{\eta_1}{12}r} \cdot 2^{2r}} \alpha_{n+1}^2 \widetilde{\omega}_{s,t}. \tag{129}$$

Ввиду (123), (125), (127)–(129) и малости $\alpha^{(0)}$ при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$

$$\left| \frac{\partial^{s+t} R_1^{n,j+1}}{\partial u'^s \partial v'^t} \right| \leq \frac{172 C^2 C_4}{2^{\frac{\eta_1}{12} r} \cdot 2^{2r}} \alpha_{n+1}^2 \widetilde{\omega}_{s,t}. \tag{130}$$

В силу (103) и малости $\alpha^{(0)}$ при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$ приходим к неравенству

$$\left| \frac{\partial^{s+t} \big(c_2^{n,j+1}\big)_x}{\partial u'^s \partial v'^t} \right| \leq \frac{3C}{2^{\frac{\eta_1}{12} r} \cdot 2^{3r}} \alpha_{n+1}^2 \omega_{s,t}. \tag{131}$$

Положим $b_1^{n,j+1} + b_2^{n,j+1} + b_6^{n,j+1} = c_3^{n,j+1}$. Тогда из (103) вытекает: при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$ будет

$$\left| \frac{\partial^{s+t} \big(c_3^{n,j+1}\big)_x}{\partial u'^s \partial v'^t} \right| \leq \frac{3C}{2^{\frac{\eta_1}{12} r} \cdot 2^{2r}} \alpha_{n+1}^2 \omega_{s,t}. \tag{132}$$

Если $\psi^{(6)} = \big(c_2^{n,j+1} + c_3^{n,j+1}\big)^2$, то ввиду (131), (132) и малости $\alpha^{(0)}$ при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$ справедливо

$$\left| \frac{\partial^{s+t} \psi^{(6)}}{\partial u'^s \partial v'^t} \right| \leq \frac{36 C^2}{2^{\frac{\eta_1}{6} r} \cdot 2^{6r}} \alpha_{n+1}^2 \widetilde{\omega}_{s,t}. \tag{133}$$

Полагая $\psi^{(7)} = c_3^{n,j+1} \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'}$, из (132) и (126) выводим

$$\left| \frac{\partial^{s+t} \psi^{(7)}}{\partial u'^s \partial v'^t} \right| \leq \frac{9 C C_4}{2^{\frac{\eta_1}{12} r} \cdot 2^{2r}} \alpha_{n+1}^2 \widetilde{\omega}_{s,t}. \tag{134}$$

С учетом (133), (134) при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$

$$\left| \frac{\partial^{s+t} R_2^{n,j+1}}{\partial u'^s \partial v'^t} \right| \leq \frac{54 C^2 C_4}{2^{\frac{\eta_1}{12} r} \cdot 2^{2r}} \alpha_{n+1}^2 \widetilde{\omega}_{s,t}. \tag{135}$$

Пусть

$$\psi^{(8)} = a_2^{n,j+1} \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'} = -\frac{\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)^2}}{4} \cos 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u' \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'} \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'}.$$

Положим $\psi^{(8)} = f_1 f_2 f_3 f_4$, где $f_1 = f_2 = \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{n+1}^{(i,1)}$, $f_3 = -\cos 2\lambda_{n+1}^{(i,1)} u'$,

$$f_4 = \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'} \frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'} = \left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)_x \left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)_x + \left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)_y \left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)_y + \left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\right)_z \left(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'}\right)_z,$$

где x, y, z — ортогональные оси координат.

Слагаемые в правой части обозначим соответственно через φ_1, φ_2, φ_3. Для оценки их производных применим лемму 3. Полагая $\varphi_1 = g_1, g_2$, где $g_1 = \big(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial u'}\big)_x$ $g_2 = \big(\frac{\partial \rho_n^{(j)}}{\partial v'}\big)_x$, и используя оценки (97) и (49), можем взять

$$T_1 = T_2 = 2C_2, \quad \omega = \frac{\alpha_{n+1}}{2C_2}, \quad \rho = \frac{16 \alpha_{n+1}}{Q_1 \cdot 2^{(12+\eta_1) r (n+1)}}.$$

В результате при $s + t > 0$

$$\left| \frac{\partial^{s+t} \varphi_1}{\partial u'^s \partial v'^t} \right| \leq \frac{2 C_2 \alpha_{n+1} \cdot \big(\frac{1}{8} Q_1\big)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1) r (n+1)(s+t)} s! t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \tag{136}$$

Такие же оценки справедливы для φ_2, φ_3. В результате при $s+t>0$ верно

$$\left|\frac{\partial^{s+t} f_4}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \le \frac{6C_2\alpha_{n+1}\cdot\left(\frac{1}{8}Q_1\right)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+1)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \tag{137}$$

Согласно (46)

$$|f_4| = 10\varepsilon C_2^2. \tag{138}$$

Поскольку ввиду (35) $\alpha^{(0)}<\varepsilon$, из (137), (138) при всех $s\ge 0$, $t\ge 0$ следует, что

$$\left|\frac{\partial^{s+t} f_4}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \le 10\varepsilon C_4^2 \frac{\left(\frac{1}{8}Q_1\right)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+1)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}} \tag{139}$$

(учтено, что $1\le C_2<C_4$). Применяя лемму 2 к оценке производных произведения f_1, f_2, f_3, ввиду (68), (69), (10) и неравенства $Q_1<2^{\frac{\eta_1 r}{12}}Q_2$ можем положить

$$T_1=T_2=\frac{\varepsilon\sqrt{6}\alpha_{n+1}}{2C_1}<C\alpha_{n+1}, \quad T_3=1, \quad \rho=\frac{\alpha_{n+1}}{2^{10}Q_2\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+1)}}.$$

Применяя затем лемму 2 к произведению $(f_1f_2f_3)$ на f_4 и учитывая, что $\frac{Q_1}{Q_2}=2^{23}\cdot 48C>8\cdot 2^{12}$, из (139) при всех $s\ge 0$, $t\ge 0$ получим

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\psi^{(8)}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \le 10\mathscr{E} C^2C_4^2\alpha_{n+1}^2\approx{\omega}_{s,t},$$

где

$$\approx{\omega}_{s,t},=\frac{\left(\frac{1}{4}Q_1\right)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+1)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}.$$

Так как $\varepsilon<\varepsilon_0\le\frac{1}{2^{\frac{\eta_1}{12}r}\cdot 2^{2r}}$, то

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\psi^{(8)}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \le \frac{10C^2C_4^2}{2^{\frac{\eta_1}{12}r}\cdot 2^{2r}}\alpha_{n+1}^2\approx{\omega}_{s,t}. \tag{140}$$

Полагая $\psi^{(9)}=\left(a_1^{n,j+1}+a_3^{n,j+1}+a_{11}^{n,j+1}\right)\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial v'}$, из (127) при всех $s\ge 0$, $t\ge 0$ получим

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\psi^{(9)}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \le \frac{9CC_4}{2^{\frac{\eta_1}{12}r}\cdot 2^{2r}}\alpha_{n+1}^2\approx{\omega}_{s,t}. \tag{141}$$

Для $\psi^{(10)}=C_3^{n,j+1}\frac{\partial\rho_n^{(j)}}{\partial u'}$ справедлива та же оценка, что и для $\psi^{(7)}$, т. е. при всех $s\ge 0$, $t\ge 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\psi^{(10)}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \le \frac{9CC_4}{2^{\frac{\eta_1}{12}r}\cdot 2^{2r}}\alpha_{n+1}^2\widetilde{\omega}_{s,t}. \tag{142}$$

Пусть

$$\psi^{(11)}=\left(a_3^{n,j+1}+a_5^{n,j+1}+c_1^{n,j+1}\right)c_2^{n,j+1}+c_3^{n,j+1}\sum_{l=1}^{11}a_l^{n,j+1}.$$

В силу малости $\alpha^{(0)}$ и оценок (103), (124) (131), (132) при всех $s\ge 0$, $t\ge 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\psi^{(11)}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \le \frac{37C^2}{2^{\frac{\eta_1}{12}r}\cdot 2^{2r}}\alpha_{n+1}^2\approx{\omega}_{s,t}. \tag{143}$$

Из (116) и неравенств (140)–(143) при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$ следует

$$\left|\frac{\partial^{s+t} R_3^{n,j+1}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{65 C^2 C_4^2}{2^{\frac{\eta_1}{12} r} \cdot 2^{2r}} \alpha_{n+1}^2 \approx{\omega}_{s,t}. \tag{144}$$

Найденные оценки справедливы и для $R_1^{n,j+2}$, $R_2^{n,j+2}$, $R_3^{n,j+2}$, при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$ вытекает

$$\left|\frac{\partial^{s+t} R_1^{n,j+2}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{172 C^2 C_4}{2^{\frac{\eta_1}{12} r} \cdot 2^{2r}} \alpha_{n+1}^2 \widetilde{\omega}_{s,t}, \tag{145}$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t} R_2^{n,j+2}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{54 C^2 C_4}{2^{\frac{\eta_1}{12} r} \cdot 2^{2r}} \alpha_{n+1}^2 \widetilde{\omega}_{s,t}, \tag{146}$$

$$\left|\frac{\partial^{s+t} R_3^{n,j+2}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{65 C^2 C_4^2}{2^{\frac{\eta_1}{12} r} \cdot 2^{2r}} \alpha_{n+1}^2 \overset{\approx}{\omega}_{s,t}. \tag{147}$$

Поскольку функции $m_{11}^{n,i}$, $m_{12}^{n,i}$, $m_{22}^{n,i}$ являются линейными комбинациями $R_k^{n,j+1}$, $R_k^{n,j+2}$, $k = 1, 2, 3$, с коэффициентами, зависящими только от A_i, B_i, S_i, D_i, существует число C^*, зависящее только от C, A_i, B_i, S_i, C_4, D_i $(i = 1, 2, 3)$, такое, что при всех $i = 1, 2, 3$ и $s \geq 0$, $t \geq 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t} m_{kl}^{n,i}}{\partial u'^s \partial v'^t}\right| \leq \frac{C^*}{2^{\frac{\eta_1}{12} r} \cdot 2^{2r}} \alpha_{n+1}^2 \overset{\approx}{\omega}_{s,t}, \tag{148}$$

где $k, l = 1, 2$ (учтено, что $\overset{\approx}{\omega}_{s,t} \geq \widetilde{\omega}_{s,t}$ при всех s, t).

Возвращаясь к исходным координатам u, v и применяя лемму 4, при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$ получим

$$\left|\frac{\partial^{s+t} m_{kl}^{n,i}}{\partial u^s \partial v^t}\right| \leq \frac{C^*}{2^{\frac{\eta_1}{12} r} \cdot 2^{2r}} \alpha_{n+1}^2 \overset{\approx}{\omega}{}^*_{s,t}, \tag{149}$$

где

$$\overset{\approx}{\omega}{}^*_{s,t} = \frac{(Q_1)^{s+t} \cdot 2^{(12+\eta_1) r (n+1)(s+t)} s! t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}.$$

Ввиду равенств (122) имеем

$$\begin{aligned} ds^2_{F_{n+1}} - ds^2_{F_n} &= \sum_{i=1}^{3} \left[ds^2_{F_n^{(2i)}} - ds^2_{F_n^{(2i-2)}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \alpha_{n+1}^2 \sum_{i=1}^{3} \overset{\approx}{\chi}{}_i^{(n)} \left[\varepsilon_{i1}^2 (A_i\, du + B_i\, dv)^2 + \varepsilon_{i2}^2 (S_i\, du + D_i\, dv)^2 \right] \\ &\quad + \widetilde{m}_{11}^{*(n+1)}\, du^2 + \widetilde{m}_{12}^{*(n+1)}\, du dv + \widetilde{m}_{22}^{*(n+1)}\, dv^2, \end{aligned} \tag{150}$$

где $\widetilde{m}_{kl}^{*(n+1)} = \sum\limits_{i=1}^{3} m_{kl}^{n,i}$, $k, l = 1, 2$. С учетом (149) для функций $\widetilde{m}_{kl}^{*(n+1)}$ справедливы следующие оценки:

$$\left|\frac{\partial^{s+t} \widetilde{m}_{kl}^{*(n+1)}}{\partial u^s \partial v^t}\right| \leq \frac{3 C^*}{2^{\frac{\eta_1}{12} r} \cdot 2^{2r}} \alpha_{n+1}^2 \overset{\approx}{\omega}{}^*_{s,t} \tag{151}$$

при всех $s \geq 0$, $t \geq 0$.

Определим $\widetilde{\widetilde{m}}_{kl}^{(n+1)}$ равенствами

$$\widetilde{m}_{kl}^{*(n+1)} = \frac{3C^*\alpha_{n+1}^2}{2^{\frac{\eta_1}{12}r}\cdot 2^{2r}}\widetilde{\widetilde{m}}_{kl}^{(n+1)}. \tag{152}$$

Тогда при всех $s\geq 0$, $t\geq 0$

$$\left|\frac{\partial^{s+t}\widetilde{\widetilde{m}}_{kl}^{(n+1)}}{\partial u^s\partial v^t}\right| = \frac{(Q_1)^{s+t}\cdot 2^{(12+\eta_1)r(n+1)(s+t)}s!t!}{\alpha_{n+1}^{s+t}}. \tag{153}$$

Согласно индуктивному предположению и равенствам $\frac{\alpha_{n+1}}{2^r}=\alpha_{n+2}$, (150), (6), (152) справедливо

$$ds^2_{F_{n+1}} = ds^2_F + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n+1}\alpha_l^2(m_{11}\,du^2+2m_{12}\,dudv+m_{22}\,dv^2)$$
$$+\frac{\alpha_{n+2}^2}{P}\big(m_{11}^{(n+1)}\,du^2+2m_{12}^{(n+1)}\,dudv+m_{22}^{(n+1)}\,dv^2\big),$$

где $m_{kl}^{(n+1)}=\theta\widetilde{\widetilde{m}}_{kl}^{(n+1)}$, $\theta = 3C^*P/2^{\frac{\eta_1}{12}}r$. Поскольку $\theta<1$ ввиду неравенства $2^{\frac{\eta_1}{12}r}>3C^*P$ (п. 1°, (*)), для $m_{kl}^{(n+1)}$ верны неравенства (153) и условие 1 для F_{n+1} проверено. Очевидно, что $m_{ij}^{(0)}\equiv 0$, и тем самым индукцией по n доказано, что $r^{(n)}$, F_n при всех $n=0,1,2,\ldots$ удовлетворяют условиям 1, 2, 3 из п. 1°.

6°. Из условия 3 следует, что вектор-функции $r^{(n)}$, задающие поверхности F_n, при $n\to\infty$ равномерно сходятся к непрерывной вектор-функции r^*_α, а $r_u^{(n)}$, $r_v^{(n)}$ равномерно сходятся к непрерывным вектор-функциям a и b. Поэтому $r^*_\alpha C^1$ и

$$\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u}=a=\lim_{n\to\infty}r_u^{(n)},\quad \frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v}=b=\lim_{n\to\infty}r_v^{(n)},$$
$$\left(\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u}\right)=\lim_{n\to\infty}\big(r_u^{(n)}\big)^2,\quad \frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u}\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v}=\lim_{n\to\infty}\big(r_u^{(n)}r_v^{(n)}\big),\quad \left(\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v}\right)=\lim_{n\to\infty}\big(r_v^{(n)}\big)^2.$$

В силу условия 1 п. 1° правые части этих равенств суть коэффициенты положительной квадратичной формы

$$ds^2_F+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2(m_{11}\,du^2+2m_{12}\,dudv+m_{22}\,dv^2)$$
$$=ds^2_F+\frac{1}{2}\alpha^2(m_{11}\,du^2+2m_{12}\,dudv+m_{22}\,dv^2).$$

Следовательно, r^*_α задает гладкую поверхность F^*_α и

$$ds^2_{F^*_\alpha}=ds^2_F+\frac{1}{2}\alpha^2(m_{11}\,du^2+2m_{12}\,dudv+m_{22}\,dv^2).$$

Из условия 3 п. 1° следует, что

$$|r^*_\alpha - r|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|r^{(n)}-r^{(n-1)}|\leq\frac{6}{4Q_1}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2<\frac{3\alpha^2}{Q},$$

$$\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u}-r_u\right|,\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v}-r_v\right|\leq 24C\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n<48C\alpha.$$

Остается проверить, что $r^*_\alpha \in C^{1,\frac{1}{13}-\eta}$, $F^*_\alpha \in \mathscr{L}^{1,\frac{1}{13}-\eta}$, постоянная K в определении $\mathscr{L}^{1,\frac{1}{13}-\eta}$ не зависит от α, семейства r^*_α, n^*_α равностепенно непрерывны по α, и доказать последнее утверждение теоремы.

Пусть

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}, \quad n^*_\alpha = \frac{\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u} \times \frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v}}{\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u} \times \frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v}\right|}.$$

Легко убедиться, что

$$\left|n^*_\alpha - n\right| \le \frac{2|r_u \times r_v| \left|\left(\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u} - r_u\right) \times \frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v} + \frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u} \times \left(\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v} - r_v\right)\right|}{|r_u \times r_v|^2 + \theta |r_u \times r_v| \left|\left(\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u} - r_u\right) \times \frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v} + \frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u} \times \left(\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v} - r_v\right)\right|}, \tag{154}$$

где θ — функция u, v и всюду $|\theta| \le 1$.

Согласно условию 3 п. 1° имеем

$$\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u} - r_u\right|, \left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v} - r_v\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} 24C\alpha_n = \frac{24C\alpha_1}{1 - \frac{1}{2^r}}.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \frac{\alpha_1^2}{1 - \frac{1}{2^r}} = \alpha^2, \quad \alpha_1 = \alpha\sqrt{1 - \frac{1}{2^{2r}}}, \quad r \ge 1,$$

то

$$\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u} - r_u\right|, \left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v} - r_v\right| \le \frac{24C\alpha\sqrt{1 - \frac{1}{2^{2r}}}}{1 - \frac{1}{2^r}} < 48C\alpha. \tag{155}$$

Наложим на $\alpha^{(0)}$ дополнительно условие $\alpha^{(0)} \le \frac{C_1^4}{3\cdot 2^{12} C_2^4 C^2}$, и пусть $\varphi(u,v)$ — угол между $n^*_\alpha(u,v)$, $n(u,v)$. Опираясь на неравенства $C_1 \le |r_u|, |r_v| \le C_2$, $\frac{|r_u r_v|}{|r_u|\,|r_v|} \le \varepsilon$, и учитывая, что $0 < C_1 \le 1$, $C > C_2 \ge 1$, $\varepsilon \le 1/30$, из (154), (155) при всех $u, v \in H$ выводим, что

$$\varphi(u,v) \le \frac{\pi}{8}. \tag{156}$$

Очевидно, что для произвольного $\delta > 0$ существует такое $q > 0$, что при условии $\alpha^{(0)} \le \frac{qC_1^4}{3\cdot 2^{12} C_2^4 C^2}$ неравенство (156) можно заменить неравенством $\varphi(u,v) \le \delta$. Этим доказано последнее утверждение теоремы 1.

Пусть $X_i = (u_i, v_i)$, $(u_i, v_i) \in H$ (область определения r, r^*_α), $\rho(X_1, X_2) = \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}$, $\theta(X_1, X_2)$ — угол между $n(X_1)$, $n(X_2)$. Учитывая оценки $\left|\frac{\partial^{p+q} r_u}{\partial u^p \partial v^q}\right|, \left|\frac{\partial^{p+q} r_v}{\partial u^p \partial v^q}\right| \le \frac{C_2 p! q!}{\gamma^{p+q}}$, найдем, что

$$\theta(X_1, X_2) < \frac{\pi}{8} \quad \text{при } \rho(X_1, X_2) \le \frac{\gamma C_1^2}{64 C_2^2}. \tag{157}$$

При том же условии угол $\theta^*_\alpha(X_1, X_2)$ между $n^*_\alpha(X_1)$, $n^*_\alpha(X_2)$ ввиду (156), (157) таков, что

$$\theta^*_\alpha(X_1, X_2) < \frac{3\pi}{8}. \tag{158}$$

Пусть $\delta = \frac{\gamma C_1^2}{64 C_2^2}$, V — δ-окрестность X_1 в H с метрикой ρ, $M(X)$, $X \in U$, — точка с радиус-вектором $r^*_\alpha(X)$, $M'(X)$ — ее проекция на касательную плоскость P_{X_1} к F^*_α, соответствующую X_1, отображение $h : U \to P_{X_1}$ задано формулой $h(X) =$

$M'(X)$. В силу (158) n — локальный диффеоморфизм класса C^1. Учитывая еще формулы для коэффициентов $ds^2_{F^*_\alpha}$, для подходящих δ_1, $0<\delta_1\le\delta$ и $\varkappa_1>0$, зависящих только от C_1, C_2 и функций m_{ij} из условия теоремы, нетрудно установить, что

$$\bigl|r^*_\alpha(X_2)-r^*_\alpha(X_1)\bigr|\ge\varkappa_1\rho(X_1,X_2)\quad\text{при }\rho(X_1,X_2)<\delta_1. \tag{159}$$

Согласно условию 3 п. 1° и определения класса $\mathscr{A}$ при $(u,v),X_1,X_2\in H$ и $\bigl|r^*_\alpha(u,v)-r(u,v)\bigr|\le\frac{6\alpha^{(0)^2}}{r^{2r}Q_1}$ будет

$$|r(X_2)-r(X_1)|\ge A\rho(X_1,X_2).$$

Поэтому при достаточной малости $\alpha^{(0)}$

$$\bigl|r^*_\alpha(X_2)-r^*_\alpha(X_1)\bigr|\ge\frac12A\rho(X_1,X_2),\quad\text{когда }\rho(X_1,X_2)\ge\delta_1. \tag{160}$$

Наложив на $\alpha^{(0)}$ такое требование, из (159), (160) и свойств коэффициентов $ds^2_{F^*_\alpha}$ заключаем, что r^*_α осуществляет диффеоморфизм класса C^1 области H в $\mathbb{E}^3$. Тем самым первое условие из определения класса $\mathscr{L}^{1,\frac{1}{18}-\eta}$ для F^*_α выполнено. Докажем выполнение второго условия и соотношение $r^*_\alpha\in C^{1,\frac{1}{13}-\eta}$.

Согласно равенствам $\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u}=\lim\limits_{n\to\infty}r^{(n)}_u$, $\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v}=\lim r_v$ и условию 3 п. 1° имеем

$$\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u}-r^{(n)}_u\right|,\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v}-r^{(n)}_v\right|\le\frac{48C\alpha^{(0)}}{2^{rn}}. \tag{161}$$

Поскольку $|r_u|,|r_v|\le C_2<C$ и $48\alpha^{(0)}<1$ в силу малости $\alpha^{(0)}$, из (161) следует, что

$$\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u}\right|,\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v}\right|<2C. \tag{162}$$

Пусть $X_1=(u_1,v_1),X_2=(u_2,v_2)\in H$. Найдется такое ортогональное преобразование $f:H\to H$, что если $f(X_1)=X_1'=(u_1',v_1')$, $f(X_2)=X_2'=(u_2',v_2')$, то $v_2'=v_1'$ и тем самым

$$\rho(X_1,X_2)=|u_2'-u_1'|. \tag{163}$$

В координатах u', v', где $(u',v')=f[(u,v)]$, ввиду (161), (162), условия 2 из п. 1° и леммы 4 следует, что

$$\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u'}-r^{(n)}_{u'}\right|,\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v'}-r^{(n)}_{v'}\right|\le\frac{96C\alpha^{(0)}}{2^{rn}},\quad\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u'}\right|,\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v'}\right|\le4C, \tag{164}$$

$$\bigl|r^{(n)}_{u'u'}\bigr|,\bigl|r^{(n)}_{v'u'}\bigr|\le4Q_1\cdot2^{(12+\eta_1)rn}. \tag{165}$$

Допустим, что

$$0<|u_2'-u_1'|^{\frac{1}{13}-\eta}<\frac{96C\alpha^{(0)}}{2^r}. \tag{166}$$

Тогда найдется такое целое число $n\ge1$, что

$$\frac{96C\alpha^{(0)}}{2^{r(n+1)}}\le|u_2'-u_1'|^{\frac{1}{13}-\eta}<\frac{96C\alpha^{(0)}}{2^{rn}}. \tag{167}$$

Оценивая сверху $2^{(12+\eta_1)rn}$ с помощью (167), из (165), условия $v_2'=v_1'$ и равенства $\eta_1=\frac{169\eta}{1-13\eta}$ выводим, что

$$\bigl|r^{(n)}_{u'}(X_2')-r^{(n)}_{u'}(X_1')\bigr|,\bigl|r^{(n)}_{v'}(X_2')-r^{(n)}_{v'}(X_1')\bigr|\le4Q_1\cdot(96C\alpha^{(0)})^{(12+\eta_1)}|u_2'-u_1'|^{\frac{1}{13}-\eta}. \tag{168}$$

Из (168), (167) и (164) вытекает неравенство

$$\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u'}(X'_2) - \frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u'}(X'_1)\right|, \left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v'}(X'_2) - \frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v'}(X'_1)\right| \le K_1|u'_2 - u'_1|^{1/13-\eta}, \tag{169}$$

где

$$K_1 = 2^{r+1} + 4Q_1(96C\alpha^{(0)})^{12+\eta_1}. \tag{170}$$

Вследствие (162) при $|u'_2 - u'_1|^{1/13-\eta} \ge \frac{96C\alpha^{(0)}}{2^r}$ верна оценка, полученная из (169) заменой K_1 на

$$K_2 = \frac{2^r}{24\alpha^{(0)}}. \tag{171}$$

Учитывая сказанное и возвращаясь к прежним координатам, ввиду (163) находим, что для любых $X_1, X_2 \in H$

$$\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u}(X_2) - \frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u}(X_1)\right|, \left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v}(X_2) - \frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v}(X_1)\right| \le K_3\rho(X_1, X_2)^{\frac{1}{13}-\eta}, \tag{172}$$

где

$$K_3 = 2\max\{K_1, K_2\}, \tag{173}$$

т. е. $r^*_\alpha < C^{1,\frac{1}{13}-\eta}$.

Из формулы для $ds^2_{F^*_\alpha}$ и неравенств $0 \le \alpha \le \alpha^{(0)}$ легко следует существование постоянных $K_4, K_5 > 0$, не зависящих от α и таких, что

$$\left|\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u} \times \frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v}\right| \ge K_4, \tag{174}$$

а если точки M_1, M_2 соответствуют $X_1, X_2 \in H$ и $s_{M_1M_2}$ — расстояние между ними на F^*_α, то

$$\rho(X_1, X_2) \le K_5 s_{M_1M_2}. \tag{175}$$

Из (162), (172), (174), (175) нетрудно вывести, что

$$\left|n^*_\alpha(X_2) - n^*_\alpha(X_1)\right| \le K s_{M_1M_2}^{\frac{1}{13}-\eta}, \tag{176}$$

где

$$K = \frac{32C^3K_3K_5^{\frac{1}{13}-\eta}}{K_4^2}. \tag{177}$$

Ввиду (176), (177) $F^*_\alpha \in \mathscr{L}^{1,\frac{1}{13}-\eta}$, причем коэффициент K, фигурирующий в определении класса $\mathscr{L}^{1,\frac{1}{13}-\eta}$, не зависит от α.

Покажем, что r^*_α, n^*_α непрерывны по α при $\alpha \in [0, \alpha^{(0)}]$ равностепенно относительно u, v. Действительно,

$$r^*_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}[r^{(n)} - r^{(n-1)}].$$

Члены этого ряда, очевидно, равностепенно непрерывны по α. Кроме того, сходимость ряда равномерна по u, v, α. Отсюда и следует равностепенная непрерывность r^*_α по α. Точно так же устанавливается аналогичное утверждение для $\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial u}$, $\frac{\partial r^*_\alpha}{\partial v}$, а тем самым и для n^*_α.

Теорема доказана.

Сделаем по поводу доказанной теоремы два замечания.

1. Деформационная теорема справедлива для n-мерных поверхностей в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве ($n \geq 1$) с той лишь разницей, что вместо класса $\mathscr{L}^{1,\frac{1}{13}-\eta}$ нужно рассматривать класс $\mathscr{L}^{1,\frac{1}{n^2(n+1)+1}-\varepsilon}$ (вектор-функция, задающая поверхность F определена либо на n-мерном пространстве, либо на n-мерном шаре; классы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{L}^{1,\gamma}$ определяются дословно так же, как при $n=2$). Доказательство требует лишь очевидных изменений, зависящих от числа переменных в рассматриваемых функциях. Изменение показателя Гёльдера объясняется изменением числа шагов при переходе от поверхности F_k к поверхности F_{k+1}. Это число, как видно из способа построения поверхностей F_k, равно $\frac{n(n+1)}{2}\cdot n$. Показатель же Гёльдера, для которого проходит доказательство, должен быть меньше $\frac{1}{2m+1}$, где m — упомянутое число шагов. Поэтому для n-мерной поверхности F допустимо любое значение показателя Гёльдера, меньшее $\frac{1}{n^2(n+1)+1}$.

2. По замечанию В. А. Залгаллера, положительные квадратичные формы f_1, f_2, f_3 можно заменить формами $n_i = (\gamma_{i1}x + \gamma_{i2}y)^2$, $i = 1, 2, 3$, изображаемыми некомпланарными векторами вдоль образующих конуса положительных форм. При этом число шагов при переходе от F_n к F_{n+1} равно 3, а $1/13-\eta$ заменяется на $1/7-\eta$.

§ 2. Следствия деформационной теоремы

Из теоремы 1 вытекают теоремы об изгибании поверхностей в классе $\mathscr{L}^{1,\frac{1}{13}-\eta}$, $1/13 \geq \eta > 0$, показывающие, что для поверхностей такого класса существенно нарушается обычная связь внутренней и внешней геометрий.

Пусть поверхность $\Phi \in \mathscr{A}$ положительной гауссовой кривизны задана функцией $R : H \to \mathbb{V}^3$, $ds^2_\Phi = \lambda(du^2 + dv^2)$, $\lambda : H \to \mathbb{R}$, $U \subset H$ — открытый круг с центром $(0,0)$, $r = R|U$, F задается функцией r, K — постоянная в определении класса $\mathscr{L}^{1,\frac{1}{13}-\eta}$, η фиксировано.

Теорема 2. *При подходящем выборе U найдутся такие $\alpha > 0$, K и семейство поверхностей $F_t \in \mathscr{L}^{1,\frac{1}{13}-\eta}$, $t \in [0,\alpha]$, задаваемых функциями $r_t : U \to \mathbb{V}^3$, что выполнены условия:*

1) $r_0 = r$, и если $M(X) \in F$, $M_t(X) \in F_t$, $X \in U$, соответствуют векторам $r(X)$, $r_t(X)$, то отображение $M(X) \mapsto M_t(X)$ — изометрия F на F_t;

2) при всяком $t \neq 0$ поверхность F_t не является локально выпуклой;

3) функции r_t, $\frac{\partial r_t}{\partial u}$, $\frac{\partial r_t}{\partial v}$, $n_t = \frac{\frac{\partial r_t}{\partial u}\times\frac{\partial r_t}{\partial v}}{\left|\frac{\partial r_t}{\partial u}\times\frac{\partial r_t}{\partial v}\right|}$ равностепенно непрерывны по t.

Доказательство. 1°. При достаточной малости круга U к F применима теорема 1, в которой за счет выбора f_1, f_2, f_3 обеспечена выполнимость условия

$$m_{11}\,du^2 + 2m_{12}\,dudv + m_{22}\,dv^2 = ds^2_F. \tag{1}$$

Если $\delta > 0$ достаточно мало, а F — простая гладкая поверхность с полем единичных нормалей $\tilde{n}$, заданная функцией $\tilde{r} : U \to \mathbb{V}^3$ и такая, что $|\tilde{n} - n_0| \leq \delta$, то для некоторого $s_0 > 0$, не зависящего от выбора $\widetilde{F}$, на $\widetilde{F}$ существует гомеоморфная отрезку гладкая плоская дуга $\mathscr{L}$ длины s_0, у которой углы между касательными меньше $\pi/4$.

Сказанное достаточно очевидно, и доказательство опускается.

2°**.** Пусть $\mathscr{L}$ — выпуклая дуга длины s_0 в полуплоскости P^+, ограниченной продолжением l ее хорды, угол между касательными в концах $\mathscr{L}$ меньше $\pi/4$, $\gamma : [0,1] \to P$ — путь длины $s(\gamma)$ в плоскости $P \supset P^+$ и существует такой гомеоморфизм f отрезка $[0,1]$ на $\mathscr{L}$, что для всех $t \in [0,1]$, $\rho[\gamma(t), f(t)] \leq h$, где ρ — метрика P, $h > 0$ — некоторое число. Добавив к γ отрезки, соединяющие концы γ с концами $\mathscr{L}$, получим путь γ^*, при этом $s(\gamma^*) \leq s(\gamma) + 2h$.

Пусть $G \subset P$ — полоса, ограниченная перпендикулярами к l в концах $\mathscr{L}$. Путь γ^* естественно заменяется путем из γ^{**} в G, при этом $s(\gamma^{**}) \leq s(\gamma^*)$. При сдвиге полосы G в направлении выпуклости $\mathscr{L}$ на расстояние $\sqrt{2}h$ и добавлении отрезков, соединяющих концы сдвинутого пути γ^{**} с концами $\mathscr{L}$, получим путь γ^{***} в G. Учитывая выпуклость $\mathscr{L}$ и условие $\varphi < \pi/4$, легко убедиться, что γ^{***} объемлет $\mathscr{L}$ и тем самым $s(\gamma^{***}) \geq (\mathscr{L}) = s_0$. Кроме того, $s(\gamma^{***}) \leq s(\gamma^{**}) + 2\sqrt{2}h$. В итоге

$$s_0 - s(\gamma) \leq (2 + 2\sqrt{2})h < 5h. \tag{2}$$

3°**.** Применим к F теорему 1, считая выполненным условие (1). За счет дополнительного требования малости $\alpha^{(0)}$ обеспечим степень малости $|n_t^* - n|$, гарантирующую существование на всех поверхностях F_t^*, $t \in [0, \alpha^{(0)}]$, плоских сечений длины s_0, для которых углы между касательными меньше $\pi/4$ (такие сечения называем «допустимыми»). Существование указанного требования малости гарантировано теоремой 1. Наконец, положим

$$Q_1 = \frac{90}{s_0}. \tag{3}$$

Пусть $t \in [0, \alpha^{(0)}]$. Допустим, что поверхность F_t^* локально выпукла. Поскольку ввиду (1)

$$ds^2_{F_t^*} = \left(1 + \frac{1}{2}t^2\right) ds^2_F, \tag{4}$$

метрика F_t^* аналитическая, а по теореме Погорелова такова и поверхность F_l^*. Кроме того, ввиду (4) гауссова кривизна поверхности F_t^* всюду положительна, и поэтому допустимое сечение $\mathscr{L}$ — выпуклая дуга. Обозначая через $M(X)$, $M_t(X)$ точки F, F_t^*, соответствующие векторам $r(X)$, $r_t^*(X)$, $X \in U$, зададим отображение $\psi : F_t^* \to F$ формулой $\psi[M_t(X)] = M(X)$, и пусть $\mathscr{L}$ — допустимое сечение F_t^*, лежащее в плоскости P, $\mathscr{L}_1 = \psi(\mathscr{L})$, $\mathscr{L}_2$ — проекция $\mathscr{L}_1$ на P, f — гомеоморфизм $[0,1]$ на $\mathscr{L}$, p — проектирование на плоскость P, $\gamma = p \circ \psi \circ f$. Полагая $h = \frac{3t^2}{Q_1}$, на основании теоремы 1 заключаем, что для $\mathscr{L}$, γ и h выполнены условия п. 2°. Так как $s(\gamma) \leq s(\mathscr{L}_1)$, а ввиду (4) $s(\mathscr{L}_1) = \frac{s_0}{\sqrt{1+\frac{1}{2}t^2}}$, из (2) следует, что

$$s_0\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}t^2}}\right) < \frac{15t^2}{Q_1}, \tag{5}$$

а ввиду неравенства $t \leq 1$ имеем $\frac{s_0 t^2}{6} < \frac{15t^2}{Q_1}$ и $Q_1 < \frac{90}{s_0}$ вопреки (3). Поэтому поверхность F_t^* не является локально выпуклой.

4°**.** Преобразуем каждую поверхность F_t^* в поверхность F_t, задаваемую функцией $r_t = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}t^2}} r_t^*$. В силу (4), свойств семейства F_t^* и п. 3° семейство F_t обладает требуемыми свойствами.

Теорема 3. *Пусть P — плоскость, задаваемая в декартовых координатах x, y, z уравнением $z = 0$, η — фиксированное число, $0 < \eta < 1/13$. Существует семейство поверхностей F_t, задаваемых вектор-функциями $r_t(x, y)$, $t \in [0, \alpha_1]$, определенными при всех x, y, обладающее такими свойствами:*

1) $F_t \in \mathscr{L}^{1,\frac{1}{13}-\eta}$, *при этом постоянная* K *не зависит от* t;

2) *сопоставление точек* P *и* F_t *с одинаковыми координатами* x, y *является изометрическим отображение* F_t *на* P;

3) *вектор-функции*

$$r_t(x,y), \quad n_t(x,y) = \frac{\frac{\partial r_t}{\partial x} \times \frac{\partial r_t}{\partial y}}{\left|\frac{\partial r_t}{\partial x} \times \frac{\partial r_t}{\partial y}\right|}$$

непрерывны по t *равностепенно относительно* x, y;

4) *при всех* $t \neq 0$ *поверхности* F_t *не содержат прямых.*

Доказательство. Применим деформационную теорему к плоскости P, полагая $m_{11}\,dx^2 + 2m_{12}\,dxdy + m_{22}\,dy^2 \equiv dx^2 + dy^2$, $Q_1 = 1$. Пусть $\alpha^{(0)} > 0$ соответствует выбранным значениям η и Q_1. Поверхность F_t, $t \in [0, \alpha^{(0)}]$, получается из F_t^* в результате подобного преобразования с произвольным фиксированным центром подобия и коэффициентом подобия $1/\sqrt{1+\frac{t^2}{2}}$. Свойства 1–3 поверхностей F_t очевидны. Для проверки свойства 4 допустим, что на F_t лежит прямая l. Тогда на F_t^* ей соответствует прямая l_1, а на P — прямая l_2. Возьмем на l_2 отрезок длины s_0. Соответствующий ему отрезок на l_1 имеет длину $s_0\sqrt{1+\frac{t^2}{2}}$. Следовательно, разность длин этих отрезков равна

$$s_0\left(\sqrt{1+\frac{t^2}{2}} - 1\right) = \frac{t^2 s_0}{2\bigl(1+\sqrt{1+\frac{t^2}{2}}\bigr)} > \frac{t^2 s_0}{2\bigl(1+\sqrt{1+\frac{\alpha^{(0)2}}{2}}\bigr)}.$$

С другой стороны, расстояния между концами отрезков не превосходят $3t^2$, и потому та же самая разность не превосходит $6t^2$. В результате имеем неравенство $s_0/2\bigl(1+\sqrt{1+\alpha^{(0)2}/2}\bigr) \le 6$. Если $s_0 = 13\bigl(1+\sqrt{1+\alpha^{(0)2}/2}\bigr)$, то последнее неравенство противоречиво. Теорема доказана.

Из теорем 2, 3 следует, что в классе $C^{1,\beta}$, $\beta < 1/13$, существуют поверхности с аналитической метрикой положительной или нулевой кривизны, не являющиеся поверхностями ограниченной внешней кривизны.

Отметим, что в теореме 2 содержится следующий результат: существует поверхность с аналитической метрикой положительной кривизны, не являющаяся локально выпуклой (а следовательно, и регулярной), такая, что для любой пары точек $M, N \in F$ имеем $\frac{Q(M,N)}{[\rho_F(M,N)^{1/13-\eta}} < K$, где $K > 0$, $\eta > 0$ — фиксированные числа. Этот результат указывает верхнюю границу степени «вынужденного сморщивания» выпуклой поверхности при изгибаниях с потерей локальной выпуклости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948.
2. *Александров А. Д., Залгаллер В. А.* Двумерные многообразия ограниченной кривизны. I // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1962. Т. 63. С. 3–259.
3. *Александров А. Д., Залгаллер В. А.* Двумерные многообразия ограниченной кривизны. II // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1965. Т. 76. С. 1–152.
4. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1989.
5. *Борисов Ю. Ф., Шефель С. З.* Поверхности ограниченной внешней и положительной гауссовой кривизны // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 2. С. 259–261.
6. *Нэш Дж.* C'-изометрические вложения // Математика. 1957. Т. 1, № 2. С. 3–16.
7. *Кейпер Н. Х.* О C'-изометрических вложениях // Математика. 1957. Т. 1, № 2. С. 17–28.

8. *Борисов Ю. Ф.* Параллельный перенос на гладкой поверхности. I // Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия. 1958. Т. 2, № 7. С. 160–171.
9. *Борисов Ю. Ф.* Параллельный перенос на гладкой поверхности. II // Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия. 1958. Т. 4, № 19. С. 45–54.
10. *Борисов Ю. Ф.* Параллельный перенос на гладкой поверхности. III // Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия. 1959. Т. 1, № 1. С. 34–50.
11. *Борисов Ю. Ф.* К вопросу о параллельном переносе на гладкой поверхности и о связи пространственной формы гладких поверхностей с их внутренней геометрией // Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия. 1960. Т. 4, № 19. С. 127–129.
12. *Борисов Ю. Ф.* О связи пространственной формы гладких поверхностей с их внутренней геометрией // Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия. 1959. Т. 2, № 13. С. 20–25.

Статья поступила 4 июля 2002 г.

Борисов Юрий Федорович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090