Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 517.5

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ С $(\vec{k}, \vec{s})$–МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ КВАЗИНОРМОЙ

Б. В. Симонов

Аннотация: Оцениваются суммы двойных рядов по синусам и косинусам с кратно монотонными и с другими, более общего вида, коэффициентами. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности сумм этих рядов пространствам со смешанной квазинормой.

Ключевые слова: ряд, коэффициент ряда, монотонность, последовательность, сумма, сходимость.

1. Введение

Пусть Φ — совокупность неотрицательных суммируемых на $(-\pi, \pi)$ функций. *Пространством с весом* L назовем множество функций $f(x_1, x_2)$, 2π-периодических по каждой переменной, с конечной квазинормой

$$\|f(x_1,x_2)\|_{(-\pi,\pi)^2} = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_2(x_2) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(x_1) |f(x_1,x_2)|^{p_1}\, dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}},$$

где $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $\varphi_1 \in \Phi$, $\varphi_2 \in \Phi$.

Будем рассматривать ряды

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1,n_2} \sin n_1 x_1 \sin n_2 x_2, \tag{1}$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1,n_2} \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2, \tag{2}$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1,n_2} \cos n_1 x_1 \sin n_2 x_2, \tag{3}$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1,n_2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2, \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00080).

причем (для краткости обозначений) считаем, что значения $\cos 0 \cdot x_1$, $\cos 0 \cdot x_2$, $\sin 0 \cdot x_1$, $\sin 0 \cdot x_2$ заменяются на $1/2$.

Будем считать, что коэффициенты этих рядов удовлетворяют условию

$$a_{n_1,n_2} \longrightarrow 0 \tag{5}$$

при $n_1 \to \infty$ и любом фиксированном n_2 и при $n_2 \to \infty$ и любом фиксированном n_1. Для целых $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1$ обозначим

$$\Delta_{\vec{k}} a_{n_1,n_2} = \Delta_{k_1,k_2} a_{n_1,n_2} = \sum_{i=0}^{k_1} (-1)^i C_{k_1}^i \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^j C_{k_2}^j a_{n_1+i,n_2+j},$$

$$|\Delta|_{\vec{k}} a_{n_1,n_2} = |\Delta|_{k_1,k_2} a_{n_1,n_2} = \sum_{i=0}^{k_1} C_{k_1}^i \sum_{j=0}^{k_2} C_{k_2}^j a_{n_1+i,n_2+j},$$

$$\Delta_{0,k_2} a_{n_1,n_2} = \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^j C_{k_2}^j a_{n_1,n_2+j}, \quad |\Delta|_{0,k_2} a_{n_1,n_2} = \sum_{j=0}^{k_2} C_{k_2}^j a_{n_1,n_2+j},$$

$$\Delta_{k_1,0} a_{n_1,n_2} = \sum_{i=0}^{k_1} (-1)^i C_{k_1}^i a_{n_1+i,n_2}, \quad |\Delta|_{k_1,0} a_{n_1,n_2} = \sum_{i=0}^{k_1} C_{k_1}^i a_{n_1+i,n_2},$$

$$\Delta_{0,0} a_{n_1,n_2} = a_{n_1,n_2}, \quad |\Delta|_{0,0} a_{n_1,n_2} = a_{n_1,n_2},$$

где $C_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)/m!$. Пусть даны числовой ряд

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} c_{n_1,n_2} \tag{6}$$

и его частная сумма $S_{m_1,m_2} = \sum\limits_{n_2=0}^{m_2} \sum\limits_{n_1=0}^{m_1} c_{n_1,n_2}$.

Если существует такое S, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные N_1 и N_2 такие, что $|S_{m_1,m_2} - S| < \varepsilon$ при любых $m_1 > N_1$, $m_2 > N_2$, то говорят, что ряд (6) *сходится по Прингсхейму* к сумме S [1, с. 27].

Из работы [2] следует, что если последовательность $\{a_{n_1,n_2}\}$ удовлетворяет условию (5) и $\Delta_{k_1,k_2} a_{n_1,n_2} \geq 0$ для любых натуральных n_1 и n_2 и некоторых $k_1 \geq 1$ и $k_2 \geq 1$, то каждый из рядов (1)–(4) сходится по Прингсхейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль. Пусть $r_1 = 1, 2$, $r_2 = 1, 2$. Через $f_{r_1,r_2}(x_1, x_2)$ обозначим сумму ряда (1) при $r_1 = r_2 = 1$; сумму ряда (2) при $r_1 = 1$, $r_2 = 2$; сумму ряда (3) при $r_1 = 2$, $r_2 = 1$; сумму ряда (4) при $r_1 = r_2 = 2$. Пусть k_1, k_2 — целые неотрицательные числа; $s_1 = 0, 1$; $s_2 = 0, 1$; $\vec{k} = (k_1, k_2)$; $\vec{s} = (s_1, s_2)$.

В данной работе находятся условия, при которых суммы тригонометрических рядов (1)–(4) с $(\vec{k}, \vec{s})$-монотонными коэффициентами (определение см. ниже) принадлежат классам L, а также устанавливаются оценки квазинорм этих функций через коэффициенты соответствующих рядов.

Для формулировки приводимых ниже утверждений введем определения.

Пусть $\varphi \in \Phi$. Введем следующие условия на функцию $\varphi(x)$.

Условие A_1. Справедливо неравенство

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\, dx \leq C \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(x)\, dx,$$

и

$$\int\limits_0^\delta \varphi(x)\,dx \le C_1 \int\limits_{\delta/4}^{\delta/2} \varphi(x)\,dx$$

для любого $\delta \in (0,\pi)$, где C_1 не зависит от δ (константы C, $C_1, \dots$ здесь и ниже считаем положительными).

Условие A_2. Для любого $\delta \in (0,\pi)$ и любого $b \ge \pi/(4\delta)$

$$\int\limits_{\delta/2}^{\delta} \varphi(x)\sin^2 bx\,dx \ge C_2 \int\limits_{\delta/2}^{\delta} \varphi(x)\,dx,$$

где C_2 не зависит от δ и b.

Условие A_3. Выполнено неравенство $\varphi(\pi - x) = \varphi(x)$ для почти всех $x \in (0,\pi)$.

Заметим, что условию A_2 удовлетворяют, например, конечные функции $\varphi(x)$, являющиеся почти возрастающими на $(0,\pi)$ (т. е. для которых $\varphi(x_1) \le C_3\varphi(x_2)$ при любых $0 < x_1 < x_2 < \pi$, где C_3 не зависит от x_1, x_2 [3]) и такие, что $\varphi(x) \le C_4\varphi(x/2)$ для любого $x \in (0,\pi)$, где C_4 не зависит от x. Это легко проверить, используя свойства функции $\varphi(x)$ и неравенство [4] $\int\limits_{a\pi}^{2a\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \ge C_5$, где C_5 не зависит от a, $a \ge 1/8$.

Для дальнейшего нам понадобится понятие $(\vec{k},\vec{s})$-монотонности ($\vec{k} = (k_1,k_2)$, $\vec{s} = (s_1,s_2)$) последовательности $\{a_{n_1,n_2}\}_{n_1=0,n_2=0}^{\infty,\infty} = \{a_{n_1,n_2}\}$.

Будем говорить, что последовательность $\{a_{n_1,n_2}\}$ является $(\vec{k},\vec{s})$-*монотонной*, если $\{a_{n_1,n_2}\}$ удовлетворяет условию (5) и $\Delta_{\vec{k}}(|\Delta|_{\vec{s}}a_{n_1,n_2}) \ge 0$ для некоторых $k_1 \ge 0$, $k_2 \ge 0$, $s_1 \ge 0$, $s_2 \ge 0$ и всех n_1, n_2.

Нетрудно проверить, что если последовательность $\{a_{n_1,n_2}\}$ удовлетворяет условию (5) и $\Delta_{1,1}a_{n_1,n_2} \ge 0$ для любых целых неотрицательных n_1 и n_2, то она $((1,1),(s_1,s_2))$-монотонна для любых $s_1 = 0,1,\dots$ и $s_2 = 0,1,\dots$. Обратное не всегда верно.

Двойной тригонометрический ряд называется *рядом с* $(\vec{k},\vec{s})$-*монотонными коэффициентами*, если последовательность его коэффициентов $\{a_{n_1,n_2}\}$ является $(\vec{k},\vec{s})$-монотонной.

Через $[a]$ обозначим целую часть числа a. Пусть $f(x_1,x_2)$ является суммой тригонометрического ряда с коэффициентами $\{a_{n_1,n_2}\}$. Для краткости записи утверждений введем обозначение

$$S(s_1,s_2,m_1,m_2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2)$$
$$= \Bigg(\sum_{n_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2}} \varphi_2(x_2)\,dx_2 \cdot n_2^{(2-[1/m_2])p_2} \Bigg(\sum_{n_1=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\frac{\pi}{n_1}} \varphi_1(x_1)\,dx_1$$
$$\times\, n_1^{(2-[1/m_1])p_1} (\Delta_{m_1-1,m_2-1}(|\Delta|_{s_1,s_2}a_{n_1-1,n_2-1}))^{p_1}\Bigg)^{p_2/p_1}\Bigg)^{1/p_2}.$$

В работе доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть $\varphi_i \in \Phi$ четны на $(-\pi,\pi)$ и удовлетворяют условию A_1; $s_i = 0,1$, $r_i = 1,2$, $k_i \geq r_i + 1$ $(i = 1,2)$; последовательность $\{a_{n_1,n_2}\}$ является $(\vec{k},\vec{s})$-монотонной.*

Тогда при любых $p_i \in (0,\infty)$

$$C_1 S(s_1,s_2,r_1,r_2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2) \leq \|f_{r_1,r_2}(x_1,x_2)\|_{(-\frac{\pi}{s_1+1},\frac{\pi}{s_1+1})\times(-\frac{\pi}{s_2+1},\frac{\pi}{s_2+1})} \leq C_2 S(s_1,s_2,r_1,r_2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2), \quad (7)$$

где C_1, C_2 не зависят от последовательности $\{a_{n_1,n_2}\}$.

Утверждение 2. *Пусть $\varphi_i \in \Phi$ четны на $(-\pi,\pi)$ и удовлетворяют условиям A_1–A_3; $s_i = 0,1$, $r_i = 1,2$, $k_i \geq r_i$ $(i = 1,2)$; последовательность $\{a_{n_1,n_2}\}$ является $(\vec{k},\vec{s})$-монотонной.*

Тогда при любых $p_i \in (0,\infty)$

$$C_1 S(s_1,s_2,r_1,r_2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2) \leq \|f_{r_1,r_2}(x_1,x_2)\|_{(-\pi,\pi)^2} \leq C_2 S(s_1,s_2,r_1,r_2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2), \quad (8)$$

где C_1, C_2 не зависят от последовательности $\{a_{n_1,n_2}\}$.

Замечание 1. В отдельных случаях можно несколько ослабить условия утверждений 1 и 2. Так, если в утверждениях 1 или 2 $r_1 = 1$, $s_1 = 0$, а $r_2+s_2 \neq 1$, то вместо $(\vec{k},\vec{s})$-монотонности от последовательности $\{a_{n_1,n_2}\}$ можно требовать $(\vec{k},\vec{s})$-монотонность последовательности $\{a_{n_1,n_2}\}_{n_1=1,\,n_2=0}^{\infty,\infty}$ и справедливость неравенства

$$\Delta_{0,k_2}(|\Delta|_{0,s_2} a_{0,n_2}) \geq 0 \quad (n_2 = 0,1,\dots). \quad (9)$$

Аналогично при $r_1+s_1 \neq 1$ и $r_2 = 1$, $s_2 = 0$ можно требовать $(\vec{k},\vec{s})$-монотонность последовательности $\{a_{n_1,n_2}\}_{n_1=0,\,n_2=1}^{\infty,\infty}$ и выполнение неравенства

$$\Delta_{k_1,0}(|\Delta|_{s_1,0} a_{n_1,0}) \geq 0 \quad (n_1 = 0,1,\dots), \quad (10)$$

а при $r_1 = r_2 = 1$, $s_1 = s_2 = 0$ можно требовать $(\vec{k},\vec{s})$-монотонность последовательности $\{a_{n_1,n_2}\}_{n_1=1,n_2=1}^{\infty,\infty}$, неотрицательность $a_{0,0}$, выполнение неравенства (9) для $n_2 = 1,2,\dots$ и неравенства (10) для $n_1 = 1,2,\dots$.

Замечание 2. Утверждения 1 и 2 сформулированы для $s_i = 0,1$ $(i = 1,2)$. Аналогично рассуждая, можно получить подобные утверждения и для случая, когда последовательность $\{a_{n_1,n_2}\}$ будет $(\vec{k},\vec{s})$-монотонной $s_1 = 0,1,\dots$, $s_2 = 0,1,\dots$.

Замечание 3. Пусть $\varphi_i(x_i) \equiv 1$ $(i = 1,2)$, $a_{0,n_2} = 0$ $(n_2 = 0,1,\dots)$ в (2), $a_{n_1,0} = 0$ $(n_1 = 0,1,\dots)$ в (3), $a_{0,n_2} = a_{n_1,0} = 0$ $(n_1,n_2 = 0,1,\dots)$ в (1), $s_1 = s_2 = 0$. Нетрудно видеть, что данные функции $\varphi_i(x_i)$ $(i = 1,2)$ удовлетворяет условиям A_1–A_3. Поэтому, применяя утверждение 2 и замечание 1, получаем теорему из [4].

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $B_0^1(x) = 1/2$; $B_n^1(x) = 1/2 + \cos x + \dots + \cos nx$ для $n \geq 1$; $B_n^k(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} B_\nu^{k-1}(x)$ для $k = 2,3,\dots$ и $n \geq 0$; $\overline{B}_n^1(x) = \sin x + \dots + \sin nx$ для $n \geq 1$; $\overline{B}_n^k(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \overline{B}_\nu^{k-1}(x)$ для $k = 2,3,\dots$ и $n \geq 1$.

Лемма 1 [5]. *Пусть* $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$, $1 \leq p < \infty$. *Тогда*

а) *если* $\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} a_\nu = a_n \beta_n$ $(n = 1, 2, \dots)$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \right)^p \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\beta_n b_n)^p,$$

б) *если* $\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_n \beta_n$ $(n = 1, 2, \dots)$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu \right)^p \leq p^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\beta_n b_n)^p.$$

Лемма 2 [6, с. 125]. *Пусть* $a_n \geq 0$, $0 < \alpha \leq \beta < \infty$. *Тогда*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\beta \right)^{1/\beta} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha \right)^{1/\alpha}.$$

Лемма 3 [6, с. 6]. *Пусть* $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$. *Тогда для любого* $\alpha > 0$

$$C_1(\alpha)\bigl(u_1^\alpha + u_2^\alpha\bigr) \leq (u_1 + u_2)^\alpha \leq C_2(\alpha)\bigl(u_1^\alpha + u_2^\alpha\bigr).$$

Лемма 4. *Пусть* $k_i \geq 1$, $s_i = 0, 1$ $(i = 1, 2)$, *последовательность* $\{a_{n_1,n_2}\}$ *является* $(\vec{k}, \vec{s})$*-монотонной.*

Тогда для любых $m_1 = 0, 1, \dots, k_1$, $m_2 = 0, 1, \dots, k_2$, $n_1, n_2 = 0, 1, \dots$

$$\Delta_{m_1,k_2}(|\Delta|_{s_1,s_2} a_{n_1,n_2}) \geq 0, \quad \Delta_{k_1,m_2}(|\Delta|_{s_1,s_2} a_{n_1,n_2}) \geq 0,$$

$$\Delta_{0,m_2}(|\Delta|_{0,s_2} a_{n_1,n_2}) \geq 0, \quad \Delta_{m_1,0}(|\Delta|_{s_1,0} a_{n_1,n_2}) \geq 0, \quad a_{n_1,n_2} \geq 0.$$

Доказательство следует из определения $(\vec{k}, \vec{s})$-монотонности последовательности $\{a_{n_1,n_2}\}$.

Лемма 5. *Пусть* $k_i \geq 1$, $s_i = 0, 1$ $(i = 1, 2)$, *последовательность* $\{a_{n_1,n_2}\}$ *является* $(\vec{k}, \vec{s})$*-монотонной. Тогда каждый из рядов* (1)–(4) *сходится по Прингсхейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль, т. е. существуют функции* $f_{1,1}(x_1, x_2)$, $f_{1,2}(x_1, x_2)$, $f_{2,1}(x_1, x_2)$, $f_{2,2}(x_1, x_2)$ — *суммы соответствующих рядов* (1)–(4).

Доказательство. Сходимость для случая, когда $s_1 = s_2 = 0$, следует из работы [4].

Рассмотрим ряд (2). Пусть $s_1 = s_2 = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{n_1,n_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} a_{0,0} + \sum_{\nu_2=1}^{n_2} a_{0,\nu_2} \cos \nu_2 x_2 \right) \\ &\quad + \sum_{\nu_1=1}^{n_1} \left(\frac{1}{2} a_{\nu_1,0} + \sum_{\nu_2=1}^{n_2} a_{\nu_1,\nu_2} \cos \nu_2 x_2 \right) \sin \nu_1 x_1 \cdot \frac{\cos(x_1/2)}{\cos(x_1/2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{x_1}{2} \right) \left(\frac{a_{0,0}}{2} + \sum_{\nu_2=1}^{n_2} a_{0,\nu_2} \cos \nu_2 x_2 \right) + \frac{1}{2 \cos(x_1/2)} \sin((n_1 + 1/2) x_1) \end{aligned}$$

$$\times\left(\frac{a_{n_1,0}}{2}+\sum_{\nu_2=1}^{n_2}a_{n_1,\nu_2}\cos\nu_2x_2\right)+\frac{1}{2\cos(x_1/2)}$$

$$\times\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\left(\frac{1}{2}|\Delta|_{1,0}a_{\nu_1-1,0}+\sum_{\nu_2=1}^{n_2}|\Delta|_{1,0}a_{\nu_1-1,\nu_2}\cos\nu_2x_2\right)\sin((\nu_1-1/2)x_1)\cdot\frac{\cos(x_1/2)}{\cos(x_1/2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}\right)\left(\frac{a_{0,0}}{2}+\sum_{\nu_2=1}^{n_2}a_{0,\nu_2}\cos\nu_2x_2\cdot\frac{\cos(x_2/2)}{\cos(x_2/2)}\right)+\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\sin((n_1+1/2)x_1)$$

$$\times\left(\frac{a_{n_1,0}}{2}+\sum_{\nu_2=1}^{n_2}a_{n_1,\nu_2}\cos\nu_2x_2\cdot\frac{\cos(x_2/2)}{\cos(x_2/2)}\right)+\frac{1}{(2\cos(x_1/2))^2}\sin n_1x_1$$

$$\times\left(\frac{1}{2}|\Delta|_{1,0}a_{n_1-1,0}+\sum_{\nu_2=1}^{n_2}|\Delta|_{1,0}a_{n_1-1,\nu_2}\cos\nu_2x_2\cdot\frac{\cos(x_2/2)}{\cos(x_2/2)}\right)+\frac{1}{(2\cos(x_1/2))^2}$$

$$\times\sum_{\nu_1=1}^{n_1-1}\left(\frac{1}{2}|\Delta|_{2,0}a_{\nu_1-1,0}+\sum_{\nu_2=1}^{n_2}|\Delta|_{2,0}a_{\nu_1-1,\nu_2}\cos\nu_2x_2\cdot\frac{\cos(x_2/2)}{\cos(x_2/2)}\right)\sin\nu_1x_1$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}\right)\frac{1}{(2\cos(x_1/2))^2}\left(|\Delta|_{0,1}a_{0,0}+\sum_{\nu_2=1}^{n_2-1}|\Delta|_{0,2}a_{0,\nu_2-1}\cos\nu_2x_2\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}\right)\frac{1}{(2\cos(x_2/2))^2}|\Delta|_{0,1}a_{0,n_2-1}\cos n_2x_2+\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\,\frac{1}{(2\cos(x_2/2))^2}$$

$$\times\sin((n_1+1/2)x_1)\left(|\Delta|_{0,1}a_{n_1,0}+\sum_{\nu_2=1}^{n_2}|\Delta|_{0,2}a_{n_1,\nu_2-1}\cos\nu_2x_2\right)+\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}\right)$$

$$\times\frac{1}{2\cos(x_2/2)}\cos((n_2+1/2)x_2)a_{0,n_2}+\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\,\frac{1}{(2\cos(x_2/2))^2}\sin((n_1+1/2)x_1)$$

$$\times\cos n_2x_2|\Delta|_{0,1}a_{n_1,n_2-1}+\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\,\frac{1}{2\cos(x_2/2)}\sin((n_1+1/2)x_1)$$

$$\times\cos((n_2+1/2)x_2)\;a_{n_1,n_2}+\frac{1}{(2\cos(x_1/2))^2}\,\frac{1}{(2\cos(x_2/2))^2}\sin n_1x_1\Bigg(|\Delta|_{1,1}a_{n_1-1,0}$$

$$+\sum_{\nu_2=1}^{n_2}|\Delta|_{1,2}a_{n_1-1,\nu_2-1}\cos\nu_2x_2\Bigg)+\frac{1}{(2\cos(x_1/2))^2}\,\frac{1}{(2\cos(x_2/2))^2}\sin n_1x_1\;\cos n_2x_2$$

$$\times|\Delta|_{1,1}a_{n_1-1,n_2-1}+\frac{1}{(2\cos(x_1/2))^2}\,\frac{1}{2\cos(x_2/2)}\sin n_1x_1\;\cos((n_2+1/2)x_2)$$

$$\times|\Delta|_{1,0}a_{n_1-1,n_2}+\frac{1}{(2\cos(x_1/2))^2}\,\frac{1}{(2\cos(x_2/2))^2}\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\Bigg(|\Delta|_{2,1}a_{\nu_1-1,0}$$

$$+\sum_{\nu_2=1}^{n_2}|\Delta|_{2,2}a_{\nu_1-1,\nu_2-1}\cos\nu_2x_2\Bigg)\sin\nu_1x_1+\frac{1}{(2\cos(x_1/2))^2}\,\frac{1}{(2\cos(x_2/2))^2}\cos n_2x_2$$

$$\times\sum_{\nu_1=1}^{n_1-1}|\Delta|_{2,1}a_{\nu_1-1,n_2-1}\sin\nu_1x_1+\frac{1}{(2\cos(x_1/2))^2}\,\frac{1}{2\cos(x_2/2)}$$

$$\times\sum_{\nu_1=1}^{n_1-1}|\Delta|_{2,0}a_{\nu_1-1,n_2}\sin\nu_1x_1\cos((n_2+1/2)x_2).$$

Рассмотрим первое из слагаемых в последнем выражении для $S_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$:

$$I(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}\right)\frac{1}{(2\cos(x_1/2))^2}\cdot S_{n_2}(x_2),$$

где

$$S_{n_2}(x_2)=|\Delta|_{0,1}a_{0,0}+\sum_{\nu_2=1}^{n_2-1}|\Delta|_{0,2}a_{0,\nu_2-1}\cos\nu_2x_2.$$

Исследуем на сходимость $S_{n_2}(x_2)$. Пусть $n_2\ge 4$. Тогда

$$\begin{aligned}S_{n_2}(x_2)&=(2|\Delta|_{0,1}a_{0,0}-|\Delta|_{0,1}a_{0,1})/2\\&\quad+\sum_{\nu_2=2}^{n_2-2}(|\Delta|_{0,2}a_{0,\nu_2-2}-|\Delta|_{0,2}a_{0,\nu_2})\sin\nu_2x_2/(2\sin x_2)\\&\quad+|\Delta|_{0,2}a_{0,n_2-2}\ \sin(n_2-1)x_2/(2\sin x_2)+|\Delta|_{0,2}a_{0,n_2-1}\sin n_2x_2/(2\sin x_2).\end{aligned}$$

Пусть $\delta\in(0,\pi/2)$, тогда $|\sin n_2x_2/(2\sin x_2)|$ равномерно ограничена на $\delta\le x_2\le\pi-\delta$. Учитывая лемму 4, получаем равномерную сходимость $S_{n_2}(x_2)$ на этом отрезке. Если $0<x_2<\pi$, то можно взять δ столь малым, что $\delta\le x_2\le\pi-\delta$ и, значит, $S_{n_2}(x_2)$ сходится в точке x_2. Таким образом, $I(x_1,x_2)$ сходится по Прингсхейму во всех точках (x_1,x_2), кроме тех точек, для которых $x_1=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, или $x_2=m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$ (образующих множество точек плоской меры нуль). Аналогично проверяется сходимость по Прингсхейму остальных слагаемых в последнем выражении. Таким образом, в этом случае существует функция $f_{1,2}(x_1,x_2)$, являющаяся суммой ряда (2).

Остальные случаи доказываются аналогично. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть последовательность $\{a_{n_1,n_2}\}$ является $(\vec{k},\vec{s})$-монотонной. Тогда функция $f_{1,2}(x_1,x_2)$ может быть почти всюду представлена в виде:*

если $k_1=1$, $k_2=2$, $s_1=1$, $s_2=0$, то

$$\begin{aligned}f_{1,2}(x_1,x_2)&=\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}\right)\sum_{n_2=0}^{\infty}\Delta_{0,2}a_{0,n_2}\ B^2_{n_2}(x_2)\\&\quad+\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\Delta_{1,2}(|\Delta|_{1,0}a_{n_1-1,n_2})\frac{\sin^2(n_1x_1/2)}{\sin(x_1/2)}B^2_{n_2}(x_2),\end{aligned}\tag{11}$$

если $k_1=2$, $k_2=3$, $s_1=0$, $s_2=1$, то

$$\begin{aligned}f_{1,2}(x_1,x_2)&=\frac{1}{2}\sum_{n_2=1}^{\infty}\Delta_{0,1}(|\Delta|_{0,1}a_{0,n_2-1})\overline{B}^2_{n_2}(x_2)/(2\sin x_2)\\&\quad+\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}\Delta_{2,3}(|\Delta|_{0,1}a_{n_1,n_2-1})\overline{B}^2_{n_1}(x_1)\overline{B}^2_{n_2}(x_2)/(2\sin x_2),\end{aligned}\tag{12}$$

если $k_1=1$, $k_2=2$, $s_1=1$, $s_2=1$, то

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}(f_{1,2}(x_1,x_2)+f_{1,2}(\pi-x_1,x_2)+f_{1,2}(x_1,\pi-x_2)+f_{1,2}(\pi-x_1,\pi-x_2))\\&\qquad=\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\Delta_{0,2}(|\Delta|_{0,2}a_{0,2(\nu_2-1)})\frac{\sin^2\nu_2x_2}{(2\sin x_2)^2}\end{aligned}$$

$$+\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\Delta_{1,2}(|\Delta|_{1,2}a_{2\nu_1-1,2(\nu_2-1)})\frac{\sin^2\nu_1x_1}{\sin x_1}\frac{\sin^2\nu_2x_2}{2\sin^2 x_2}. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть $k_1=1$, $k_2=2$, $s_1=1$, $s_2=0$. Тогда, проводя те же преобразования, что и в лемме 5, получим

$$S_{n_1,n_2}(x_1,x_2)=\frac{a_{0,0}}{4}+\frac{1}{2}\sum_{\nu_1=1}^{n_1}a_{\nu_1,0}\ \sin\nu_1x_1+\frac{1}{2}\sum_{\nu_2=1}^{n_2}a_{0,\nu_2}\ \cos\nu_2x_2$$

$$+\sum_{\nu_2=1}^{n_2}\sum_{\nu_1=1}^{n_1}a_{\nu_1,\nu_2}\ \sin\nu_1x_1\ \cos\nu_2x_2=\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}\right)\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\Delta_{0,2}a_{0,\nu_2}$$

$$\times B^2_{\nu_2}(x_2)-\frac{1}{2}\big(1-\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}\big)\Delta_{0,1}a_{0,n_2+1}\ B^2_{n_2}(x_2)-\frac{1}{2}\big(1-\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}\big)a_{0,n_2+1}B^1_{n_2}(x_2)$$

$$-\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\sin((n_1+1/2)x_1)B^1_{n_2}(x_2)a_{n_1,n_2+1}+\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\sin((n_1+1/2)x_1)$$

$$\times\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\Delta_{0,2}a_{n_1,\nu_2}B^2_{\nu_2}(x_2)-\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\sin((n_1+1/2)x_1)B^2_{n_2}(x_2)\ \Delta_{0,1}a_{n_1,n_2+1}$$

$$-\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\ B^1_{n_2}(x_2)\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\Delta_{1,0}(|\Delta|_{1,0}a_{\nu_1-1,n_2+1})\frac{\sin^2(\nu_1x_1/2)}{\sin(x_1/2)}$$

$$+\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\ B^1_{n_2}(x_2)|\Delta|_{1,0}a_{n_1,n_2+1}\frac{\sin^2(n_1x_1/2)}{\sin(x_1/2)}-\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\ B^2_{n_2}(x_2)$$

$$\times\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\Delta_{1,1}(|\Delta|_{1,0}a_{\nu_1-1,n_2+1})\frac{\sin^2(\nu_1x_1/2)}{\sin(x_1/2)}+\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\ B^2_{n_2}(x_2)$$

$$\times\Delta_{0,1}(|\Delta|_{1,0}a_{n_1,n_2+1})\ \frac{\sin^2(n_1x_1/2)}{\sin(x_1/2)}+\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\Delta_{1,2}(|\Delta|_{1,0}a_{\nu_1-1,\nu_2})$$

$$\times\frac{\sin^2(\nu_1x_1/2)}{\sin(x_1/2)}B^2_{\nu_2}(x_2)-\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\frac{\sin^2(n_1x_1/2)}{\sin(x_1/2)}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\Delta_{0,2}(|\Delta|_{1,0}a_{n_1,\nu_2})B^2_{\nu_2}(x_2).$$

Из этого представления, проводя те же рассуждения, что и в лемме 5, получаем равенство (11).

Аналогично доказываются представления (12) и (13). Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть $\varphi_i\in\Phi$ удовлетворяют условию A_1; $s_i=0,1$, $r_i=1,2$, $k_i\ge r_i$ $(i=1,2)$; последовательность $\{a_{n_1,n_2}\}$ является $(\vec{k},\vec{s})$-монотонной. Тогда при любых $p_i\in(0,\infty)$*

$$\|f_{r_1,r_2}(x_1,x_2)\|_{(0,\frac{\pi}{s_1+1})\times(0,\frac{\pi}{s_2+1})}\le CS(s_1,s_2,r_1,r_2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2), \quad (14)$$

где C не зависит от последовательности $\{a_{n_1,n_2}\}$.

Доказательство проведем на примере ряда (2). Пусть $\{a_{n_1,n_2}\}$ является $(\vec{k},\vec{s})$-монотонной, где $k_1\ge1$, $k_2\ge2$, $s_1=1$, $s_2=0$. Применяя леммы 5 и 6, имеем

$$I=\|f_{1,2}(x_1,x_2)\|^{p_2}_{(0,\frac{\pi}{2})\times(0,\pi)}$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\varphi_2(x_2)\left(\int\limits_0^{\pi/2}\varphi_1(x_1)\left|\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}\right)\sum_{n_2=0}^{\infty}\Delta_{0,2}a_{0,n_2}B^2_{n_2}(x_2)\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2\cos(x_1/2)}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}\Delta_{1,2}(|\Delta|_{1,0}a_{n_1-1,n_2})\frac{\sin^2(n_1x_1/2)}{\sin(x_1/2)}B^2_{n_2}(x_2)\Bigg|^{p_1}dx_1\Bigg)^{p_2/p_1}dx_2.$$

Используя лемму 5, получим $I\le C_1(I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6)$, где

$$I_1=\left(\int_0^{\pi/2}\varphi_1(x_1)\,dx_1\right)^{p_2/p_1}\sum_{m_2=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}}\varphi_2(x_2)\left|\sum_{n_2=0}^{2^{m_2+1}-1}\Delta_{0,2}a_{0,n_2}B^2_{n_2}(x_2)\right|^{p_2}dx_2,$$

$$I_2=\left(\int_0^{\pi/2}\varphi_1(x_1)\,dx_1\right)^{p_2/p_1}\sum_{m_2=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}}\varphi_2(x_2)\left|\sum_{n_2=2^{m_2+1}}^{\infty}\Delta_{0,2}a_{0,n_2}B^2_{n_2}(x_2)\right|^{p_2}dx_2,$$

$$I_3=\sum_{m_2=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}}\varphi_2(x_2)\Bigg(\sum_{m_1=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}}\varphi_1(x_1)$$
$$\times\left|\sum_{n_2=0}^{2^{m_2+1}-1}\sum_{n_1=1}^{2^{m_1+1}-1}\Delta_{1,2}b_{n_1,n_2}B^2_{n_2}(x_2)\widetilde{B}^2_{n_1}(x_1)\right|^{p_1}dx_1\Bigg)^{p_2/p_1}dx_2,$$

$$I_4=\sum_{m_2=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}}\varphi_2(x_2)\Bigg(\sum_{m_1=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}}\varphi_1(x_1)$$
$$\times\left|\sum_{n_2=2^{m_2+1}}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{2^{m_1+1}-1}\Delta_{1,2}b_{n_1,n_2}B^2_{n_2}(x_2)\widetilde{B}^2_{n_1}(x_1)\right|^{p_1}dx_1\Bigg)^{p_2/p_1}dx_2,$$

$$I_5=\sum_{m_2=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}}\varphi_2(x_2)\Bigg(\sum_{m_1=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}}\varphi_1(x_1)$$
$$\times\left|\sum_{n_2=0}^{2^{m_2+1}-1}\sum_{n_1=2^{m_1+1}}^{\infty}\Delta_{1,2}b_{n_1,n_2}B^2_{n_2}(x_2)\widetilde{B}^2_{n_1}(x_1)\right|^{p_1}dx_1\Bigg)^{p_2/p_1}dx_2,$$

$$I_6=\sum_{m_2=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}}\varphi_2(x_2)\Bigg(\sum_{m_1=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}}\varphi_1(x_1)$$
$$\times\left|\sum_{n_2=2^{m_2+1}}^{\infty}\sum_{n_1=2^{m_1+1}}^{\infty}\Delta_{1,2}b_{n_1,n_2}B^2_{n_2}(x_2)\widetilde{B}^2_{n_1}(x_1)\right|^{p_1}dx_1\Bigg)^{p_2/p_1}dx_2,$$

$$b_{n_1,n_2}=|\Delta|_{1,0}a_{n_1-1,n_2},\quad \widetilde{B}^2_{n_1}(x_1)=\sin^2(n_1x_1/2)/\sin(x_1/2).$$

Оценим I_5. Так как $\widetilde{B}^2_{n_1} \leq C_2 x_1$, $B^2_{n_2} \leq C_2(n_2+1)^2$, где C_2 не зависит от x_1, x_2, n_1, n_2, то

$$I_5 \leq C_3 \sum_{m_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \varphi_2(x_2) \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \varphi_1(x_1) \right.$$

$$\left. \times \left| x_1^{-1} \sum_{n_2=0}^{2^{m_2+1}-1} \sum_{n_1=2^{m_1+1}}^{\infty} \Delta_{1,2} b_{n_1,n_2}(n_2+1)^2 \right|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2$$

$$\leq C_4 \sum_{m_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \varphi_2(x_2) \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \varphi_1(x_1) x_1^{-p_1}\, dx_1 \right.$$

$$\left. \times \left(\Delta_{0,1} b_{2^{m_1+1},0} + \sum_{n_2=0}^{m_2} 2^{2(n_2-1)} \Delta_{0,1} b_{2^{m_1+1},2^{n_2}} \right)^{p_1} \right)^{p_2/p_1} dx_2.$$

Пусть $p_1 \geq 1$. Тогда, применяя неравенство Минковского, получаем

$$I_5 \leq C_5 \left(\left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \varphi_1(x_1) x_1^{-p_1}\, dx_1 (\Delta_{0,1} b_{2^{m_1+1},0})^{p_1} \right)^{p_2/p_1} \int\limits_0^{\pi} \varphi_2(x_2)\, dx_2 \right.$$

$$+ \sum_{m_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \varphi_2(x_2)\, dx_2$$

$$\left. \times \left(\sum_{n_2=0}^{m_2} \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \varphi_1(x_1) x_1^{-p_1}\, dx_1 (\Delta_{0,1} b_{2^{m_1+1},2^{n_2}} 2^{2n_2})^{p_1} \right)^{1/p_1} \right)^{p_2} \right).$$

Так как $\varphi_2(x_2)$ удовлетворяет условию A_1, учитывая лемму 1 при $p_2 \geq 1$ и лемму 2 при $p_2 \in (0,1)$, будем иметь

$$I_5 \leq C_6 \left(\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi_2(x_2)\, dx_2 \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \varphi_1(x_1)\, dx_1\ 2^{m_1 p_1} (\Delta_{0,1} b_{2^{m_1+1},0} \right)^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}}$$

$$+ \sum_{n_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2^{n_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{n_2}}} \varphi_2(x_2)\, dx_2 \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \varphi_1(x_1)\, dx_1\ 2^{m_1 p_1} (\Delta_{0,1} b_{2^{m_1+1},2^{n_2}})^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} 2^{2n_2 p_2} \Bigg)$$

$$\leq C_7 S^{p_2}(s_1, s_2, 1, 2, \{a_{n_1,n_2}\}, p_1, p_2, \varphi_1, \varphi_2).$$

Пусть $0 < p_1 < 1$. Применяя лемму 2, получаем

$$I_5 \leq C_8 \left(\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi_2(x_2)\, dx_2 \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \varphi_1(x_1)\, dx_1\ 2^{m_1 p_1} (\Delta_{0,1} b_{2^{m_1+1},0})^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \right.$$

$$+\sum_{m_2=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}}\varphi_2(x_2)\,dx_2\left(\sum_{n_2=0}^{m_2}\sum_{m_1=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}}\varphi_1(x_1)x_1^{-p_1}\,dx_1(2^{2n_2}\Delta_{0,1}b_{2^{m_1+1},2^{n_2}})^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\Bigg).$$

Так как функция $\varphi_2(x_2)$ удовлетворяет условию A_1, используя лемму 1 при $p_2/p_1 \geq 1$ и лемму 2 при $p_2/p_1 \in (0,1)$, приходим к неравенству

$$I_5 \leq C_9 S^{p_2}(1,0,1,2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2).$$

Аналогично доказывается, что $I_i \leq C_{10}S^{p_2}(1,0,1,2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2)$, где $i=1,2,3,4,6$. Объединяя полученные оценки для I_1-I_6, имеем

$$I \leq C_{11}S^{p_2}(1,0,1,2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2),$$

где C_{11} не зависит от $\{a_{n_1,n_2}\}$.

Аналогично для ряда (2) при $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 2$ рассматриваются оценки в случаях, когда $s_1=s_2=0$ или $s_1=0$, $s_2=1$ или $s_1=s_2=1$.

Оценки сверху для сумм рядов (1), (3), (4) проводятся так же, как и для сумм ряда (2). Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть $\varphi_i \in \Phi$; $s_i=0,1$, $r_i=1,2$, $k_i \geq r_i+1$ $(i=1,2)$; последовательность $\{a_{n_1,n_2}\}$ является $(\vec{k},\vec{s})$-монотонной. Тогда при любых $p_i \in (0,\infty)$*

$$\|f_{r_1,r_2}(x_1,x_2)\|_{(0,\frac{\pi}{s_1+1})\times(0,\frac{\pi}{s_2+1})}$$
$$\geq C\left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_2(x_2)\,dx_2\left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_1(x_1)\,dx_1(\Delta_{r_1-1,r_2-1}(|\Delta|_{s_1,s_2}a_{0,0}))^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right.$$
$$+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_2(x_2)\,dx_2\left(\sum_{n_1=2}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\frac{\pi}{n_1}}\varphi_1(x_1)\,dx_1\,n_1^{(2-[1/r_1])p_1}(\Delta_{r_1-1,r_2-1}(|\Delta|_{s_1,s_2}a_{n_1-1,0}))^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}$$
$$+\sum_{n_2=2}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2}}\varphi_2(x_2)\,dx_2\left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_1(x_1)\,dx_1(\Delta_{r_1-1,r_2-1}(|\Delta|_{s_1,s_2}a_{0,n_2-1}))^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}n_2^{(2-[1/r_2])p_2}$$
$$+\sum_{n_2=2}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2}}\varphi_2(x_2)\,dx_2\,n_2^{(2-[1/r_2])p_2}$$
$$\left.\times\left(\sum_{n_1=2}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\frac{\pi}{n_1}}\varphi_1(x_1)\,dx_1 n_1^{(2-[1/r_1])p_1}(\Delta_{r_1-1,r_2-1}(|\Delta|_{s_1,s_2}a_{n_1-1,n_2-1}))^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$
$$= C\cdot \mathrm{Sd}(s_1,s_2,r_1,r_2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2), \quad (15)$$

где C не зависит от $\{a_{n_1,n_2}\}$.

Доказательство проведем на примере ряда (2). Пусть последовательность $\{a_{n_1,n_2}\}$ является $(\vec{k},\vec{s})$-монотонной, где $k_1 \geq 2$, $k_2 \geq 3$, $s_1=0$, $s_2=1$.

Применяя леммы 5, 6 и 3, имеем $I = \|f_{1,2}(x_1,x_2)\|^{p_2}_{(0,\pi)\times(0,\frac{\pi}{2})} \ge C_1(I_1+I_2)$, где

$$I_1 = \sum_{m_2=2}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_2+1}}^{\frac{\pi}{m_2}} \varphi_2(x_2)\left(\sum_{m_1=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{m_1+1}}^{\frac{\pi}{m_1}} \varphi_1(x_1) \times \left|\sum_{n_2=1}^{\infty}\Delta_{0,3}b_{0,n_2}\overline{B}^2_{n_2}(x_2)/(2\sin x_2)\right|^{p_1} dx_1\right)^{p_2/p_1} dx_2,$$

$$I_2 = \sum_{m_2=2}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_2+1}}^{\frac{\pi}{m_2}} \varphi_2(x_2)\left(\sum_{m_1=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{m_1+1}}^{\frac{\pi}{m_1}} \varphi_1(x_1) \times \left|\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}\Delta_{2,3}b_{n_1,n_2}\overline{B}^2_{n_1}(x_1)\overline{B}^2_{n_2}(x_2)/(2\sin x_2)\right|^{p_1} dx_1\right)^{p_2/p_1} dx_2,$$

$b_{0,n_2} = |\Delta|_{0,1}a_{0,n_2-1}(n_2=1,2,\dots)$, $b_{n_1,n_2} = |\Delta|_{0,1}a_{n_1,n_2-1}$ $(n_1,n_2=1,2,\dots)$. Из [7] следует, что для $\mu\ge 2$, $\nu\ge\mu$ и $x\ge\pi/(\mu+1)$, а также для $\nu=1,2$ и $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ будет $\overline{B}^2_\nu \ge C_2\nu/x$, где C_2 не зависит от x, ν, μ. Тогда для I_2 получаем оценку

$$I_2 \ge C_3\sum_{m_2=2}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{m_2+1}}^{\frac{\pi}{m_2}} \varphi_2(x_2)x_2^{-2p_2}\,dx_2\left(\sum_{m_1=2}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{m_1+1}}^{\frac{\pi}{m_1}}\varphi_1(x_1)x_1^{-1}\,dx_1 \times\left(\sum_{n_2=m_2}^{\infty}\sum_{n_1=m_1-1}^{\infty}\Delta_{2,3}b_{n_1,n_2}\;n_1n_2\right)^{p_1}\right)^{p_2/p_1}.$$

Но

$$\sum_{n_1=m_1}^{\infty}\Delta_{2,3}b_{n_1,n_2}n_1 = \sum_{n_1=m_1}^{\infty}\Delta_{1,3}b_{n_1,n_2}n_1 - \sum_{n_1=m_1+1}^{\infty}\Delta_{1,3}b_{n_1,n_2}(n_1-1)$$
$$= \Delta_{1,3}b_{m_1,n_2}m_1 + \Delta_{0,3}b_{m_1+1,n_2} + \Delta_{0,3}b_{m_1,n_2} - \Delta_{0,3}b_{m_1,n_2} \ge \Delta_{0,3}b_{m_1,n_2}.$$

Аналогично $\sum\limits_{n_2=m_2}^{\infty}\Delta_{0,3}b_{m_1,n_2}\ge\Delta_{0,1}b_{m_1,m_2}$.

Таким образом,

$$I_2 \ge C_4\sum_{m_2=2}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{m_2+1}}^{\frac{\pi}{m_2}}\varphi_2(x_2)\,dx_2m_2^{2p_2} \times\left(\sum_{m_1=2}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{m_1+1}}^{\frac{\pi}{m_1}}\varphi_1(x_1)\,dx_1m_1^{p_1}(\Delta_{0,1}b_{m_1-1,m_2})^{p_1}\right)^{p_2/p_1},$$

$$I_2 \ge C_5\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_2(x_2)\,dx_2 2^{2p_2}\left(\sum_{m_1=2}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{m_1+1}}^{\frac{\pi}{m_1}}\varphi_1(x_1)\,dx_1m_1^{p_1}(\Delta_{0,1}b_{m_1-1,1})^{p_1}\right)^{p_2/p_1}.$$

Далее,

$$I_1 \geq C_6 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_2(x_2)\,dx_2 \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_1(x_1)\,dx_1 (\Delta_{0,1} b_{0,1})^{p_1} \right)^{p_2/p_1},$$

$$I_1 \geq C_7 \sum_{m_2=2}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{m_2+1}}^{\frac{\pi}{m_2}} \varphi_2(x_2)\,dx_2 m_2^{2p_2} \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_1(x_1)\,dx_1 (\Delta_{0,1} b_{0,m_2})^{p_1} \right)^{p_2/p_1}.$$

Объединяя оценки для I_1 и I_2, будем иметь

$$I^{1/p_2} \geq C_8 \cdot \mathrm{Sd}(0,1,1,2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2),$$

где C_8 не зависит от $\{a_{n_1,n_2}\}$.

Аналогично для ряда (2) рассматриваются случаи, когда $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ или $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, или $s_1 = 1$, $s_2 = 1$.

Оценки снизу для сумм рядов (1), (3), (4) проводятся так же, как и для суммы ряда (2). Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть $\varphi_i \in \Phi$; $s_i = 0,1$, $r_i = 1,2$ $(i = 1,2)$, $k_1 \geq r_1 + 1$, $k_2 \geq r_2$, функция $\varphi_2(x_2)$ дополнительно удовлетворяет условиям A_2, A_3 или $k_1 \geq r_1$, $k_2 \geq r_2 + 1$ и функция $\varphi_1(x_1)$ дополнительно удовлетворяет условиям A_2, A_3 или $k_i \geq r_i$, а функции $\varphi_i(x_i)$ дополнительно удовлетворяют условиям A_2, A_3 $(i = 1,2)$; последовательность $\{a_{n_1,n_2}\}$ является $(\vec{k},\vec{s})$-монотонной. Тогда при любых $p_i \in (0,\infty)$*

$$\|f_{r_1,r_2}(x_1,x_2)\|_{(0,\pi)^2} \geq C \cdot \mathrm{Sd}(s_1,s_2,r_1,r_2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2), \tag{16}$$

где C не зависит от $\{a_{n_1,n_2}\}$.

Доказательство проведем на примере ряда (2). Пусть последовательность $\{a_{n_1,n_2}\}$ является $(\vec{k},\vec{s})$-монотонной, где $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 2$, $s_1 = s_2 = 1$, а функции $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$ удовлетворяют условиям A_2 и A_3. Применяя леммы 3 и 6, будем иметь

$$\begin{aligned}\|f_{1,2}(x_1,x_2)\|^{p_2}_{(0,\pi)^2} \geq C \|(1/4)(f_{1,2}(x_1,x_2) + f_{1,2}(\pi - x_1, x_2) \\ + f_{1,2}(x_1, \pi - x_2) + f_{1,2}(\pi - x_1, \pi - x_2)\|^{p_2}_{(0,\pi)^2} \geq C(I_1 + I_2),\end{aligned}$$

где

$$I_1 = \left\| \sum_{n_2=1}^{\infty} \Delta_{0,2} b_{0,n_2} \frac{\sin^2 n_2 x_2}{(2\sin x_2)^2} \right\|^{p_2}_{(0,\pi)^2},$$

$$I_2 = \left\| \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \Delta_{1,2} b_{n_1,n_2} \frac{\sin^2 n_1 x_1}{\sin x_1} \frac{\sin^2 n_2 x_2}{2\sin^2 x_2} \right\|^{p_2}_{(0,\pi)^2},$$

$b_{0,n_2} = |\Delta|_{1,2} a_{0,2(n_2-1)}$ $(n_2 = 1,2,\dots)$, $b_{n_1,n_2} = |\Delta|_{1,2} a_{2n_1-1,2(n_2-1)}$ $(n_1, n_2 = 1,2,\dots)$. Оценим I_2:

$$I_2 \geq \sum_{m_2=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \varphi_2(x_2) \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \varphi_1(x_1) |\psi_{m_1,m_2}(x_1,x_2)|^{p_1}\,dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2,$$

где

$$\psi_{m_1,m_2}(x_1,x_2) = \sum_{n_2=2^{m_2-1}-1}^{\infty} \sum_{n_1=2^{m_1-1}-1}^{\infty} \Delta_{1,2} b_{n_1,n_2} \frac{\sin^2 n_1 x_1}{\sin x_1} \frac{\sin^2 n_2 x_2}{2\sin^2 x_2}.$$

Для рассматриваемых номеров m_1 и m_2 справедливы оценки

$$\sin^2 n_1 x_1 / \sin x_1 \le C_2/x_1, \quad \sin^2 n_2 x_2 / \sin^2 x_2 \le C_3/x_2^2,$$

где постоянные C_2 и C_3 не зависят от x_1, x_2, n_1, n_2. Но тогда $\psi_{m_1,m_2}(x_1,x_2) \le C_4\ 2^{m_1+2m_2} \Delta_{0,1} b_{2^{m_1-1}-1, 2^{m_2-1}-1}$. Рассмотрим теперь

$$A(m_1,m_2) = \iint\limits_{I_{m_1,m_2}} \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\psi_{m_1,m_2}(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2,$$

где $I_{m_1,m_2} = [\pi/2^{m_1+1}, \pi/2^{m_1}] \times [\pi/2^{m_2+1}, \pi/2^{m_2}] = I_{m_1} \times I_{m_2}$. Пусть $I^0_{m_1} = \{x \in I_{m_1} : \varphi_1(x_1) \ne 0\}, I^0_{m_2} = \{x \in I_{m_2} : \varphi_2(x_2) \ne 0\}$, $I^0_{m_1,m_2} = I^0_{m_1} \times I^0_{m_2}$. Не ограничивая общности, считаем, что $\mu I^0_{m_1} \cdot \mu I^0_{m_2} \ne 0$, где μ — мера Лебега.

Так как функции $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$ удовлетворяют условию A_2, то

$$A(m_1,m_2) \ge C_5 2^{m_1+2m_2} \Delta_{0,1} b_{2^{m_1-1}, 2^{m_2-1}} \int\limits_{I^0_{m_1}} \varphi_1(x_1)\, dx_1 \int\limits_{I^0_{m_2}} \varphi_2(x_2)\, dx_2. \tag{17}$$

Положим для фиксированных m_1 и m_2 и для $x \in I^0_{m_2}$

$$I^{01}_{m_1,m_2}(x_2) = \left\{ x_1 \in I^0_{m_1} : \psi_{m_1,m_2}(x_1,x_2) \ge \frac{C_5}{\pi^2} 2^{m_1+2m_2} \Delta_{0,1} b_{2^{m_1-1}.2^{m_2-1}} \right\}$$

и

$$I^{01}_{m_2} = \left\{ x_2 \in I^0_{m_2} : \int\limits_{I^{01}_{m_1,m_2}(x_2)} \varphi_1(x_1)\, dx_1 \ge \frac{C_5}{\pi^2 C_4} \int\limits_{I^0_{m_1}} \varphi_1(x_1)\, dx_1 \right\}.$$

Докажем, что

$$\int\limits_{I^{01}_{m_2}} \varphi_2(x_2)\, dx_2 \ge \frac{C_5}{\pi^2 C_4} \int\limits_{I^0_{m_2}} \varphi_2(x_2)\, dx_2. \tag{18}$$

Предположим противное: пусть левая часть неравенства (18) меньше правой. Тогда

$$\begin{aligned} A(m_1,m_2) = &\int\limits_{I^{01}_{m_2}} \varphi_2(x_2) \Bigg(\int\limits_{I^0_{m_1}} \varphi_1(x_1)\psi_{m_1,m_2}(x_1,x_2)\, dx_1 \Bigg) dx_2 \\ &+ \int\limits_{I^0_{m_2} \setminus I^{01}_{m_2}} \varphi_2(x_2) \Bigg(\int\limits_{I^{01}_{m_1,m_2}(x_2)} \varphi_1(x_1)\psi_{m_1,m_2}(x_1,x_2)\, dx_1 \Bigg) dx_2 \\ &+ \int\limits_{I^0_{m_2} \setminus I^{01}_{m_2}} \varphi_2(x_2) \Bigg(\int\limits_{I^0_{m_1} \setminus I^{01}_{m_1,m_2}(x_2)} \varphi_1(x_1)\psi_{m_1,m_2}(x_1,x_2)\, dx_1 \Bigg) dx_2 \\ &\le \frac{1}{3} C_5 2^{m_1+2m_2} \Delta_{0,1} b_{2^{m_1-1}-1, 2^{m_2-1}-1} \int\limits_{I^0_{m_1}} \varphi_1(x_1)\, dx_1 \int\limits_{I^0_{m_2}} \varphi_2(x_2)\, dx_2, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (17). Следовательно, верно (18). Тогда

$$I_2 \geq \sum_{m_2=1}^{\infty} \int\limits_{I^{01}_{m_2}} \varphi_2(x_2) \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \int\limits_{I^{01}_{m_1,m_2}(x_2)} \varphi_1(x_1)(\psi_{m_1,m_2}(x_1,x_2))^{p_1}\, dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2$$

$$\geq C_6 \sum_{m_2=1}^{\infty} \int\limits_{I_{m_2}} \varphi_2(x_2)\, dx_2 \left(\sum_{m_1=1}^{\infty} \int\limits_{I_{m_1}} \varphi_1(x_1)\, dx_1 2^{m_1 p_1} \right.$$

$$\left. \times (\Delta_{0,1} b_{2^{m_1-1}-1,2^{m_2-1}-1})^{p_1} \right)^{p_2/p_1} 2^{2m_2 p_2} \geq C_7 \sum_{n_2=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2(n_2+1)}}^{\frac{\pi}{2n_2}} \varphi_2(x_2)\, dx_2 n_2^{2p_2}$$

$$\times \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2(n_1+1)}}^{\frac{\pi}{2n_1}} \varphi_1(x_1)\, dx_1 n_1^{p_1} \times (\Delta_{0,1}(|\Delta|_{1,2} a_{2n_1-1,2(n_2-1)}))^{p_1} \right)^{p_2/p_1}$$

$$\geq C_8 \sum_{n_2=2}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2}} \varphi_2(x_2)\, dx_2 n_2^{2p_2}$$

$$\times \left(\sum_{n_1=2}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\frac{\pi}{n_1}} \varphi_1(x_1)\, dx_1 n_1^{p_1} (\Delta_{0,1}(|\Delta|_{1,1} a_{n_1-1,n_2-1}) \right)^{p_2/p_1}. \quad (19)$$

Аналогично проверяется, что

$$I_2 \geq C_9 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_2(x_2)\, dx_2 \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_1(x_1)\, dx_1 (\Delta_{0,1}(|\Delta|_{1,1} a_{1,0}))^{p_1} \right)^{p_2/p_1},$$

$$I_2 \geq C_{10} \sum_{n_2=2}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2}} \varphi_2(x_2)\, dx_2 n_2^{2p_2} \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_1(x_1)\, dx_1 (\Delta_{0,1}(|\Delta|_{1,1} a_{1,n_2-1}) \right)^{p_2/p_1},$$

$$I_1 \geq C_{11} \sum_{n_2=2}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2}} \varphi_2(x_2)\, dx_2 n_2^{2p_2} \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_1(x_1)\, dx_1 (\Delta_{0,1}(|\Delta|_{0,1} a_{0,n_2-1}))^{p_1} \right)^{p_2/p_1},$$

$$I_1 \geq C_{12} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_2(x_2)\, dx_2 \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_1(x_1)\, dx_1 (\Delta_{0,1}(|\Delta|_{1,1} a_{0,0}))^{p_1} \right)^{p_2/p_1}.$$

Таким образом,

$$I_1 + I_2 \geq C_{13} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_2(x_2)\, dx_2 \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_1(x_1)\, dx_1 (\Delta_{0,1}(|\Delta|_{1,1} a_{0,0}))^{p_1} \right)^{p_2/p_1}, \quad (20)$$

$$I_1 + I_2$$
$$\geq C_{14} \sum_{n_2=2}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2}} \varphi_2(x_2)\, dx_2 n_2^{2p_2} \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_1(x_1)\, dx_1 (\Delta_{0,1}(|\Delta|_{1,1} a_{0,n_2-1}))^{p_1} \right)^{p_2/p_1}. \quad (21)$$

Аналогично можно показать, что

$$I_2 \geq C_{15} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_2(x_2)\, dx_2 \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\frac{\pi}{n_1}} \varphi_1(x_1)\, dx_1 n_1^{p_1} (\Delta_{0,1}(|\Delta|_{1,1} a_{n_1-1,0}))^{p_1} \right)^{p_2/p_1}. \quad (22)$$

Объединяя неравенства (19)–(22), получаем

$$\|f_{1,2}(x_1,x_2)\|_{(0,\pi)^2} \geq C_{16} \cdot \mathrm{Sd}(1,1,1,2,\{a_{n_1,n_2}\}, p_1, p_2, \varphi_1, \varphi_2),$$

где C_{16} не зависит от последовательности $\{a_{n_1,n_2}\}$.

Аналогично для ряда (2) рассматриваются случаи, когда при $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 2$ либо $s_1 = s_2 = 0$, либо $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, либо $s_1 = 0$, $s_2 = 1$.

Доказательство оценок снизу для остальных случаев проводится так же, как и для суммы ряда (2). Лемма 9 доказана.

3. Доказательство утверждения 1.

Из (15) следует левое из неравенств (7), а из (14) — правое. Тем самым утверждение 1 доказано.

4. Доказательство утверждения 2.

Левое из неравенств (8) вытекает из (16), правое из неравенств (8) при $s_1 = s_2 = 0$ — из (14). Рассмотрим случаи значений s_1 и s_2, когда $s_1 + s_2 \neq 0$. Пусть, например, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, и рассмотрим ряд (2). Продолжим функцию $\varphi_2(x_2)$ 2π-периодически.

Используем равенство (его нетрудно проверить непосредственно)

$$f_{1,2}(x_1, x_2+\pi) = f_{1,2}(x_1,x_2) - \sum_{n_2=1}^{\infty} a_{0,2n_2-1} \cos(2n_2-1)x_2$$
$$- 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1,2n_2-1} \sin n_1 x_1 \ \cos(2n_2-1)x_2.$$

Имеем

$$\|f_{1,2}(x_1,x_2)\|^{p_2}_{(-\pi,\pi)^2} = \|f_{1,2}(x_1,x_2)\|^{p_2}_{(-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})}$$
$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_2(x_2) \times \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(x_1) |f_{1,2}(x_1,x_2)|^{p_1}\, dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2$$
$$+ \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_2(x_2+\pi) \times \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(x_1) |f_{1,2}(x_1,x_2+\pi)|^{p_1}\, dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2$$
$$\leq C \Bigg(\|f_{1,2}(x_1,x_2)\|^{p_2}_{(-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} + \left\| \sum_{n_2=1}^{\infty} a_{0,2n_2-1} \cos(2n_2-1)x_2 \right\|^{p_2}_{(-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$$

$$+\left\|\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}a_{n_1,2n_2-1}\sin n_1x_1\times\cos(2n_2-1)x_2\right\|^2_{(-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\Bigg)=C(I_1+I_2+I_3).$$

Из леммы 7 следует, что $I_1\le C_1S^{p_2}(0,1,1,2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2)$.

Оценим I_2. Рассуждая, как при доказательстве леммы 6, получим следующее представление:

$$\sum_{n_2=1}^{\infty}a_{0,2n_2-1}\cos(2n_2-1)x_2=\sum_{n_2=1}^{\infty}\Delta_{0,2}a_{0,2n_2-1}\sin n_2x_2\ \sin(n_2+1)x_2/(2sin^2x_2).$$

Повторяя доказательство леммы 7, имеем

$$I_2\le C_2\ S^{p_2}(0,1,1,2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2).$$

Аналогично проверяется, что

$$I_3\le C_3\ S^{p_2}(0,1,1,2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2).$$

Таким образом, объединяя полученные неравенства для I_1–I_3, окончательно получаем

$$\|f_{1,2}(x_1,x_2)\|_{(-\pi,\pi)^2}\le C_4\ S(0,1,1,2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1,\varphi_2),$$

где C_4 не зависит от $\{a_{n_1,n_2}\}$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Утверждение 2 доказано.

Замечание 4. Рассмотрим ряды такие же, как в работе [4]. Для этого в ряде (1) положим $a_{n_1,0}=a_{0,n_2}=0$ $(n_1,n_2=1,2,\dots)$; в ряде (2) — $a_{n_1,0}=0$ $(n_1=1,2,\dots)$; в ряде (3) — $a_{0,n_2}=0$ $(n_2=1,2,\dots)$. Тогда в случае $s_1=s_2=0$ можно несколько ослабить условия на функции $\varphi_i(x_i)$ $(i=1,2)$. Введем обозначение $\varphi_i^c(x_i)=\varphi_i(x_i)+\varphi_i(-x_i)$ $(i=1,2)$.

Утверждение 3. *Пусть $\varphi_i\in\Phi$, φ_i^c удовлетворяют условию A_1; $r_1=1,2$, $k_i\ge r_i$ $(i=1,2)$; последовательность $\{a_{n_1,n_2}\}$ удовлетворяет условию (5) и $\Delta_{k_1,k_2}a_{n_1,n_2}\ge0$ для $n_i=0+[1/r_i],1+[1/r_i],2+[1/r_i],\dots$ $(i=1,2)$. Тогда при любых $p_i\in(0,\infty)$*

$$\|f_{r_1,r_2}(x_1,x_2)\|_{(-\pi,\pi)^2}\le C_1\cdot S_1\big(r_1,r_2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1^c,\varphi_2^c\big),$$

где

$$S_1(r_1,r_2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1^c,\varphi_2^c)=\left(\sum_{n_2=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2}}\varphi_2^c(x_2)\,dx_2n_2^{(2-[1/r_2])p_2}\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{n_1=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\frac{\pi}{n_1}}\varphi_1^c(x_1)\,dx_1n_1^{(2-[1/r_1])p_1}(\Delta_{r_1-1,r_2-1}a_{n_1-1+[1/r_1],n_2-1+[1/r_2]})^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}},$$

а положительная постоянная C_1 не зависит от последовательности $\{a_{n_1,n_2}\}$.

Утверждение 4. *Пусть $\varphi_i\in\Phi$; $r_1=1,2$, $k_i\ge r_i+1$ $(i=1,2)$; последовательность $\{a_{n_1,n_2}\}$ удовлетворяет условию (5) и $\Delta_{k_1,k_2}a_{n_1,n_2}\ge0$ для $n_i=0+[1/r_i],1+[1/r_i],2+[1/r_i],\dots$ $(i=1,2)$. Тогда при любых $p_i\in(0,\infty)$*

$$\|f_{r_1,r_2}(x_1,x_2)\|_{(-\pi,\pi)^2}\ge C_2S_1\big(r_1,r_2,\{a_{n_1,n_2}\},p_1,p_2,\varphi_1^c,\varphi_2^c\big),\tag{23}$$

где C_2 не зависит от последовательности $\{a_{n_1,n_2}\}$.

Утверждение 5. *Пусть* $\varphi_i \in \Phi$*;* $r_1 = 1, 2$ $(i = 1, 2)$, $k_1 \geq r_1 + 1$, $k_2 \geq r_2$ *и функция* $\varphi_2^c(x_2)$ *удовлетворяет условиям* A_2, A_3 *или* $k_1 \geq r_1$, $k_2 \geq r_2 + 1$, *а функция* $\varphi_1^c(x_1)$ *удовлетворяет условиям* A_2, A_3 *или* $k_i \geq r_i$ *и функции* $\varphi_i^c(x_i)$ *удовлетворяют условиям* A_2, A_3 $(i = 1, 2)$*; последовательность* $\{a_{n_1,n_2}\}$ *удовлетворяет условию* (5) *и* $\Delta_{k_1,k_2} a_{n_1,n_2} \geq 0$ *для* $n_i = 0 + [1/r_i], 1 + [1/r_i], 2 + [1/r_i], \ldots$ $(i = 1, 2)$. *Тогда при любых* $p_i \in (0, \infty)$ *имеет место неравенство* (23).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. И.* Курс современного анализах. М.: Физматгиз, 1962. Ч. 1.
2. *Hardy G. H.* On double Fourier series and especially those which represent the double zeta functions with real and in commensurable parameters // Quart. J. Math. 1906. V. 37. P. 53–79.
3. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 483–521.
4. *Вуколова Т. М., Дьяченко М. И.* Оценки смешанных норм сумм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 1997. Т. 7. С. 3–13.
5. *Потапов М. К., Бериша М.* Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного // Publ. Inst. Math. 1979. V. 26. P. 215–228.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
7. *Вуколова Т. М.* О рядах по синусам и косинусам с кратно монотонными коэффициентами // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1990. Т. 5. С. 38–42.

Статья поступила 6 декабря 2001 г.

Симонов Борис Витальевич
Волгоградский гос. технический университет, факультет экономики и управления, кафедра прикладной математики, пр. В. И. Ленина, 28, Волгоград 400066
dvr@vstu.ru