Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 515.16

ТОРИЧЕСКИЕ УЗЛЫ И МНОГООБРАЗИЯ ДАНВУДИ

Х. Айдын, И. Гюльтекин, М. Мулаццани

Аннотация: Получено явное представление в виде многообразия Данвуди всех циклических разветвленных накрытий торических узлов типа $(p, mp \pm 1)$ с $p > 1$, $m > 0$.

Ключевые слова: торические узлы, сплетения Хегора, многообразия Данвуди.

1. Введение

В последнее время построено много интересных примеров циклических разветвленных накрытий узлов в $\mathbf{S}^3$, допускающих циклическое представление для фундаментальных групп (см. [1–7]). Для исследования этих соотношений М. Дж. Данвуди ввел в [2] класс 3-многообразий, зависящих от шести параметров, с циклически представимыми фундаментальными группами. В [8] показано, что все эти многообразия оказываются строго циклическими разветвленными накрытиями $(1,1)$-узлов в линзовых пространствах (возможно, $\mathbf{S}^3$). Кроме того, получено явное представление Данвуди для всех циклических разветвленных накрытий двухмостовых узлов.

В этой статье мы устанавливаем аналогичный результат для широкого класса торических узлов, являющихся вместе с двухмостовыми узлами наиболее важными примерами $(1,1)$-узлов в $\mathbf{S}^3$. Получены параметры Данвуди для всех циклических разветвленных накрытий торических узлов типа $(p, mp{\pm}1)$ с $p > 1$, $m > 0$, тем самым для всех торических узлов с числом мостов не больше 4. Такие многообразия с другой точки зрения рассмотрены в [9] и [1].

Мы отсылаем к [10, 11] за информацией по теории узлов и циклических разветвленных накрытий узлов и к [12] за деталями по циклическим представлениям групп.

2. (1,1)-Узлы и многообразия Данвуди

Узел K в 3-многообразии N^3 называют $(1,1)$-*узлом*, если существует сплетение Хегора первого рода

$$(N^3, K) = (T, A) \cup_\varphi (T', A'),$$

где T и T' — полнотории, $A \subset T$ и $A' \subset T'$ — собственно вложенные тривиальные дуги и $\varphi : (\partial T', \partial A') \to (\partial T, \partial A)$ — склеивающий гомеоморфизм (рис. 1). Очевидно, N^3 оказывается линзовым пространством $L(p,q)$ (включая $\mathbf{S}^3 = L(1,0)$).

Известно, что семейство $(1,1)$-узлов содержит все торические узлы и все двухмостовые узлы в $\mathbf{S}^3$. Недавно были исследованы некоторые топологические свойства $(1,1)$-узлов (см. ссылки в [13]).

$$\xleftarrow{\varphi}$$

Рис. 1. $(1,1)$-декомпозиция.

Рис. 2.

Алгебраическое представление $(1,1)$-узлов получено в [9, 13], где показано, что существует естественное сюръективное отображение

$$\psi \in PMCG_2(\partial T) \mapsto K_\psi \in \mathscr{K}_{1,1}$$

из чистой группы классов отображений (pure mapping class group) дважды проколотого тора $PMCG_2(\partial T)$ на класс $\mathscr{K}_{1,1}$ всех $(1,1)$-узлов.

Фундаментальная группа внешности $(1,1)$-узла K_ψ явно может быть получена с помощью ее представления ψ. Пусть $\alpha, \beta, \gamma \subset \partial T$ — лупы, изображенные на рис. 2. Они представляют множество свободных порождающих для $\pi_1(\partial T - \partial A, *)$, а α и γ свободно порождают $\pi_1(T - A, *)$. Непосредственное применение теоремы Зейферта — Ван Кампена дает следующий результат.

Лемма 1 [9]. *Фундаментальная группа внешности $(1,1)$-узла $K_\psi \subset L(p,q)$ допускает представление*

$$\pi_1(L(p,q) - K_\psi, *) = \langle\, \alpha, \gamma \,|\, r(\alpha,\gamma) \,\rangle,$$

где $r(\alpha,\gamma)$ — класс гомотопий $i(\psi(\beta))$, а $i : (\partial T, \partial A) \to (T, A)$ — естественное вложение.

Следовательно, все $(1,1)$-узлы в $\mathbf{S}^3$ простые [14] и могут быть тем самым классифицированы с точностью до зеркального отражения посредством их фундаментальных групп (см. [10, с. 76]). Получено много результатов о взаимосвязях циклически представимых групп и строго циклических разветвленных накрытий $(1,1)$-узлов (см. определение в [9]). В [15] доказано, что каждое n-листное строго циклическое разветвленное накрытие $(1,1)$-узла допускает диаграмму Хегора рода n, которая раскрывает циклическое представление для фундаментальной группы. Этот результат установлен в [9], где дан конструктивный алгоритм циклического представления.

Семейство многообразий Данвуди введено в [2] как класс трехвалентных плоских графов (называемых *диаграммами Данвуди*) с циклической симметрией, зависящей от шести целых чисел a, b, c, n, r, s таких, что $n > 0$, $a, b, c \geq 0$ и

Рис. 3. Диаграмма Данвуди.

$a+b+c > 0$. Для некоторых значений этих параметров, называемых *допустимыми*, диаграмма Данвуди $D(a, b, c, n, r, s)$ оказывается диаграммой Хегора. Тем самым определяется широкий класс замкнутых ориентируемых 3-многообразий $M(a, b, c, n, r, s)$ с циклически представляемыми фундаментальными группами.

Точнее, допустимая диаграмма Данвуди $D(a, b, c, n, r, s)$ является открытой диаграммой Хегора рода n (рис. 3), которая содержит n верхних циклов $C'_1, \dots, C'_n$ и n нижних циклов $C''_1, \dots, C''_n$, каждый из которых имеет $d = 2a + b + c$ вершин. Для каждого $i = 1, \dots, n$ цикл C'_i (соответственно C''_i) связан с циклом C'_{i+1} (соответственно C''_{i+1}) посредством a параллельных дуг, с циклом C''_i посредством c параллельных дуг и с циклом C''_{i+1} через b параллельных дуг. Обозначим через $\mathscr{B}$ множество всех этих дуг. Цикл C'_i склеен с циклом C''_{i-s} (индексы по модулю n), так что одинаково отмеченные вершины отождествляются. Заметим, что параметры r и s могут рассматриваться по модулю d и n соответственно. Так как правило отождествления и диаграмма инвариантны относительно циклических действий порядка n, многообразие Данвуди допускает циклическую симметрию порядка n. Очевидно, многообразие Данвуди $M(a, b, c, 1, r, 0)$ гомеоморфно линзовому пространству (возможно, $\mathbf{S}^3$), поскольку оно допускает сплетение Хегора первого рода.

Характеризацию всех многообразий Данвуди как строго циклических разветвленных накрытий $(1,1)$-узлов дает следующее

Предложение 2 [8]. *Многообразие Данвуди $M(a, b, c, n, r, s)$ представляет собой n-листное строго циклическое накрывающее линзовое пространство $M(a, b, c, 1, r, 0)$ (возможно, $\mathbf{S}^3$), разветвленный над $(1,1)$-узлом $K(a, b, c, r)$, зависящим только от целых a, b, c, r.*

Верен и обратный этому результат, как доказано в [16]. Тем самым класс многообразий Данвуди совпадает с классом строго циклических разветвленных накрытий $(1,1)$-узлов.

$(1,1)$-Узлы $K(a, b, c, r)$ из предложения 2 допускают естественное $(1,1)$-раз-

Рис. 4. $D(a, b, c, 1, r, 0)$.

ложение $(T, A) \cup_\varphi (T', A')$, изображенное на рис. 4, где дуги $\mathscr{B}$ составляют кривую $\varphi(\beta') = \psi(\beta)$, ψ — элемент $PMCG_2(\partial T)$, соответствующий φ. Фундаментальная группа внешности $K(a, b, c, r)$ может быть непосредственно воспринята как диаграмма Данвуди $D(a, b, c, 1, r, 0)$. Отношение $r(\alpha, \gamma)$ представления из леммы 1 получается прохождением вдоль дуг $\mathscr{B}$ согласно фиксированной ориентации: с каждой дугой свяжем слово в α и γ, представляющее его класс гомотопий в фундаментальной группе $T - A$ (рис. 5), где собственно вложенный диск с границей C рассматривается как сжатый к базовой точке $*$.

3. Основные результаты

Мы интересуемся задачей нахождения параметров Данвуди циклического разветвленного накрытия важнейших классов $(1,1)$-узлов, в частности, когда узел лежит в $\mathbf{S}^3$. Такого типа результаты получены в [8, теорема 8] для всех двухмостовых узлов.

Установим аналогичный результат для торических узлов $\mathbf{t}(p, mp \pm 1)$ с $m > 0$ и $p > 1$.

Предложение 3. *Для всех $m > 0$ и $p > 1$ выполнены следующие утверждения:*

1) *$K(1, p-2, 2mp-2m-p+1, p)$ — торический узел $\mathbf{t}(p, mp+1)$ для всех $m > 0$ и $p > 1$;*

2) *$K(1, p-2, 2mp-2m-p-1, -3p+4)$ — торический узел $\mathbf{t}(p, mp-1)$ для всех $m > 1$ и $p > 1$.*

Доказательство. 1. Пусть $K = K(1, p-2, 2mp-2m-p+1, p)$. На рис. 6 изображена диаграмма Данвуди $D = D(1, p-2, 2mp-2m-p+1, 1, p, 0)$. Число вершин каждого цикла равно $d = 2m(p-1)+1$. Начиная в вершине C'' с меткой d, двигаемся вдоль всех дуг $\mathscr{B}$ с описанной ориентацией, получая слово

Рис. 5.

Рис. 6. $D(1, p-2, 2mp-2m-p+1, 1, p, 0)$.

Рис. 7. $D(1, p-2, 2mp-2m-p-1, 1, -3p+4, 0)$.

$w = \alpha^{m(p-1)}\alpha\gamma^{-1}\alpha^{-1}(\alpha^{-(m-1)}\gamma^{-1}\alpha^{-1})^{p-2}\alpha^{-(m-1)}\gamma^{-1}$. Тогда, поскольку условие из [8, следствие 4] выполнено, D допустима. Кроме того, фундаментальная группа $M(1, p-2, 2mp-2m-p+1, 1, p, 0)$ совпадает с $\langle \alpha, \gamma \mid w, \gamma \rangle$, которая тривиальна. Тем самым $M(1, p-2, (p-1)(2m-1), 1, p, 0) \cong \mathbf{S}^3$. Далее, $\pi_1(\mathbf{S}^3 - K) = \langle \alpha, \gamma \mid w \rangle$. Так как $w = \alpha^{m(p-1)+1}(\gamma^{-1}\alpha^{-m})^{p-1}\gamma^{-1} = \alpha^{-m}\alpha^{mp+1}(\gamma^{-1}\alpha^{-m})^p\alpha^m$, имеем $\pi_1(\mathbf{S}^3 - K) \cong \langle \alpha, \gamma \mid w' \rangle$ с $w' = \alpha^{mp+1}(\gamma^{-1}\alpha^{-m})^p$. Очевидно, эта группа изоморфна группе $\langle x, y \mid x^{mp+1}y^{-p} \rangle$, являющейся группой торических узлов $\mathbf{t}(p, mp+1)$. Следовательно, K есть в точности $\mathbf{t}(p, mp+1)$.

2. Доказательство проводится аналогично предыдущему. Пусть

$$K = K(1, p-2, 2mp-2m-p-1, -3p+4).$$

На рис. 7 изображена диаграмма Данвуди

$$D = D(1, p-2, 2mp-2m-p-1, 1, -3p+4, 0).$$

Число вершин в каждом цикле равно $d = 2m(p-1)-1$ (отметим, что метки совпадают по модулю d). Начиная в вершине из C'' с меткой d, проходим вдоль всех дуг из $\mathscr{B}$, получая слово

$$w = \alpha^{m-1}(\alpha^m)^{p-3}\alpha^{m-1}\alpha\gamma^{-1}\alpha^{-1}\alpha^{-(m-1)}(\gamma^{-1}\alpha^{-1}\alpha^{-(m-1)})^{p-2}\gamma^{-1}.$$

Тем самым D допустима. Кроме того, $M(1, p-2, 2mp-2m-p-1, 1, -3p+4, 0)$ изоморфна $\mathbf{S}^3$, так как ее фундаментальная группа тривиальна. Поскольку

$$w = \alpha^{m(p-1)-1}(\gamma^{-1}\alpha^{-m})^{p-1}\gamma^{-1} = \alpha^{mp-1}(\alpha^{-m}\gamma^{-1})^p,$$

группа $\pi_1(\mathbf{S}^3 - K) \cong \langle \alpha, \gamma \mid w\rangle$ изоморфна группе $\langle x, y \mid x^{mp-1}y^{-p}\rangle$. Поэтому K — торический узел $\mathbf{t}(p, mp-1)$.

Следствие 4. 1. *Для всех $m > 0$ и $p > 1$ n-листное циклическое разветвленное накрытие торического узла $\mathbf{t}(p, mp+1)$ является многообразием Данвуди $M(1, p-2, 2mp-2m-p+1, n, p, p)$.*

2. *Для всех $m > 1$ и $p > 1$ n-листное циклическое разветвленное накрытие торического узла $\mathbf{t}(p, mp-1)$ является многообразием Данвуди $M(1, p-2, 2mp-2m-p-1, n, -3p+4, -p)$.*

Доказательство. Согласно предложению 2 нам надо только подобрать шестой параметр s из набора параметров. Должно быть выполнено соотношение $q_\sigma + sp_\sigma \equiv 0$ по модулю n для всех n, где p_σ — число дуг в $\mathscr{B}$, направленных из C' в C'', минус число дуг, направленных из C'' в C', и q_σ — число дуг из $\mathscr{B}$, направленных справа налево, минус число дуг, направленных слева направо в диаграмме Данвуди (см. [8, с. 385]). Иными словами, $-p_\sigma$ — общий показатель у α в w и $-q_\sigma$ — общий показатель у γ в w. В первом случае $q_\sigma = p$ и $p_\sigma = -1$, поэтому $s = p$. Во втором случае $q_\sigma = p$ и $p_\sigma = 1$, поэтому $s = -p$.

Распространение предыдущих результатов на весь класс торических узлов с помощью той же техники доказательства представляется довольно сложным, хотя некоторые частные результаты получены. Возможным альтернативным методом может служить использование индукции по числу шагов в алгоритме Евклида нахождения наибольшего общего делителя параметров торического узла. При таком подходе результаты настоящей статьи могут представлять собой первый шаг индукции.

Благодарности. Настоящая работа была частично написана во время визита третьего из авторов на факультет математики университета Ататюрка в Эрзеруме (Турция), поддержанного фондом TOKTEN/UNISTAR, и выполнена при поддержке фонда G.N.S.A.G.A. of I.N.d.A.M. (Италия) и фонда университета Болоньи для избранных исследовательских тем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cavicchioli A., Hegenbarth F., Kim A. C.* A geometric study of Sieradsky groups // Algebra Colloq. 1998. V. 5. P. 203–217.

2. *Dunwoody M. J.* Cyclic presentations and 3-manifolds // Proc. Intern. Conf., Groups-Korea '94. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1995. P. 47–55.
3. *Helling H., Kim A. C., Mennicke J. L.* A geometric study of Fibonacci groups // J. Lie Theory. 1998. V. 8. P. 1–23.
4. *Kim A. C.* On the Fibonacci group and related topics // Contemp. Math. 1995. V. 184. P. 231–235.
5. *Kim A. C., Kim Y., Vesnin A.* On a class of cyclically presented groups // Proc. Intern. Conf., Groups-Korea '98. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2000. P. 211–220.
6. *Maclachlan C., Reid A. W.* Generalised Fibonacci manifolds // Transform. Groups. 1997. V. 2. P. 165–182.
7. *Vesnin A., Kim A. C.* The fractional Fibonacci groups and manifolds // Sib. Math. J. 1998. V. 39. P. 655–664.
8. *Grasselli L., Mulazzani M.* Genus one 1-bridge knots and Dunwoody manifolds // Forum Math. 2001. V. 13. P. 379–397.
9. *Cattabriga A., Mulazzani M.* Strongly-cyclic branched coverings of $(1, 1)$-knots and cyclic presentation of groups // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 2003. To appear. (См. также arXiv:math.GT/0110042).
10. *Kawauchi A.* A survey on knot theory. Basel: Birkhäusen Verl., 1996.
11. *Rolfsen D.* Knots and links. Berkeley: Publ. Perish, 1976.
12. *Johnson D. L.* Topics in the theory of group presentations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; 42).
13. *Cattabriga A., Mulazzani M.* $(1, 1)$-Knots via the mapping class group of the twice punctured torus // Adv. Geom. 2003. To appear. (См. также arXiv:math.GT/0205138).
14. *Norwood F. H.* Every two-generator knot is prime // Math. Soc. 1982. V. 86. P. 143–147.
15. *Mulazzani M.* Cyclic presentations of groups and cyclic branched coverings of $(1, 1)$-knots // Bull. Korean Math. Soc. 2003. V. 40. P. 101–108.
16. *Cattabriga A., Mulazzani M.* All strongly-cyclic branched coverings of $(1, 1)$-knots are Dunwoody manifolds. (Preprint). 2003.

Статья поступила 28 февраля 2003 г.

Hüseyin Aydin
Atatürk University, Faculty of Art and Sciences,
Department of Mathematics, Erzurum, Turkey

Inci Gültekyn
Atatürk University, Faculty of Art and Sciences, Department of Mathematics, Erzurum, Turkey
inciakarg@yahoo.com

Michele Mulazzani
Department of Mathematics and C.I.R.A.M., University of Bologna,
Bologna, Italy
aydinh@atauni.edu.tr