Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 517.965

РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ УСРЕДНЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Лакриб, Т. Сари

Аннотация: Усилены результаты об усреднении функциональных дифференциальных уравнений при довольно общих предположениях. С помощью нестандартного анализа дано обобщение аналогичных результатов первого из авторов в случае дифференциального уравнения с запаздыванием специального вида.

Ключевые слова: метод усреднения, функциональные дифференциальные уравнения, экспоненциальная устойчивость, нестандартный анализ.

1. Введение

Известно, что метод усреднения является мощным средством исследования многих задач с возмущением в нелинейных колебаниях и отдельных вопросов небесной механики. Есть обширная литература, относящаяся к обыкновенным дифференциальным уравнениям (см. [1–7] и библиографию в них). Этот метод распространяется также на функциональные дифференциальные уравнения [8–13] вида

$$\dot{x}(t) = \varepsilon f(t, x_t), \tag{1.1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр и $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ для $\theta \in [-r, 0]$. Предположим, что существует предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(\tau, u)\, d\tau = f^o(u), \tag{1.2}$$

и рассмотрим присоединенное усредненное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^o(\tilde{y}), \tag{1.3}$$

где $\tilde{y}(\theta) = y$ для $\theta \in [-r, 0]$ и $y \in \mathbb{R}^d$. При подходящих условиях показано, что если ε достаточно мало, то разность между решениями x и y уравнений (1.1) и (1.3) с одними и теми же начальными данными меньше чем $1/\varepsilon$.

Заметим, что после замены $t \mapsto t/\varepsilon$ и $x(t/\varepsilon) = z(t)$ уравнение (1.1) превращается в уравнение

$$\dot{z}(t) = f(t/\varepsilon, z_{t,\varepsilon}), \tag{1.4}$$

где $z_{t,\varepsilon}(\theta) = z(t+\varepsilon\theta)$ для $\theta \in [-r, 0]$. Последнее является уравнением с малым запаздыванием.

В данной работе мы обосновываем метод усреднения для функциональных дифференциальных уравнений, которые могут быть представлены в виде

$$\dot{x}(t) = f(t/\varepsilon, x_t). \tag{1.5}$$

А именно, при довольно общих предположениях мы покажем, что решения (1.5) остаются близкими к решениям усредненного уравнения

$$\dot{y}(t) = f^o(y_t), \tag{1.6}$$

где f^o определяется в (1.2). Заметим, что (1.6) является функциональным дифференциальным уравнением, а не обыкновенным дифференциальным уравнением.

Среди работ, посвященных применению метода усреднения для (1.5), укажем статью [11]. В ней авторы распространяют метод усреднения на абстрактные эволюционные уравнения в банаховых пространствах. В частности, они записывают (1.5) в виде обыкновенного дифференциального уравнения в бесконечномерном банаховом пространстве и формально используют это обстоятельство в дальнейшем. Наш подход отличен от указанного, поскольку весь анализ проводится в естественном фазовом пространстве. Под влиянием работы второго из авторов [7], где в терминах нестандартного анализа был предложен метод усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений при слабых условиях, первый из авторов указал в [14] естественное распространение метода усреднения на дифференциальные уравнения с запаздыванием специального вида

$$\dot{x}(t) = f(t/\varepsilon, x(t - r)).$$

С помощью той же техники наш основной результат обобщает аналогичный результат из [14] на функциональные дифференциальные уравнения вида (1.5), после чего его доказательство непосредственно соотносится с доказательством из [14].

Структура настоящей работы такова. В разд. 2 в теореме 2.2 изложен основной результат, касающийся близости решений (1.5) и (1.6) на конечном интервале времени, и в теореме 2.5 исследовано поведение решения (1.5) на длинных временных промежутках. Это делается в предположении, что (1.6) имеет экспоненциально устойчивое равновесие. Для такого случая идея доказательства совпадает с предложенной в [6]. Доказательства теорем 2.2 и 2.5 выполнены в рамках робинсоновского нестандартного анализа [15] в его аксиоматической форме, а именно в рамках теории внутренних множеств Нельсона [16]. Для удобства в разд. 3.1 мы даем краткую информацию об IST и затем в разд. 3.2 предлагаем нестандартные переформулировки теорем 2.2 и 2.5 соответственно. Наконец, разд. 4 мы начинаем с предварительных лемм, а затем даем доказательства теорем 3.6 и 3.7.

2. Обозначения, условия и результаты об усреднении

В этом разделе мы введем обозначения, сформулируем предположения и сообщим наши результаты об усреднении функциональных дифференциальных уравнений.

Пусть $r \geq 0$ — заданная константа и $\mathscr{C}_o = \mathscr{C}([-r, 0], \mathbb{R}^d)$ — банахово пространство непрерывных функций из $[-r, 0]$ в $\mathbb{R}^d$ с равномерной нормой

$$|\phi| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|, \quad \phi \in \mathscr{C}_o.$$

Мы будем использовать одинарные вертикальные черточки для обозначения норм в разных пространствах, не опасаясь путаницы. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и $L > t_0$. Если $x : [t_0 - r, L] \to \mathbb{R}^d$ — непрерывная функция и $t \in [t_0, L]$, то $x_t \in \mathscr{C}_o$ определяется равенством

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad \theta \in [-r, 0].$$

Примем следующие предположения.

(H1) Функционал $f : \mathbb{R} \times \mathscr{C}_o \to \mathbb{R}^d$ в (1.5) ограничен и непрерывен.

(H2) Непрерывность $f = f(\tau, u)$ по $u \in \mathscr{C}_o$ равномерна относительно $\tau \in \mathbb{R}$.

(H3) Для каждого $u \in \mathscr{C}_o$ существует предел

$$f^o(u) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(\tau, u)\, d\tau.$$

(H4) Усредненное уравнение (1.6) обладает единственным решением при заданных начальных условиях.

Для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\phi \in \mathscr{C}_0$ решение (1.6) такое, что $y_{t_0} = \phi$, обозначается через $y = y(\cdot; t_0, \phi)$. Оно определено на $J = [t_0 - r, +\infty)$.

Замечание 2.1. В предположении (H4) подразумеваем существование решений (1.6). Мы обоснуем это апостериори. А именно, в лемме 4.1 будет показано, что f^o непрерывна, так что существование будет обеспечено.

При сформулированных предположениях установим следующий основной результат о близости решений (1.5) и (1.6) с одинаковыми начальными условиями.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (H1)–(H4). *Предположим, что* $t_0 \in \mathbb{R}$ *и* $\phi \in \mathscr{C}_0$. *Пусть* $y = y(\cdot; t_0, \phi)$ *— решение* (1.6). *Тогда для любых* $L > t_0$ *и* $\delta > 0$ *существует* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(L, \delta) > 0$ *такое, что для* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *любое решение* x *уравнения* (1.5) *с* $x_{t_0} = \phi$ *определено по крайней мере на* $[t_0 - r, L]$ *и для* $t \in [t_0, L]$ *выполнено неравенство* $|x(t) - y(t)| < \delta$.

Можно распространить технику усреднения и на весь промежуток (будущего) времени, если начальная функция решения (1.6) лежит в области экспоненциальной устойчивости экспоненциально устойчивого равновесия. Имея это в виду, сначала напомним понятие экспоненциальной устойчивости равновесия.

Предположим, что y_e — равновесие в (1.6), т. е. $f^o(y_e) = 0$.

Определение 2.3. Равновесие y_e называют *экспоненциально устойчивым*, если существуют b, K и $\lambda > 0$ такие, что для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\phi \in \mathscr{C}_o$ решение $y = y(\cdot; t_0, \phi)$ уравнения (1.6), для которого $|\phi - y_e| < b$, определено на $[t_0 - r, +\infty)$ и для $t \geq t_0$ имеет место неравенство $|y(t) - y_e| \leq K e^{-\lambda(t-t_0)} |\phi - y_e|$.

Замечание 2.4. Шар $\mathscr{B}$ с центром в y_e и радиусом b, в котором устойчивость экспоненциальна, будем называть *областью экспоненциальной устойчивости* y_e.

В следующей теореме мы докажем возможность аппроксимации решений уравнений (1.5) и (1.6) с одинаковыми начальными условиями на всем промежутке времени.

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия* (H1)–(H4). *Предположим, что* $t_0 \in \mathbb{R}$ *и* $\phi \in \mathscr{C}_0$. *Пусть* y_e *— равновесие в* (1.6). *Предположим, кроме того, что*

(H5) y_e *экспоненциально устойчиво;*

(H6) *ϕ лежит в $\mathscr{B}$.*

Пусть $y = y(\cdot; t_0, \phi)$ — решение уравнения (1.6). *Тогда для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$ такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ любое решение x уравнения* (1.5) *с $x_{t_0} = \phi$ определено на $[t_0 - r, +\infty)$ и для $t \geq t_0$ выполнено неравенство $|x(t) - y(t)| < \delta$.*

3. Нестандартные результаты об усреднении

3.1. Теория внутренних множеств: краткая информация. В IST (*теории внутренних множеств*) мы добавляем к обычной математике (например, ZFC) новый неопределяемый унарный предикатный символ «st» (читаемый «стандартный»). Будем называть *внутренними* формулы IST, не содержащие предиката «st»; в противном случае будем называть их *внешними*. Таким образом, внутренние формулы — это формулы теории ZFC. Аксиомы IST содержат все аксиомы ZFC, использующие внутренние формулы (иными словами, IST — расширение ZFC), и, кроме того, еще три новые дополнительные, регулирующие использование предиката. Все теоремы в ZFC остаются верными и в IST, т. е. теория внутренних множеств является консервативным расширением ZFC: каждая внутренняя теорема IST будет теоремой ZFC. Некоторые теоремы, доказуемые в IST, являются внешними, но могут быть переформулированы так, что они становятся внутренними. Действительно, есть алгоритм (хорошо известный редуктивный алгоритм Нельсона) для перевода каждой внешней формулы $F(x_1, \dots, x_n)$ в IST, не содержащей свободных переменных, отличных от $x_1, \dots, x_n$, во внутреннюю формулу $F'(x_1, \dots, x_n)$ с теми же свободным переменными таким образом, что $F \equiv F'$, т. е. $F \iff F'$ для всех стандартных значений свободных переменных. Иными словами, каждый результат, который может быть формализован в IST формулой $F(x_1, \dots, x_n)$, эквивалентен классическому свойству $F'(x_1, \dots, x_n)$ при условии, что параметры $x_1, \dots, x_n$ ограничены стандартными значениями. Приведем редукцию часто встречающейся формулы $\forall x\ (\forall^{\mathrm{st}} y\ A \Longrightarrow \forall^{\mathrm{st}} z\ B)$, где A и B суть внутренние формулы:

$$\forall x\ (\forall^{\mathrm{st}} y\ A \Longrightarrow \forall^{\mathrm{st}} z\ B)\ \equiv\ \forall z\ \exists^{\mathrm{fin}} y'\ \forall x\ (\forall y \in y'\ A \Longrightarrow B). \tag{3.1}$$

Записи $\forall^{\mathrm{st}} X$ и $\exists^{\mathrm{fin}} X$ означают $[\forall X, \mathrm{st}(X) \Longrightarrow \cdots]$ и $[\exists X, X \mathrm{finite}\ \& \dots]$ соответственно.

Вещественное число x называют *бесконечно малым* или *инфинитезимальным* и пишут $x \simeq 0$, если модуль $|x|$ меньше любого стандартного числа. Число называют *доступным*, если его модуль $|x|$ меньше некоторого стандартного вещественного числа, *недоступным* (обозначают $x \simeq \pm\infty$), если оно не является доступным. Число x называют *ощутимым*, если x не является доступным или бесконечно малым. Два вещественных числа x, y *бесконечно близки* (обозначается $x \simeq y$), если их разность $x - y$ инфинитезимальна.

Если x, y — точки стандартного метрического пространства E, то символ $x \simeq y$ означает, что расстояние между x и y бесконечно мало. Если в таком пространстве существует стандартное x_0 такое, что $x \simeq x_0$, то элемент x называют *околостандартным* в E, а стандартную точку x_0 называют *стандартной частью* x (она единственна) и обозначают ее символом ${}^o x$.

Мы не вправе использовать внешние формулы в схемах аксиом ZFC, в частности, не можем использовать внешние формулы для задания множеств. Обозначения $\{x \in \mathbb{R} : x \text{ доступно}\}$ или $\{x \in \mathbb{R} : x \simeq 0\}$ недопустимы. Более того, можно показать справедливость следующего факта.

Лемма 3.1. *Не существует подмножеств $\mathscr{L}$ и $\mathscr{I}$ в $\mathbb{R}$ таких, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнены условия: x лежит в $\mathscr{L}$ тогда и только тогда, когда число x доступно, или число x находится в $\mathscr{I}$ в том и только в том случае, если число x бесконечно мало.*

В классической математике иногда бывает так, что какое-то свойство предполагается или доказывается на некоторой области, а впоследствии замечается, что характер свойства и природа области несовместимы и на самом деле свойство должно выполняться в большей области. В этом же духе в нестандартном анализе результат леммы 3.1 часто используется для доказательства того, что выполнимость свойства наблюдается в области, большей, чем та, в которой оно было установлено. Предположим, мы видим, что A выполняется для каждого доступного x, тогда мы знаем, что A выполняется для некоторого бесконечно большого x, иначе мы можем положить $\mathscr{L} = \{x \in \mathbb{R} : A\}$. Это утверждение называют *принципом Коши*. Оно имеет следующее часто используемое применение.

Лемма 3.2 (лемма Робинсона). *Если g — вещественная функция такая, что $g(t) \simeq 0$ для всех доступных $t \geq 0$, то существует $\omega \simeq +\infty$ такое, что $g(t) \simeq 0$ для всех $t \in [0, \omega]$.*

Доказательство. Действительно, множество таких $l \in \mathbb{R}$, что $|g(t)| < 1/l$ при каждом $t \in [0, l]$, включает в себя все доступные l в $\mathbb{R}$ такие, что $l \geq 1$. Согласно принципу Коши это множество должно содержать некоторый бесконечно большой элемент ω. $\square$

Завершим этот раздел двумя другими применениями принципа Коши, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 3.3. *Если $\mathscr{P}(\cdot)$ — внутреннее свойство такое, что $\mathscr{P}(a)$ выполняется для всех ощутимых вещественных $a > 0$, то существует $0 < a_0 \simeq 0$ такое, что выполняется $\mathscr{P}(a_0)$.*

Лемма 3.4. *Пусть $h : I \to \mathbb{R}$ — функция такая, что $h(t) \simeq 0$ для всех $t \in I$. Тогда $\sup\{h(t) : t \in I\} \simeq 0$.*

Замечание 3.5. Дальнейшие сведения о применении нестандартного анализа в асимптотической теории дифференциальных уравнений можно найти в [17–24] и указанной там литературе.

3.2. Результаты об усреднении. Сначала дадим нестандартную формулировку теорем 2.2 и 2.5. Затем, используя алгоритм Нельсона, покажем, что результатами редукции теорем 3.6 и 3.7 служат соответственно теоремы 2.2 и 2.5.

Теорема 3.6. *Пусть $f : \mathbb{R} \times \mathscr{C}_o \to \mathbb{R}^d$ стандартно. Предположим, что выполнены условия теоремы 2.2. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\phi \in \mathscr{C}_o$ стандартны. Пусть $y = y(\cdot; t_0, \phi)$ — решение (1.6). Возьмем бесконечно малое $\varepsilon > 0$. Тогда для произвольного стандартного $L > t_0$ любое решение x уравнения (1.5) с $x_{t_0} = \phi$ определено по крайней мере на $[t_0 - r, L]$ и удовлетворяет свойству $x(t) \simeq y(t)$ для $t \in [t_0, L]$.*

Теорема 3.7. *Пусть $f : \mathbb{R} \times \mathscr{C}_o \to \mathbb{R}^d$ стандартно. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\phi \in \mathscr{C}_o$ — стандартные величины. Пусть y_e — стандартное равновесие в (1.6). Предположим, что выполнены все условия теоремы 2.5. Пусть $y = y(\cdot; t_0, \phi)$ — решение* *уравнения* (1.6). *Пусть* $\varepsilon > 0$ *бесконечно мало. Тогда любое решение* x *уравнения* (1.5) *с* $x_{t_0} = \phi$ *определено на* $[t_0 - r, +\infty)$ *и обладает свойством* $x(t) \simeq y(t)$ *для* $t \geq t_0$.

Доказательства теорем 3.6 и 3.7 будут даны в разд. 4. Теоремы 3.6 и 3.7 являются внешними утверждениями, ниже мы покажем, что применение алгоритма Нельсона к теореме 3.6 (теореме 3.7) приводит к теореме 2.2 (соответственно к теореме 2.5).

Редукция теоремы 3.6. Не уменьшая общности, можно считать $t_0 = 0$. Пусть $L > 0$ стандартно. Примем следующее сокращение. Пусть B символизирует формулу «если $\delta > 0$, то любое решение x уравнения (1.5) с $x_{t_0} = \phi$ определено по крайней мере на $[-r, L]$ и для $t \in [0, L]$ выполнено неравенство $|x(t) - y(t)| < \delta$». Тогда утверждение «любое решение x уравнения (1.5) с $x_{t_0} = \phi$ определено по крайней мере на $[-r, L]$, и для $t \in [0, L]$ выполнено $x(t) \simeq y(t)$» — это то же самое, что и высказывание $\forall^{\mathrm{st}} \delta B$. По теореме 3.6 имеем

$$\forall \varepsilon \ (\forall^{\mathrm{st}} \eta \varepsilon < \eta \Longrightarrow \forall^{\mathrm{st}} \delta B). \tag{3.2}$$

В этой формуле L стандартно и ε, η, δ строго положительны и вещественны. Согласно (3.1) формула (3.2) эквивалентна такой:

$$\forall \delta \exists^{\mathrm{fin}} \eta' \ \forall \varepsilon \ (\forall \eta \in \eta' \ \varepsilon < \eta \Longrightarrow B). \tag{3.3}$$

Для конечного множества η' высказывание $\forall \eta \in \eta' \ \varepsilon < \eta$ то же самое, что и $\varepsilon < \varepsilon_0$ для $\varepsilon_0 = \min \eta'$, и формула (3.3) принимает вид

$$\forall \delta \exists \varepsilon_0 \forall \varepsilon \ (\varepsilon < \varepsilon_0 \Longrightarrow B).$$

Таким образом, утверждение теоремы 2.2 выполнено. По принципу переноса оно выполнено для любого $L > 0$. $\square$

Редукция теоремы 3.7 к теореме 2.5 получается почти полным повторением процедуры редукции теоремы 3.6 к теореме 2.2 и предоставляется читателю.

4. Доказательства теорем 3.6 и 3.7

4.1. Предварительные сведения.

1. Докажем некоторые результаты, необходимые для доказательства теоремы 3.6.

Пусть $\varepsilon > 0$ бесконечно мало. Пусть $f : \mathbb{R} \times \mathscr{C}_o \to \mathbb{R}^d$ стандартно. Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.6. Внешние формулировки условий (H1), (H2), (H3) соответственно следующие.

(H1′) $\forall^{\mathrm{st}} \tau \in \mathbb{R} \ \forall^{\mathrm{st}} u \in \mathscr{C}_o \ \forall \tau' \in \mathbb{R} \ \forall u' \in \mathscr{C}_o \ (\tau' \simeq \tau, u' \simeq u \Rightarrow f(\tau, u') \simeq f(\tau, u))$. Существует стандартная константа M такая, что $|f(\tau, u)| \leq M \ \forall^{\mathrm{st}} \tau \in \mathbb{R}, \forall^{\mathrm{st}} u \in \mathscr{C}_o$ (и по принципу переноса неравенство выполнено для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $u \in \mathscr{C}_o$).

(H2′) $\forall^{\mathrm{st}} u \in \mathscr{C}_o \ \forall u' \in \mathscr{C}_o \ \forall \tau \in \mathbb{R} \ (u' \simeq u \Longrightarrow f(\tau, u') \simeq f(\tau, u))$.

(H3′) Существует стандартная функция $f^o : \mathscr{C}_o \to \mathbb{R}^d$ такая, что

$$f^o(u) \simeq \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, u) \, d\tau, \quad \forall^{\mathrm{st}} u \in \mathscr{C}_o \ \forall T \simeq +\infty.$$

Следующие леммы лежат в основе доказательства теоремы 3.6.

Лемма 4.1. *Функционал f^o непрерывен и удовлетворяет условию*

$$f^o(u) \simeq \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\tau, u)\,d\tau$$

для любого околостандартного $u \in \mathscr{C}_o$ и всех $T \simeq +\infty$.

Доказательство см. в [7, лемма 4, с. 106].

Лемма 4.2. *Существует $\mu > 0$ такое, что для всех доступных $t \geq 0$ и всех околостандартных $u \in \mathscr{C}_o$ найдется $\alpha > 0$ такое, что $\mu < \alpha \simeq 0$ и*

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\int\limits_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau, u)\,d\tau \simeq f^o(u).$$

Доказательство см. в [25, лемма 4.2, с. 7] и [7, лемма 5, с. 107]. □

Лемма 4.3. *Пусть $\phi \in \mathscr{C}_o$ стандартно. Пусть x — решение уравнения* (1.5) *с $x_0 = \phi$, и пусть I — максимальный интервал его существования. Пусть $L_1 > 0$ стандартное такое, что $[0, L_1] \subset I$. Тогда x S-непрерывно и околостандартно на $[0, L_1]$ и существуют $N_o \in \mathbb{N}$ и инфинитезимальное разбиение $\{t_n : n = 0, \dots, N_o + 1\}$ промежутка $[0, L_1]$ такое, что $t_0 = 0$, $t_{N_o} < L_1 \leq t_{N_o+1}$ и для $n \in \{0, \dots, N_o\}$ выполнены соотношения $t_{n+1} = t_n + \alpha_n \simeq t_n$ и*

$$\frac{\varepsilon}{\alpha_n}\int\limits_{t_n/\varepsilon}^{t_n/\varepsilon+\alpha_n/\varepsilon} f(\tau, x_{t_n})\,d\tau \simeq f^o(x_{t_n}). \tag{4.1}$$

Доказательство проведем в два этапа.

Шаг 1. Очевидно, функция x является S-непрерывной на $[0, L_1]$. В самом деле, пусть M — стандартное число, ограничивающее сверху абсолютные величины значений f на $\mathbb{R} \times \mathscr{C}_o$, и пусть $t, t' \in [0, L_1]$ таково, что $t \simeq t'$. Тогда

$$|x(t) - x(t')| \leq \int\limits_{t'}^{t} \left| f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right)\right| d\tau \leq M|t - t'| \simeq 0.$$

Кроме того, принимая во внимание то, что $\phi(0)$ — доступная величина, легко увидеть, что $x(t)$ околостандартно для всех $t \in [0, L_1]$.

Отсюда нетрудно вывести, что x_t околостандартно (в $\mathscr{C}_o$) для любого $t \in [0, L_1]$.

Шаг 2. Пусть $\mu > 0$ взято, как в лемме 4.2, и пусть $S_\mu = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \forall t \in [0, L_1]\ \exists \alpha \in \mathbb{R} : \mathscr{P}_\mu(t, \alpha, a)\}$, где

$$\mathscr{P}_\mu(t, \alpha, a) \equiv \mu < \alpha < a, \quad \left|\frac{\varepsilon}{\alpha}\int\limits_{t/\varepsilon}^{t/\varepsilon+\alpha/\varepsilon} f(\tau, x_t)\,d\tau - f^o(x_t)\right| < a.$$

По лемме 4.2 $a \in S_\mu$ для всех ощутимых вещественных чисел $a > 0$. Значит, по лемме 3.3 существует $0 < a_0 \simeq 0$ такое, что $a_0 \in S_\mu$, т. е. a_0 таково, что для любого $t \in [0, L_1]$ найдется $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $\mathscr{P}_\mu(t, \alpha, a_0)$. По аксиоме выбора существует функция $c : [0, L_1] \to \mathbb{R}$ такая, что $c(t) = \alpha$, т. е. $\mathscr{P}_\mu(t, c(t), a_0)$ выполнено для всех $t \in [0, L_1]$. Так как $c(t) > \mu$ для каждого $t \in [0, L_1]$, для завершения доказательства леммы достаточно положить $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{N_o} \leq L_1 < t_{N_o+1}$ с $t_{n+1} = t_n + c(t_n)$ для $n \in \{0, \dots, N_o\}$. □

Лемма 4.4. *Пусть $\phi \in \mathscr{C}_o$ стандартно. Пусть x — решение уравнения* (1.5) *с $x_0 = \phi$, и пусть I — его максимальный интервал существования. Пусть $L_1 > 0$ такое стандартное, что $[0, L_1] \subset I$. Тогда для каждого $t \in [0, L_1]$ имеет место соотношение*

$$\int\limits_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right) d\tau \simeq \int\limits_0^t f^o(x_\tau)\, d\tau.$$

Доказательство. По лемме 4.3 существует инфинитезимальное разбиение $\{t_n : n = 0, \ldots, N_o + 1\}$ промежутка $[0, L_1]$ такое, что $t_0 = 0$, $t_{N_o} < L_1 \le t_{N_o+1}$, $t_{n+1} = t_n + \alpha_n \simeq t_n$ и

$$\frac{\varepsilon}{\alpha_n} \int\limits_{t_n/\varepsilon}^{t_n/\varepsilon + \alpha_n/\varepsilon} f(\tau, x_{t_n})\, d\tau \simeq f^o(x_{t_n}). \tag{4.2}$$

Пусть $t \in [0, L_1]$ и $N \in \mathbb{N}$ такое, что $t_N < t \le t_{N+1}$. Имеем

$$\int\limits_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right) d\tau - \int\limits_0^t f^o(x_\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t \left(f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right) - f^o(x_\tau)\right) d\tau$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left(f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right) - f^o(x_\tau)\right) d\tau + \int\limits_{t_N}^{t} \left(f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right) - f^o(x_\tau)\right) d\tau. \tag{4.3}$$

Пусть $\alpha = \max\{\alpha_n : 0 \le n \le N-1\}$. По лемме 3.4 $\alpha \simeq 0$. Пусть M — стандартное число, ограничивающее модули значений функции f, а тем самым и f^o. Тогда

$$\left|\int\limits_{t_N}^{t} \left(f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right) - f^o(x_\tau)\right) d\tau\right| \le \int\limits_{t_N}^{t} \left(\left|f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right)\right| + |f^o(x_\tau)|\right) d\tau \le 2M\alpha \simeq 0.$$

Из (4.3) следует оценка

$$\int\limits_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right) d\tau - \int\limits_0^t f^o(x_\tau)\, d\tau \simeq \sum_{n=0}^{N-1} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left(f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right) - f^o(x_\tau)\right) d\tau. \tag{4.4}$$

По лемме 4.3 имеем $x_\tau \simeq x_{t_n}$ для $\tau \in [t_n, t_{n+1}]$ и x_{t_n} околостандартно, так что по условию (H2$'$) и лемме 4.1 (непрерывность f^o) получаем соответственно, что

$$f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right) = f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{t_n}\right) + \gamma_n(\tau), \quad f^o(x_\tau) = f^o(x_{t_n}) + \delta_n(\tau)$$

с $\gamma_n(\tau) \simeq 0 \simeq \delta_n(\tau)$. Значит, из (4.4) вытекает, что

$$\int\limits_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right) d\tau - \int\limits_0^t f^o(x_\tau)\, d\tau \simeq \sum_{n=0}^{N-1} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left(f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{t_n}\right) - f^o(x_{t_n}) + \eta_n(\tau)\right) d\tau$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left(f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{t_n}\right) - f^o(x_{t_n})\right) d\tau + \sum_{n=0}^{N-1} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \eta_n(\tau)\, d\tau.$$

где $\eta_n(\tau) = \gamma_n(\tau) + \delta_n(\tau)$, и тем самым

$$\int\limits_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right) d\tau - \int\limits_0^t f^o(x_\tau)\, d\tau \simeq \sum_{n=0}^{N-1} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left(f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{t_n}\right) - f^o(x_{t_n})\right) d\tau,$$

так как

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \eta_n(\tau)\, d\tau\right| \leq \bar{\eta} \sum_{n=0}^{N-1} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} d\tau = \bar{\eta}.t_N,$$

где величина $\bar{\eta} = \max\{\sup\{|\eta_n(\tau)| : t_n \leq \tau \leq t_{n+1}\} : 0 \leq n \leq N-1\}$ согласно лемме 3.4 является бесконечно малой и, стало быть, такова же и величина $\bar{\eta}.t_N$.

Пусть $n \in \{0, \ldots, N-1\}$. Ввиду (4.2) имеем

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left(f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{t_n}\right) - f^o(x_{t_n})\right) d\tau = \int\limits_{t_n}^{t_n+\alpha_n} f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{t_n}\right) d\tau - \alpha_n.f^o(x_{t_n})$$

$$= \varepsilon \int\limits_{t_n/\varepsilon}^{t_n/\varepsilon+\alpha_n/\varepsilon} f(\tau, x_{t_n})\, d\tau - \alpha_n.f^o(x_{t_n}) = \alpha_n \left(\frac{\varepsilon}{\alpha_n} \int\limits_{t_n/\varepsilon}^{t_n/\varepsilon+\alpha_n/\varepsilon} f(\tau, x_{t_n})\, d\tau - f^o(x_{t_n})\right)$$

$$= \alpha_n.\beta_n \quad \text{с } \beta_n \simeq 0.$$

Положим $\bar{\beta} = \max\{|\beta_n| : 0 \leq n \leq N-1\}$. Согласно лемме 3.4 $\bar{\beta} \simeq 0$ и $\bar{\beta}.t_N \simeq 0$. Следовательно,

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n.\beta_n\right| \leq \bar{\beta} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n = \bar{\beta} \sum_{n=0}^{N-1} (t_{n+1} - t_n) = \bar{\beta}.t_N \simeq 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\int\limits_0^t f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_\tau\right) d\tau - \int\limits_0^t f^o(x_\tau)\, d\tau \simeq \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n.\beta_n \simeq 0,$$

и доказательство леммы 4.4 завершено. □

Лемма 4.5. *Пусть $\phi \in \mathscr{C}_o$ стандартно. Пусть x — решение уравнения* (1.5) *с $x_0 = \phi$ и I — его максимальный интервал существования. Пусть $L_1 > 0$ такое стандартное, что $[0, L_1] \subset I$. Тогда тень x на $[0, L_1]$ совпадает с решением y уравнения* (1.6) *на этом интервале, т. е. $x(t) \simeq y(t)$ для каждого $t \in [0, L_1]$.*

Доказательство. Согласно леммам 4.3 и 4.4 функция x S-непрерывна, околостандартна на $[0, L_1]$ и удовлетворяет соотношению

$$x(t) \simeq \phi(0) + \int\limits_0^t f^o(x_\tau)\, d\tau \quad \forall t \in [0, L_1].$$

Тогда, если ${}^o x$ — тень x на $[0, L_1]$, можно легко показать, что стандартная функция $z : [0, L_1] \to \mathbb{R}$, определенная следующим образом:

$$z(t) = \begin{cases} {}^o x(t), & t \in [0, L_1], \\ \phi(t), & t \in [-r, 0], \end{cases}$$

представляет собой решение (1.6). Из (H4) выводим, что z и y совпадают на $[-r, L_1]$, так что $x(t) \simeq {}^o x(t) = z(t) = y(t)$ для $t \in [0, L_1]$. Доказательство завершено. □

Лемма 4.6. *Пусть $\phi \in \mathscr{C}_o$ стандартно. Пусть x — решение уравнения* (1.5) *с $x_0 = \phi$ и I — его максимальный интервал существования. Пусть $L_1 > 0$ такое доступное число, что $[0, L_1] \subset I$. Тогда $x(t) \simeq y(t)$ для всех $t \in [0, L_1]$.*

Доказательство. Если $L_1 \simeq 0$, то доказывать нечего. Предположим, что L_1 не инфинитезималь. По лемме 4.5 имеем $x(t) \simeq y(t)$ для всех $t \in [0, a]$ и каждого стандартного a такого, что $0 < a \le L_1$. По принципу перманентности $x(t) \simeq y(t)$ выполнено также для некоторого $a \simeq L_1$. Так как $x(t) \simeq x(a)$ и $y(t) \simeq y(a)$ для всех $t \in [a, L_1]$, имеем $x(t) \simeq y(t)$ для всех $t \in [0, L_1]$. Лемма доказана. □

2. Здесь в лемме 4.7 мы дадим внешнюю формулировку определения экспоненциально устойчивого равновесия. Этот результат потребуется в теореме 3.7.

Лемма 4.7. *Равновесие y_e в* (1.6) *экспоненциально устойчиво в том и только в том случае, если оно допускает стандартную область экпоненциальной устойчивости, т. е. найдутся стандартные b, K и $\lambda > 0$ такие, что для каждого стандартного $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\phi \in \mathscr{C}_o$ решение $y = y(\cdot; t_0, \phi)$ уравнения* (1.6), *для которого $|\phi - y_e| < b$, определено на $[t_0 - r, +\infty)$ и для любого $t \ge t_0$ выполнено неравенство $|y(t) - y_e| \le Ke^{-\lambda(t-t_0)}|\phi - y_e|$.*

Доказательство. Утверждение леммы получается последовательным применением принципа переноса. □

4.2. Доказательство теоремы 3.6. Пусть $L > t_0$ стандартно и K — стандартная трубчатая окрестность $\Gamma = y([t_0, L])$. Пусть x — решение уравнения (1.5) с $x_{t_0} = \phi$ и I — его максимальный интервал существования. Определим множество $S = \{L_1 \in I \cap [t_0, L]/x([t_0, L_1]) \subset K\}$. Очевидно, S непусто ($t_0 \in S$) и ограничено сверху величиной L. Пусть L_0 — точная верхняя граница S и $L_1 \in S$ таково, что $L_0 - \varepsilon < L_1 \le L_0$.

По принципу Коши найдется ощутимое L_2 такое, что x остается заданным на $[t_0, L_1 + \varepsilon L_2]$. По лемме 4.6 имеем $x(t) \simeq y(t)$ для $t \in [t_0, L_1 + \varepsilon L_2]$. Предположим, что $L_1 + \varepsilon L_2 \le L$. Тогда поскольку $[t_0, L_1 + \varepsilon L_2] \subset I$ и $x([t_0, L_1 + \varepsilon L_2]) \subset K$, то $L_1 + \varepsilon L_2 \in S$, что противоречит неравенству $L_1 + \varepsilon L_2 > L_0$. Таким образом, $L_1 + \varepsilon L_2 > L$, т. е. $x(t) \simeq y(t)$ для каждого $t \in [t_0, L] \subset [t_0, L_1 + \varepsilon L_2]$. □

4.3. Доказательство теоремы 3.7. Пусть x — решение уравнения (1.5) с $x_{t_0} = \phi$. На $[t_0 - r, t_0]$ имеем $x(t) = y(t) = \phi(t)$, так что заключение теоремы выполнено. По теореме 3.6 соотношение $x(t) \simeq y(t)$ верно для всех $t \in [t_0, L]$, $L > t_0$, L стандартно. Пусть $t_1 > t_0$, t_1 стандартно. Момент времени t_1 будет выбран позже.

Для $n \in \mathbb{N}$ положим $I_n = [t_0 + nt_1, t_0 + (n+1)t_1]$. Семейство $\{I_n\}_{n \ge 0}$ является разбиением бесконечного временного интервала $[t_0, +\infty)$ таким, что $[t_0, +\infty) = \bigcup_{n \ge 0} I_n$. На каждом из интервалов I_n, $n \ge 1$, определим y_n как решение уравнения (1.6) с начальной функцией $y_n(t) = x(t)$ при $t \in [t_0 + nt_1 - r, t_0 + nt_1]$. По теореме 3.6 соотношение $x(t) \simeq y_n(t)$ выполнено для всех $t \in I_n$, $n \ge 1$.

Пусть $n \ge 1$ и $t \ge t_0 + nt_1$. Из определения экспоненциальной устойчивости и ее свойств получаем

$$|y(t) - y_n(t)| \le Ke^{-\lambda(t-t_0-nt_1)} \sup_{s \in [t_0+nt_1-r, t_0+nt_1]} |y(s) - y_n(s)|, \tag{4.5}$$

где $K \geq 1$ и $\lambda > 0$ стандартны. По неравенству треугольника для $s \in [t_0 + nt_1 - r, t_0 + nt_1]$ имеем

$$|y(s) - y_n(s)| \leq |y(s) - y_{n-1}(s)| + |y_n(s) - y_{n-1}(s)|. \tag{4.6}$$

Однако по теореме 3.6 $y_n(s) = x(s) \simeq y_{n-1}(s)$ для всех $s \in [t_0 + nt_1 - r, t_0 + nt_1]$ и тем самым по лемме 3.4 $\alpha := \max_{n \geq 0} \sup_{s \in [t_0+nt_1-r, t_0+nt_1]} |y_n(s) - y_{n-1}(s)| \simeq 0$. Возьмем $t_1 \geq r - t_0$. Из (4.5), (4.6) вытекает, что

$$|y(t) - y_n(t)| \leq Ke^{-\lambda(t-t_0-nt_1)}\Big(\sup_{s \in [t_0+nt_1-r, t_0+nt_1]} |y(s) - y_{n-1}(s)| + \alpha\Big), \tag{4.7}$$

поэтому

$$\begin{aligned} &\sup_{s \in [t_0+(n+1)t_1-r, t_0+(n+1)t_1]} |y(s) - y_n(s)| \\ &\leq K \sup_{s \in [t_0+(n+1)t_1-r, t_0+(n+1)t_1]} e^{-\lambda(s-t_0-nt_1)}\Big(\sup_{s \in [t_0+nt_1-r, t_0+nt_1]} |y(s) - y_{n-1}(s)| + \alpha\Big) \\ &= Ke^{-\lambda(t_0+t_1-r)}\Big(\sup_{s \in [t_0+nt_1-r, t_0+nt_1]} |y(s) - y_{n-1}(s)| + \alpha\Big) \end{aligned}$$

или, что равносильно,

$$|y - y_n|_n \leq Ke^{-\lambda(t_0+t_1-r)} \left(|y - y_{n-1}|_{n-1} + \alpha\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $|y - y_n|_n := \sup_{s \in [t_0+(n+1)t_1-r, t_0+(n+1)t_1]} |y(s) - y_n(s)|$. Возьмем t_1 таким, что $Ke^{-\lambda(t_0+t_1-r)} < 1$. Поскольку $|y - y_0|_0 = 0$, получаем

$$|y - y_n|_n \leq \frac{Ke^{-\lambda(t_0+t_1-r)}}{1 - Ke^{-\lambda(t_0+t_1-r)}}\alpha.$$

Вернемся к неравенству (4.7). Из предыдущего неравенства вытекает, что для $t \in I_n$, $n \geq 0$

$$|y(t) - y_n(t)| \leq Ke^{-\lambda(t-t_0-nt_1)} \left(\frac{Ke^{-\lambda(t_0+t_1-r)}}{1 - Ke^{-\lambda(t_0+t_1-r)}} + 1\right)\alpha \leq \frac{K\alpha}{1 - Ke^{-\lambda(t_0+t_1-r)}}.$$

Тем самым $y(t) \simeq y_n(t)$ на I_n.

Итак, для $t \in I_n$, $n \geq 0$, будет

$$(x(t) \simeq y_n(t), y(t) \simeq y_n(t)) \Longrightarrow x(t) \simeq y(t).$$

Ввиду произвольности выбора n доказательство закончено. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bogoliubov N. N., Mitropolsky Y. A.* Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1961. (Intern. Monographs Adv. Math. Phys.).
2. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. New York: Springer-Verl., 1983. (Appl. Math. Sci; v. 42).
3. *Hale J. K.* Ordinary differential equations. New York: Wiley-Intersci., 1969. (Pure Appl. Math.; v. 21).
4. *Lakrib M.* On the validity of the averaging method for all time // Maghreb Math. Rev. 1999. V. 8, N 1–2. P. 119–128.
5. *Lochak P., Meunier C.* Multiphase averaging for classical systems. New York: Springer-Verl., 1988. (Appl. Math. Sci.; v. 72).

6. *Sanders J. A., Verhulst F.* Averaging methods in nonlinear dynamical systems. New York: Springer-Verl., 1985. (Appl. Math. Sci.; v. 59).

7. *Sari T.* Stroboscopy and averaging // Colloque trajectorien à la mémoire de Georges Reeb et Jean-Louis Callot, Strasbourg-Obernai, 1995 (A. Fruchard and A. Troesch, eds.), Strasbourg, 1995. P. 95–124. Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur.

8. *Halanay A.* The method of averaging in equations with retardation // Rev. Math. Pur. Appl. Acad. R.P.R. 1959. V. 4. P. 467–483.

9. *Halanay A.* On the method of averaging for differential equations with retarded argument // J. Math. Anal. Appl. 1966. V. 14. P. 70–76.

10. *Hale J. K.* Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter // J. Differential Equations. 1966. V. 2. P. 57–73.

11. *Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.* Averaging in infinite dimensions // J. Integral Equations Appl. 1990. V. 2, N 4. P. 463–494.

12. *Медведев Г. Н.* Асимптотические решения систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Докл. АН СССР. 1968. Т. 9. С. 85–87.

13. *Волосов В. М., Медведев Г. М., Моргунов Б. И.* О применении метода усреднения для некоторых систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Вестн. МГУ. Сер. III. Физика, астрономия. 1968. Т. 8. С. 251–294.

14. *Lakrib M.* The method of averaging and functional differential equations with delay // Int. J. Math. Sci. 2001. V. 26, N 8. P. 497–511.

15. *Robinson A.* Nonstandard analysis. New York: Amer. Elsevier, 1974.

16. *Nelson E.* Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83, N 6. P. 1165–1198.

17. *Nonstandard analysis* in practice / F. Diener, M. Diener (eds.). Berlin: Springer-Verl., 1995. (Universitext).

18. *Diener F., Reeb G.* Analyse non standard. Paris: Hermann, 1989. V. 40. (Collect. Enseign. Sci.).

19. *Analyse non standard* et représentation du réel. Actes de l'école d'été / Diener M., C. Lobry (eds.). Alger: Office Publ. Univ., 1985.

20. *Mathématiques finitaires* & analyse non standard. Tomes 1, 2 / Diener M., Wallet G. (eds.). Paris, 1989. (Publ. Math. Univ. Paris VII; v. 31).

21. *Lutz R., Goze M.* Nonstandard analysis: A practical guide with applications. New York: Springer-Verl., 1981. (Lecture Notes in Math.; v. 881).

22. *Lutz R., Sari T.* Applications of nonstandard analysis to boundary value problems in singular perturbation theory // Theory and applications of singularly perturbations. Oberwolfach, 1981. Berlin: Springer-Verl., 1982, P. 113–135. (Lecture Notes in Math; v. 942).

23. *Sari T.* Nonstandard perturbation theory of differential equations // Invited talk at the International research symposium on nonstandard analysis and its applications, ICMS, Edinburgh, 11–17 August 1996, http://www.math.uha.fr/~geometry/sari/papers.html.

24. *van den Berg I.* Nonstandard asymptotic analysis. Berlin: Springer-Verl., 1987. (Lecture Notes in Math.; v. 1249).

25. *Lakrib M.* Time averaging for functional differential equations // J. Appl. Math. 2003. V. 1. P. 1–16.

Статья поступила 2 июня 2003 г.

Mustapha Lakrib
Laboratoire de Mathématiques, Université de Haute Alsace, 4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse, France & Laboratoire de Mathématiques, Université Djillali Liabès, B.P. 89, 22000 Sidi Bel Abbès, Algérie
M.Lakrib@uha.fr, mlakrib@univ-sba.dz

Tewfik Sari
Laboratoire de Mathématiques, Université de Haute Alsace, 4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse, France
T.Sari@uha.fr