

ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЛОСКИЕ 3-МНОГООБРАЗИЯ Р. Р. Исангулов

Аннотация: Существует хорошо известная проблема распознавания римановых многообразий по спектру их оператора Лапласа — Бельтрами, т. е. проблема эквивалентности изоспектральности и изометричности многообразий. В данной работе эта проблема решена для компактных плоских трехмерных многообразий.

Ключевые слова: изоспектральность, плоские 3-многообразия, уравнение теплопроводности на многообразии, накрытие, функция следа.

§ 1. Введение

Работа связана со спектром оператора Лапласа — Бельтрами $\Delta = -\operatorname{div} \operatorname{grad}$ на компактном римановом многообразии без края. Будем говорить, что два многообразия M и M' *изоспектральны*, если спектры операторов Лапласа — Бельтрами на многообразиях M и M' совпадают.

Существует хорошо известная проблема распознавания римановых многообразий по спектру их оператора Лапласа — Бельтрами, т. е. проблема эквивалентности изоспектральности и изометричности многообразий: будут ли изоспектральные многообразия изометричными? В работе [1] Кац сформулировал эту проблему в вопросе: «Можно ли услышать форму барабана?» В общем случае ответ отрицательный (см. [2]).

В 1964 г. Милнор [3] привел пример 16-мерных изоспектральных неизометричных плоских торов. В 1972 г. МакКин [4] показал, что мощность множества изоспектральных неизометричных компактных римановых поверхностей всегда конечна и зависит только от рода поверхности g ($g \geq 2$). В 1985 г. Сунада [5] открыл общий путь в конструировании пар изоспектральных неизометричных римановых многообразий. Используя новый метод, в 1988 г. Брукс [6] независимо от [7] доказал, что два 2-мерных плоских тора изоспектральны тогда и только тогда, когда они изометричны. В 1990 г. Шиман [8] построил пример 4-мерных изоспектральных неизометричных плоских торов. В 1992 г. Конвэй и Слоан [9] построили семейство пар изоспектральных 4-мерных решеток. Затем в 1997 г. Шиман [10] доказал, что два 3-мерных плоских тора изоспектральны тогда и только тогда, когда они изометричны. Недавно автор [11] независимо от Берже, Годюшон и Мазе [7] доказал, что две плоские бутылки Клейна изоспектральны тогда и только тогда, когда они изометричны. Основные факты

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00104), Государственной программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-311.2003.1) и INTAS (грант 03-51-3663).

и определения из спектральной теории оператора Лапласа — Бельтрами, определенного на римановом многообразии, можно найти, например, в монографии [12, гл. 7].

В данной работе эта проблема решена для компактных плоских трехмерных многообразий. Известно [13], что существуют 10 классов попарно гомеоморфных компактных связных плоских 3-многообразий (6 ориентируемых и 4 неориентируемых). Пусть M_1, \dots, M_6 являются представителями шести классов ориентируемых, а N_1, \dots, N_4 — представителями четырех классов неориентируемых компактных плоских 3-многообразий в порядке, приведенном в [13]. Для описания спектра многообразия M мы используем функцию следа многообразия M

$$\mathrm{tr}(H_M) = \int_M H_M(x, x, t) dM,$$

где $H_M(x, y, t)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности на многообразии M , dM — элемент объема. С помощью метода, разработанного в [11], получены следующие теоремы.

Теорема А. *Функция следа каждого компактного плоского 3-многообразия M_1, \dots, M_6 , N_1, \dots, N_4 может быть вычислена в явном виде: $\mathrm{tr}(H_{M_i}) = F_i$ для каждого многообразия M_i , $i = 1, \dots, 6$, и $\mathrm{tr}(H_{N_j}) = P_j$ для каждого многообразия N_j , $j = 1, \dots, 4$, где функции F_i и P_j приведены в приложении.*

Теорема Б. *Любые два гомеоморфных компактных плоских 3-многообразия изоспектральны тогда и только тогда, когда они изометричны.*

Теорема В. *Существует единственное семейство пар изоспектральных, но негомеоморфных компактных плоских 3-многообразий, которое состоит из многообразий M_4 и M_6 .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Для доказательства теоремы А в случае многообразия M_1 (3-мерный плоский тор) мы используем явный вид функции следа $\mathrm{tr}(H_{M_1})$, полученный в [6]. При доказательстве теоремы Б в случае многообразия M_1 мы применяем результат, полученный в [10]. Все остальные случаи доказаны нами с помощью совершенно иных методов.

Для доказательства теоремы А мы используем связь между фундаментальными решениями уравнения теплопроводности на многообразии M и его регулярном накрытии (лемма 2).

Теорема В вытекает из теоремы А, а доказательство теоремы Б получается из теоремы А и следующих утверждений.

(i) *Спектр многообразия M однозначно определяет функцию следа $\mathrm{tr}(H_M)$, и, наоборот, по функции следа $\mathrm{tr}(H_M)$ можно однозначно определить спектр многообразия M (предложения 3 и 4).*

(ii) *Функция следа $\mathrm{tr}(H_M)$ определяет с точностью до изометрии компактное плоское 3-многообразие M (лемма 3).*

В данной работе мы используем [12, 13] для стандартных ссылок. В § 2 собраны основные факты о компактных плоских 3-многообразиях и спектральной теории оператора Лапласа — Бельтрами. В § 3–5 содержатся доказательства теорем А–В соответственно.

Результаты данной работы составляют предмет магистерской диссертации «Изоспектральные плоские 3-многообразия», защищенной автором в Новосибирском государственном университете в 2002 г. При подготовке к печати было обнаружено, что аналогичные результаты были независимо получены в недавних препринтах [14, 15].

Автор признателен профессору А. Д. Медных за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

§ 2. Основные факты спектральной теории и теории компактных плоских 3-многообразий

В этом параграфе приведем основные факты о компактных плоских 3-многообразиях (см. [13]) и спектральной теории оператора Лапласа — Бельтрами $\Delta = -\operatorname{div} \operatorname{grad}$, определенного на компактном римановом многообразии без края (см. [12]).

2.1. Компактные плоские 3-многообразия. Обозначим через $E(n)$ группу движений евклидова n -мерного пространства \mathbb{R}^n . Каждое движение состоит из (возможно, несобственного) поворота A и последующего параллельного переноса t_a на вектор a . Запишем это движение как (A, t_a) . Очевидно, что A — элемент $O(n)$ и $a \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, евклидова группа $E(n)$ является полупрямым произведением $O(n)$ и \mathbb{R}^n и удовлетворяет следующему правилу:

$$(A, t_a)(B, t_b) = (AB, t_{Ab+a}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Плоское компактное связное n -многообразие M^n — это пространство орбит \mathbb{R}^n , определенное действием равномерно разрывной дискретной подгруппы без неподвижных точек $\Gamma \in E(n)$, $M^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$. Оно допускает нормальное риманово накрытие n -мерным тором $T^n = \mathbb{R}^n/\Gamma^*$, где Γ^* — нормальная подгруппа конечного индекса ранга n , $\Gamma^* < \Gamma$. Более того, можно выбрать $\Gamma^* = \Gamma \cap \mathbb{R}^n$. Заметим (см. [13, гл. 3]), что Γ не имеет нетривиальных элементов конечного порядка.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Группа скольжений Ψ накрытия $T^n \rightarrow M^n$ называется группой голономии многообразия M^n , $\Psi = \Gamma/\Gamma^*$.*

Следующие результаты могут быть найдены, например, в [13].

Теорема 1. *Существуют ровно шесть классов аффинно диффеоморфных между собой компактных связных ориентируемых плоских 3-мерных римановых многообразий. Представителями этих классов служат многообразия \mathbb{R}^3/Γ , где Γ — одна из шести перечисленных ниже групп. (Далее Λ — решетка в \mathbb{R}^3 с образующими a_1, a_2, a_3 ; $t_i = t_{a_i}$ — параллельный перенос на вектор a_i ; $\Psi = \Gamma/\Gamma^*$ — группа голономии.)*

M_1 . $\Psi = \{1\}$, а Γ порождена сдвигами $\{t_1, t_2, t_3\}$, где $\{a_i\}$ линейно независимы.

M_2 . $\Psi = \mathbb{Z}_2$, а Γ порождена множеством $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$, где $\alpha^2 = t_1, \alpha t_2 \alpha^{-1} = t_2^{-1}, \alpha t_3 \alpha^{-1} = t_3^{-1}$, причем a_1 ортогонален к a_2 и a_3 , $\alpha = (A, t_{a_1/2})$ и $A(a_1) = a_1, A(a_2) = -a_2, A(a_3) = -a_3$.

M_3 . $\Psi = \mathbb{Z}_3$, а Γ порождена множеством $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$, где $\alpha^3 = t_1, \alpha t_2 \alpha^{-1} = t_3, \alpha t_3 \alpha^{-1} = t_2^{-1} t_3^{-1}$; a_1 ортогонален к a_2 и a_3 , $\|a_2\| = \|a_3\|$ и $\{a_2, a_3\}$ — гексагональная плоская решетка, причем $\alpha = (A, t_{a_1/3})$, $A(a_1) = a_1, A(a_2) = a_3, A(a_3) = -a_2 - a_3$.

- M_4 . $\Psi = \mathbb{Z}_4$, а Γ порождена множеством $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$, где $\alpha^4 = t_1$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_3$ и $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_2^{-1}$; a_i попарно ортогональны, $\|a_2\| = \|a_3\|$, причем $\alpha = (A, t_{a_1/4})$, $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = a_3$, $A(a_3) = -a_2$.
- M_5 . $\Psi = \mathbb{Z}_6$, а Γ порождена множеством $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$, где $\alpha^6 = t_1$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_3$ и $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_2^{-1} t_3$; a_1 ортогонален к a_2 и a_3 , $\|a_2\| = \|a_3\|$ и $\{a_2, a_3\}$ — плоская решетка, причем угол между a_2 и a_3 равен $\pi/3$; $\alpha = (A, t_{a_1/6})$, где $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = a_3$, $A(a_3) = -a_3 - a_2$.
- M_6 . $\Psi = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, а Γ порождена множеством $\{\alpha, \beta, \gamma, t_1, t_2, t_3\}$, где $\gamma \beta \alpha = t_1 t_3$ и $\alpha^2 = t_1$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_2^{-1}$, $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_3^{-1}$; $\beta t_1 \beta^{-1} = t_1^{-1}$, $\beta^2 = t_2$, $\beta t_3 \beta^{-1} = t_3^{-1}$; $\gamma t_1 \gamma^{-1} = t_1^{-1}$, $\gamma t_2 \gamma^{-1} = t_2^{-1}$, $\gamma^2 = t_3$; векторы a_i попарно ортогональны и $\alpha = (A, t_{a_1/2})$, где $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = -a_2$, $A(a_3) = -a_3$; $\beta = (B, t_{(a_2+a_3)/2})$, где $B(a_1) = -a_1$, $B(a_2) = a_2$, $B(a_3) = -a_3$; $\gamma = (C, t_{(a_1+a_2+a_3)/2})$, где $C(a_1) = -a_1$, $C(a_2) = -a_2$, $C(a_3) = a_3$.

Теорема 2. Существуют ровно четыре класса аффинно диффеоморфных компактных связных неориентируемых плоских 3-мерных римановых многообразий. Представителями этих классов служат многообразия \mathbb{R}^3/Γ , где Γ — одна из четырех перечисленных ниже групп. В дальнейшем Λ — порожденная сдвигами решетка с образующими a_1, a_2, a_3 ; $t_i = t_{a_i}$ — параллельный перенос на вектор a_i ; $\Psi = \Gamma/\Gamma^*$ — группа голономии, а $\Gamma_0 = \Gamma \cap \text{SO}(3) \cdot \mathbb{R}^3$, так что $\mathbb{R}^3/\Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma$ — 2-листное ориентируемое накрытие.

- N_1 . $\Psi = \mathbb{Z}_2$, а Γ порождена множеством $\{\varepsilon, t_1, t_2, t_3\}$, где $\varepsilon^2 = t_1$, $\varepsilon t_2 \varepsilon^{-1} = t_2$, $\varepsilon t_3 \varepsilon^{-1} = t_3^{-1}$, причем a_1 и a_2 ортогональны к a_3 и $\varepsilon = (E, t_{a_1/2})$, $E(a_1) = a_1$, $E(a_2) = a_2$, $E(a_3) = -a_3$. Γ_0 порождена множеством $\{t_1, t_2, t_3\}$.
- N_2 . $\Psi = \mathbb{Z}_2$, а Γ порождена множеством $\{\varepsilon, t_1, t_2, t_3\}$, где $\varepsilon^2 = t_1$, $\varepsilon t_2 \varepsilon^{-1} = t_2$, $\varepsilon t_3 \varepsilon^{-1} = t_1 t_2 t_3^{-1}$; ортогональная проекция a_3 на плоскость (a_1, a_2) равна $(a_1 + a_2)/2$, причем $\varepsilon = (E, t_{a_1/2})$, $E(a_1) = a_1$, $E(a_2) = a_2$, $E(a_3) = a_1 + a_2 - a_3$. Γ_0 порождена множеством $\{t_1, t_2, t_3\}$.
- N_3 . $\Psi = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, а Γ порождена множеством $\{\varepsilon, \alpha, t_1, t_2, t_3\}$, где $\alpha^2 = t_1$, $\varepsilon^2 = t_2$, $\varepsilon \alpha \varepsilon^{-1} = t_2 \alpha$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_2^{-1}$, $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_3^{-1}$, $\varepsilon t_1 \varepsilon^{-1} = t_1$ и $\varepsilon t_3 \varepsilon^{-1} = t_3^{-1}$, причем a_i попарно ортогональны и $\alpha = (A, t_{a_1/2})$, где $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = -a_2$, $A(a_3) = -a_3$; $\varepsilon = (E, t_{a_2/2})$, где $E(a_1) = a_1$, $E(a_2) = a_2$, $E(a_3) = -a_3$. Γ_0 порождена множеством $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$.
- N_4 . $\Psi = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, а Γ порождена множеством $\{\varepsilon, \alpha, t_1, t_2, t_3\}$, где $\alpha^2 = t_1$, $\varepsilon^2 = t_2$, $\varepsilon \alpha \varepsilon^{-1} = t_2 t_3 \alpha$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_2^{-1}$, $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_3^{-1}$, $\varepsilon t_1 \varepsilon^{-1} = t_1$ и $\varepsilon t_3 \varepsilon^{-1} = t_3^{-1}$, причем a_i попарно ортогональны и $\alpha = (A, t_{a_1/2})$, где $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = -a_2$, $A(a_3) = -a_3$; $\varepsilon = (E, t_{(a_2+a_3)/2})$, где $E(a_1) = a_1$, $E(a_2) = a_2$, $E(a_3) = -a_3$. Γ_0 порождена множеством $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$.

Теорема 3 (изометрическая классификация компактных 3-многообразий). Пусть M — компактное плоское 3-многообразие, $M = \mathbb{R}^3/\Gamma$.

- (i) Если M — тор (тип M_1), то элементами из $\text{SL}(3, \mathbb{Z}) \setminus \text{GL}^+(3, \mathbb{R})/\text{SO}(3)$ параметризуются все возможные классы изометрии.
- (ii) Если M принадлежит типу M_2 , то классы изометрии можно параметризовать с помощью $\|a_1\|$ и двумерной решетки $\{a_2, a_3\}$, порожденной векторами a_2 и a_3 .
- (iii) Если M принадлежит одному из типов M_3, M_4, M_5 , то классы изометрии можно параметризовать с помощью $\|a_1\|$ и $\|a_3\|$.

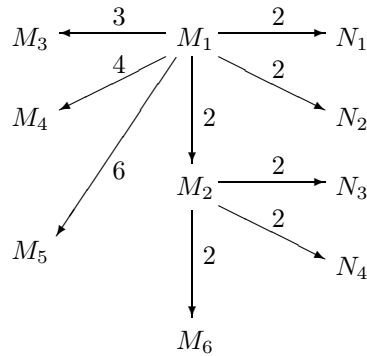


Рис. 1. Иерархия (топологических) накрытий

(iv) Если M имеет тип M_6 , то решетка является прямоугольной, и все возможные случаи параметризуются неупорядоченными тройками $\{\|a_1\|, \|a_2\|, \|a_3\|\}$.

(v) Если M — многообразие типа N_1 или N_2 , то классы изометрии параметризуются парами $(p, \|a_3\|)$, где p — элемент, соответствующий двумерной решетке $\{a_1, a_2\}$, порожденной векторами a_1 и a_2 .

(vi) Если M имеет тип N_3 или N_4 , то решетка $\Lambda = \{a_1, a_2, a_3\}$ прямоугольная, и все возможные случаи параметризуются упорядоченными тройками $(\|a_1\|, \|a_2\|, \|a_3\|)$.

В работе [16] Люфт и Сьерве показали, что компактное плоское 3-многообразие допускает следующую иерархию (топологических) накрытий (см. рис. 1), где число, стоящее рядом со стрелкой, обозначает количество листов в соответствующем регулярном накрытии. Нам потребуется следующее хорошо известное

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\pi : M' \rightarrow M$ — топологическое накрытие и M наделено плоской метрикой. Тогда эта метрика может быть поднята до плоской метрики на M' таким образом, что π становится локальной изометрией. Обратное неверно: плоская метрика на M' не обязательно является поднятием плоской метрики на M посредством π .

2.2. Спектральная теория оператора Лапласа — Бельтрами. Напомним основные факты из спектральной теории оператора Лапласа — Бельтрами, определенного на римановом многообразии. Их можно найти, например, в монографии [12, гл. 7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Оператор Лапласа — Бельтрами* (или, для краткости, *лапласиан*) — это оператор

$$\Delta(f) = -\operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Пусть M — произвольное полное m -мерное риманово многообразие. Тогда лапласиан представляется в виде

$$\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^m \partial_j (g^{jk} \sqrt{g} \partial_k u), \quad u \in C^\infty(M),$$

где ∂_j — частная производная по j -й координате; $g = \det(g_{ij})$ — определитель метрического тензора, где g_{ij} — компоненты метрического тензора в локальных координатах и g^{ij} — компоненты обратного тензора.

Рассматриваем функциональное пространство — гильбертово пространство $L_2(M)$ интегрируемых с квадратом функций $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ на компактном связном римановом многообразии M без края со скалярным произведением

$$(f, g) \mapsto \int_M fg \, dM, \quad f, g \in L_2(M),$$

где dM — элемент объема.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Пусть A, B — гладкие многообразия, $F = \mathbb{R}$ или \mathbb{C} . Будем обозначать через $C^{l,k}(A, B; F)$ множество всех непрерывных функций $f : A \times B \rightarrow F$ с частными производными порядка l по A и k по B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть M — любое связное риманово многообразие без края. Непрерывная функция $H = H(x, y, t) : M \times M \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением уравнения теплопроводности на многообразии M* , если $H \in C^{2,1}(M \times M, (0, \infty); \mathbb{R})$ и выполнены следующие условия:

- 1) $\frac{\partial H}{\partial t} = -\Delta_x H$,
- 2) $H(x, y, t) = H(y, x, t)$,
- 3) $\lim_{t \rightarrow +0} \int_M H(x, y, t) f(y) \, dM(y) = f(x)$,

здесь сходимость равномерна по x для любых непрерывных функций f с компактным носителем на многообразии M .

Теорема 4. Пусть M — любое m -мерное компактное связное риманово многообразие без края. Тогда M имеет единственное фундаментальное решение $H = H_M(x, y, t)$ уравнения теплопроводности и

- 1) $H_M \in C^\infty(M \times M \times (0, \infty))$,
- 2) $0 \leq H_M(x, y, t) \leq c_M t^{-m/2}$, $0 < t < 1$,

где c_M — константа, зависящая от M .

Теорема 5 (спектральная теорема). Пусть M — компактное связное риманово многообразие без края. Задача на собственные значения

$$\Delta \varphi = \lambda \varphi$$

имеет полную ортонормированную систему собственных C^∞ -функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ в $L_2(M)$ с соответствующими собственными значениями $\lambda_0, \lambda_1, \dots$.

Они имеют следующие свойства:

- 1) $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$;
- 2) $H_M(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x) \varphi_n(y)$,

где ряд сходится равномерно на $M \times M$ для любого $t > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (спектр многообразия). Множество собственных значений $\{\lambda_i\}$ оператора Лапласа — Бельтрами $\Delta = -\operatorname{div} \operatorname{grad}$ на многообразии M называют *спектром многообразия M* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (решение уравнения теплопроводности). Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Непрерывная функция $u = u(x, t) : M \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *решением уравнения теплопроводности* с начальными данными $u(x, 0) = f(x)$, если $u \in C^{2,1}(M, (0, \infty); \mathbb{R})$ и

- 1) $\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta_x u$;
- 2) $u(x, 0) = f(x)$, $x \in M$.

Лемма 1. Пусть $H_M = H_M(x, y, t)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности на M , и пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда функция

$$u(x, t) := \int_M H_M(x, y, t) f(y) dM(y), \quad t > 0,$$

непрерывно продолжается до функции $u(x, t) : M \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, которая является решением уравнения теплопроводности с начальными данными $u(x, 0) = f(x)$.

§ 3. Доказательство теоремы А

Пусть M_1, \dots, M_6 являются представителями шести классов ориентируемых, а N_1, \dots, N_4 являются представителями четырех классов неориентируемых компактных плоских 3-многообразий в порядке, приведенном в § 2. Фундаментальные множества многообразий $M_1, \dots, M_6, N_1, \dots, N_4$ приведены на рис. 2–11 соответственно.

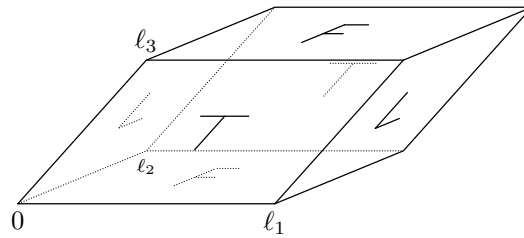


Рис. 2. Фундаментальное множество M_1 .

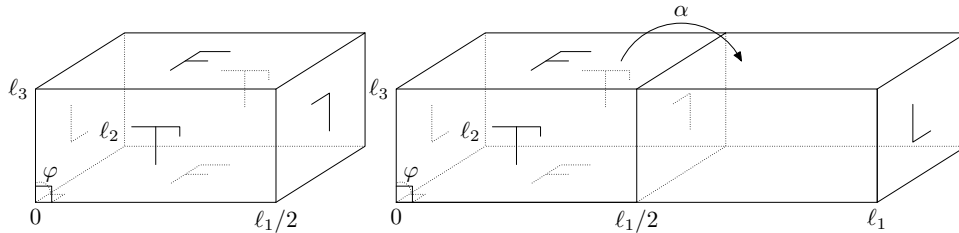


Рис. 3. Фундаментальное множество M_2 и его накрывающий тор $M_1, M_1 \xrightarrow{2} M_2$.

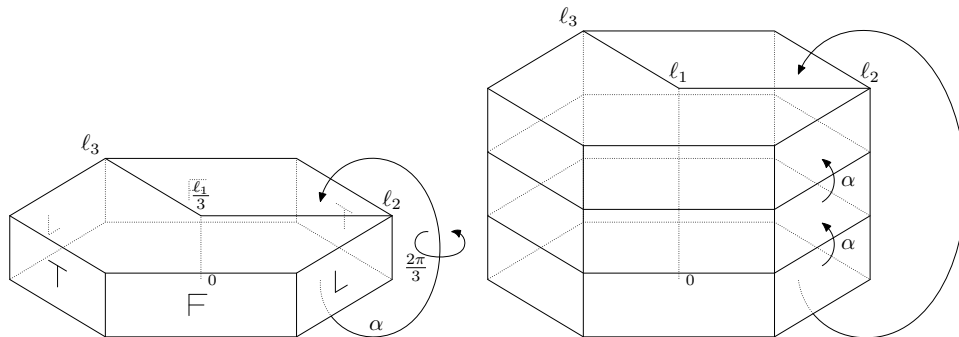


Рис. 4. Фундаментальное множество M_3 и его накрывающий тор $M_1, M_1 \xrightarrow{3} M_3$.

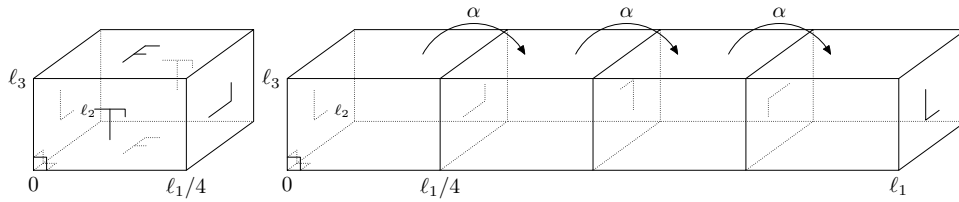


Рис. 5. Фундаментальное множество M_4 и его накрывающий тор M_1 , $M_1 \xrightarrow{4} M_4$.

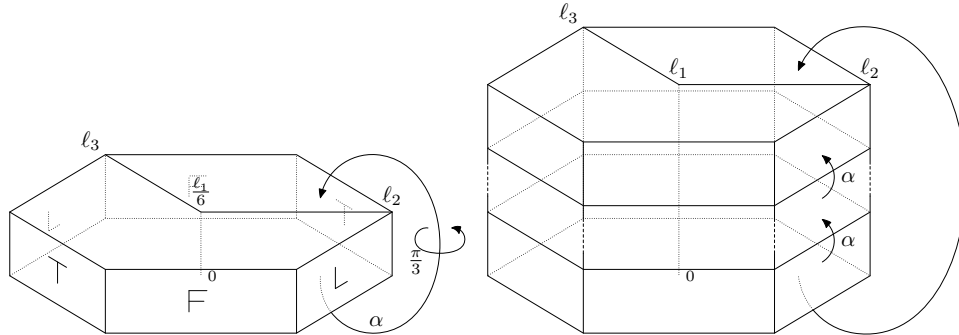


Рис. 6. Фундаментальное множество M_5 и его накрывающий тор M_1 , $M_1 \xrightarrow{6} M_5$.

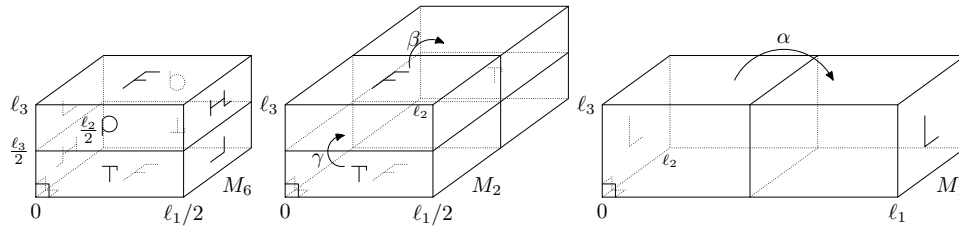


Рис. 7. Фундаментальное множество M_6 .
и его накрывающие многообразия $M_1 \xrightarrow{2} M_2 \xrightarrow{2} M_6$,

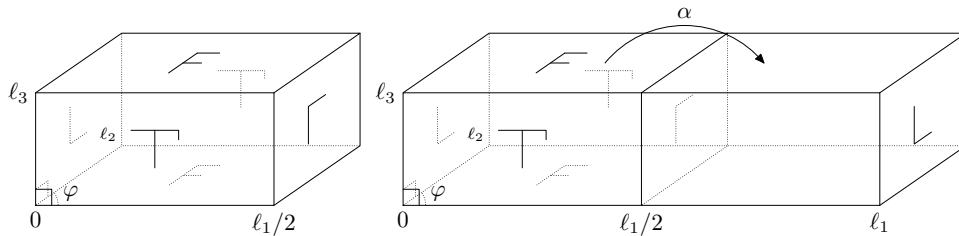


Рис. 8. Фундаментальное множество N_1 и его накрывающий тор M_1 , $M_1 \xrightarrow{2} N_1$.

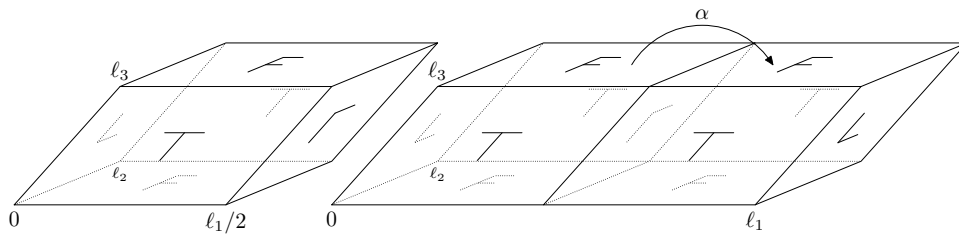


Рис. 9. Фундаментальное множество N_2 и его накрывающий тор M_1 , $M_1 \xrightarrow{2} N_2$.

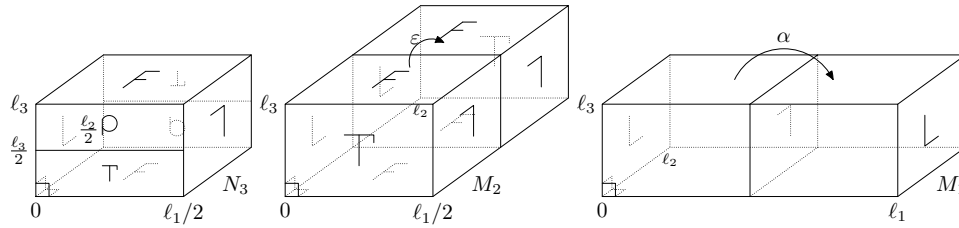


Рис. 10. Фундаментальное множество N_3 и его накрывающие многообразия $M_1 \xrightarrow{2} M_2 \xrightarrow{2} N_3$.

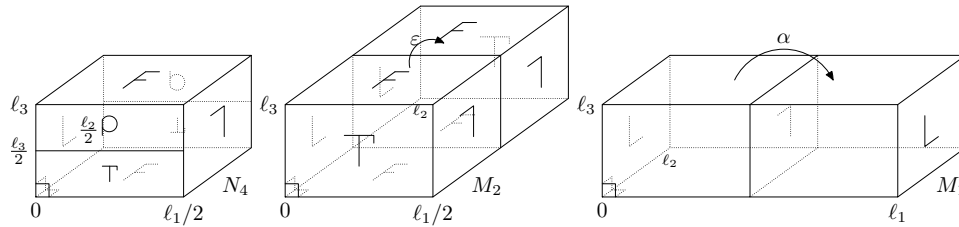


Рис. 11. Фундаментальное множество N_4 и его накрывающие многообразия $M_1 \xrightarrow{2} M_2 \xrightarrow{2} N_4$.

Предположим, что $f : M' \rightarrow M$ — накрытие. Многообразие M' определяется подгруппой $\pi_1(M')$ фундаментальной группы $\pi_1(M)$. Когда $\pi_1(M')$ — нормальная подгруппа в $\pi_1(M)$, то говорят, что $f : M' \rightarrow M$ — *регулярное накрытие*, при этом фактор-группа $G = \pi_1(M)/\pi_1(M')$, т. е. группа преобразований наложения, действует на M' как группа изометрий M' . Группа G называется *группой накрытия*. Для доказательства теоремы А нам понадобится следующая

Лемма 2 [6, с. 826]. Пусть $f : M' \rightarrow M$ — регулярное накрытие и $G = \pi_1(M)/\pi_1(M')$ — группа накрытия. Тогда

$$H_M(x, y, t) = \sum_{g \in G} H_{M'}(\tilde{x}, g\tilde{y}, t),$$

где \tilde{x} и \tilde{y} — любые прообразы на M' x и y соответственно при накрытии $f : M' \rightarrow M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что правая часть удовлетворяет всем условиям определения фундаментального решения уравнения теплопроводности. Утверждение леммы следует из условия единственности (теорема 4). Лемма 2 доказана.

Далее $\Lambda = \{l = m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3, m_i \in \mathbb{Z}, l_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, 2, 3\}$ всегда будет обозначать решетку для 3-мерного плоского тора $M_1 = \mathbb{R}^3/\Lambda$, $\text{vol}(M)$ — объем многообразия M в римановой метрике и M^* — фундаментальное множество многообразия M .

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ А. Предполагаем, что фундаментальное множество многообразия M образовано такими векторами, что фундаментальное множество плоского тора M_1 , регулярно накрывающего многообразии M , образовано векторами l_1, l_2 и l_3 . Используя взаимосвязь между фундаментальными решениями уравнения теплопроводности на многообразии M и его регулярном накрытии (лемма 2), а также свойства интеграла Эйлера —

Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, получаем в явном виде функцию следа $\text{tr}(H_M)$ многообразия M .

Докажем теорему А в случаях многообразий M_1 и M_2 . В остальных случаях она доказывается совершенно аналогично.

3.1. Многообразие M_1 (плоский тор).

Предложение 1. *Фундаментальное решение уравнения теплопроводности на многообразии M_1 , где $y = x$, имеет следующий вид:*

$$H_{M_1}(x, x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t}, \quad x \in M_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим универсальное накрытие плоского тора $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\infty} M_1$. Известно, что

$$H_{\mathbb{R}^3}(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-|x-y|^2/4t}, \quad x, y \in \mathbb{R}^3.$$

По лемме 2

$$H_{M_1}(x, x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\gamma \in \pi_1(M_1)} e^{-|\tilde{x}-\gamma\tilde{x}|^2/4t} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t},$$

здесь $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$ — любой прообраз $x \in M_1$ при накрытии $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\infty} M_1$. Предложение доказано.

Используя предложение 1, имеем

$$\text{tr}(H_{M_1}) = \int_{M_1} H_{M_1}(x, x, t) dx = \frac{\text{vol}(M_1)}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t}.$$

Теорема А в случае многообразия M_1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема А в случае 3-мерного плоского тора M_1 доказана Бруксом [6].

3.2. Многообразие M_2 . Предполагаем, что фундаментальное множество многообразия M_2 образовано линейно независимыми векторами $\ell_1/2$, ℓ_2 и ℓ_3 (см. рис. 6). В случае M_2 по теореме 1 ℓ_1 ортогонален к ℓ_2 и ℓ_3 . Обозначим через φ угол между ℓ_2 и ℓ_3 , где $0 < \varphi < \pi$.

Предложение 2. *Фундаментальное решение уравнения теплопроводности на многообразии M_2 , где $y = x$, имеет вид*

$$H_{M_2}(x, x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \left[\sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} + \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|z-\beta z+\ell|^2/4t} \right],$$

где $x \in M_2$, $z \in \mathbb{R}^3$ — любой прообраз x при накрытии $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\infty} M_1 \xrightarrow{2} M_2$ и β действует на \mathbb{R}^3 следующим образом:

$$\beta z = Az + \ell_1/2, \quad z \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \ell_1/2 = \begin{pmatrix} \ell_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица A записана в ортонормированном базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ и $\ell_1/|\ell_1| = e_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим двулистное накрытие $M_1 \xrightarrow{2} M_2$ и группу накрытия $G = \pi_1(M_2)/\pi_1(M_1)$. Заметим, что

$$\pi_1(M_2) = \pi_1(M_1) \cup \alpha\pi_1(M_1),$$

где α действует на M_1 следующим образом (см. теорему 1 в случае M_2):

$$\alpha\tilde{x} = A\tilde{x} + \xi, \quad \tilde{x} \in M_1,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \ell_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица A записана в ортонормированном базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ и $e_3 = (0, 0, 1)$. С точки зрения геометрии, α отождествляет левую и правую грани фундаментального многогранника многообразия M_2 с поворотом на угол π (см. рис. 6).

По лемме 2 имеем

$$H_{M_2}(x, x, t) = \sum_{g \in G} H_{M_1}(\tilde{x}, g\tilde{x}, t) = H_{M_1}(\tilde{x}, \tilde{x}, t) + H_{M_1}(\tilde{x}, \alpha\tilde{x}, t),$$

где $\tilde{x} \in M_1$ — любой прообраз $x \in M_2$ при накрытии $M_1 \xrightarrow{2} M_2$.

Теперь рассмотрим универсальное накрытие плоского тора $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\infty} M_1$. По лемме 2 и предложению 1 получим

$$H_{M_1}(\tilde{x}, \tilde{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t},$$

$$\begin{aligned} H_{M_1}(\tilde{x}, \alpha\tilde{x}, t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\gamma \in \pi_1(M_1)} e^{-|(\tilde{x}) - \gamma(\alpha\tilde{x})|^2/4t} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\gamma \in \pi_1(M_1)} e^{-|(\tilde{x}) - (\alpha\tilde{x}) + (\alpha\tilde{x}) - \gamma(\alpha\tilde{x})|^2/4t} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|(\tilde{x}) - (\alpha\tilde{x}) + \ell|^2/4t}, \end{aligned}$$

где $\tilde{x} \in M_1$ и $(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^3$ — любой прообраз \tilde{x} при накрытии $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\infty} \mathbb{R}^3/\Lambda = M_1$.

Заметим, что $(\alpha\tilde{x}) = \tilde{\alpha}\tilde{x}$, где $\tilde{\alpha}$ действует на \mathbb{R}^3 следующим образом:

$$\tilde{\alpha}\tilde{x} = A\tilde{x} + \xi, \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Для завершения доказательства предложения 2 положим $z = \tilde{x}$ и $\beta = \tilde{\alpha}$.

По предложению 2 имеем

$$\begin{aligned} \text{tr}(H_{M_2}) &= \int_{M_2} H_{M_2}(x, x, t) dx \\ &= \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{M_2^*} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} dx + \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{M_2^*} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|x - \alpha x + \ell|^2/4t} dx. \quad (1) \end{aligned}$$

Далее мы работаем в ортонормированном базисе e_1, e_2 и e_3 . Положим $x = (x_1, x_2, x_3)$. Нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \ell &= (\ell_1 m, \ell_2 n + \ell_3 k \cos \varphi, k \ell_3 \sin \varphi)_{e_1, e_2, e_3}; \quad \alpha x = (x_1 + \ell_1/2, -x_2, -x_3); \\ |x - \alpha x + \ell|^2 &= (m + 1/2)^2 \ell_1^2 + (2x_2 + n \ell_2 + k \ell_3 \cos \varphi)^2 + (2x_3 + k \ell_3 \sin \varphi)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь предполагаем, что $\ell_1/|\ell_1| = e_1, \ell_2/|\ell_2| = e_2$ и φ — угол между ℓ_2 и ℓ_3 . Определим объем многообразия M_2 как

$$\text{vol}(M_2) = \int_{M_2^*} dx,$$

где $dx = dx_1 dx_2 dx_3$. Заметим, что $\text{vol}(M_2) = \text{vol}(M_2^*)$ в силу того, что M_2^* — фундаментальное множество M_2 . Из (1) и (2) имеем

$$\begin{aligned} \text{tr}(H_{M_2}) &= \frac{\text{vol}(M_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} \\ &+ \frac{\ell_1/2}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{2})^2 \ell_1^2/4t} \underbrace{\sum_{n, k \in \mathbb{Z}} \iint_K e^{-[(2x_2 + n \ell_2 + k \ell_3 \cos \varphi)^2 + (2x_3 + k \ell_3 \sin \varphi)^2]/4t} dx_2 dx_3}_{I_1}, \end{aligned}$$

где K — параллелограмм, образованный векторами ℓ_2 и ℓ_3 .

Заметим, что интегрирование в интеграле I_1 по множеству K можно заменить интегрированием по прямоугольнику R , длины сторон которого равны ℓ_2 и $\ell_3 \sin \varphi$, и интеграл I_1 может быть представлен по теореме Фубини как произведение интегралов. Используя свойства интеграла Эйлера — Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\int_0^{\ell_3 \sin \varphi} e^{-(2x_3 + k \ell_3 \sin \varphi)^2/4t} dx_3 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{\ell_2} e^{-(2x_2 + n \ell_2 + k \ell_3 \cos \varphi)^2/4t} dx_2 \right] \\ &= 2\sqrt{\pi t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{\ell_3 \sin \varphi} e^{-(2x_3 + k \ell_3 \sin \varphi)^2/4t} dx_3 = 4\pi t. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{tr}(H_{M_2}) = \frac{\text{vol}(M_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} + \frac{\ell_1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{2})^2 \ell_1^2/4t}.$$

Теорема А в случае многообразия M_2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы Б

Для доказательства теоремы Б нам потребуются следующие предложения и лемма З.

Для описания спектра многообразия M используем функцию следа $\text{tr}(H_M)$ многообразия M .

Предложение 3. Пусть M — компактное связное риманово многообразие без края. Тогда функция следа $\text{tr}(H_M)$ однозначно определяется спектром многообразия M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По спектральной теореме имеем

$$\text{tr}(H_M) = \int_M \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x) \varphi_n(x) dM = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \int_M \varphi_n(x) \varphi_n(x) dM = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t},$$

так как $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ — ортонормированная система в $L_2(M)$. Здесь $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная последовательность собственных функций оператора Лапласа — Бельтрами на компактном римановом многообразии M без края и $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ — соответствующая последовательность собственных значений. Предложение доказано.

Предложение 4. Пусть M — компактное связное риманово многообразие без края. Тогда функция следа $\text{tr}(H_M)$ однозначно определяет спектр многообразия M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность собственных значений оператора Лапласа — Бельтрами на M . По спектральной теореме имеем $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Таким образом, $\lambda_0 = 0$ с кратностью 1. Предположим, что $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ найдены с учетом их кратностей. Согласно предложению 3 λ_{k+1} — наибольшее значение λ такое, что

$$F(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\text{tr}(H_M) - \sum_{n=0}^k e^{-\lambda_n t}}{e^{-\lambda t}} < \infty,$$

где $F(\lambda)$ — кратность λ_{k+1} . Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что процедура последовательного нахождения λ_k в предложении 4 аналогична процедуре нахождения коэффициентов в ряде Тейлора. В данном случае мы вычисляем коэффициенты при экспонентах и в отличие от ряда Тейлора степени самих экспонент. Также можно заметить, что доказательство предложения 4 аналогично доказательству теоремы Хубера, где используется та же процедура (см. [12, гл. 9, § 2]).

Лемма 3. Пусть M — компактное плоское 3-многообразие. Тогда функция следа $\text{tr}(H_M)$ определяет с точностью до изометрии соответствующее многообразие M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея доказательства состоит в следующем. Предположим, что функция следа компактного плоского 3-многообразия $\text{tr}(H_M)$ задана. Многообразие M определяется с точностью до изометрии своим фундаментальным множеством. По изометрической классификации компактных плоских 3-многообразий (теорема 3) мы знаем, какие параметры определяют фундаментальное множество соответствующего многообразия M . Затем, используя процедуру, аналогичную примененной в предложении 4, находим все эти параметры по функции следа $\text{tr}(H_M)$. Учитывая теорему А, сразу можно заметить, что функция следа $\text{tr}(H_M)$ определяет объем соответствующего многообразия M , а именно $\text{Vol}(M) = (4\pi)^{\frac{3}{2}} \lim_{t \rightarrow +0} t^{\frac{3}{2}} \text{tr}(H_M)$.

Таким образом, по функции $\text{tr}(H_M)$ мы определяем фундаментальное множество соответствующего многообразия M и, следовательно, с точностью до изометрии многообразие M .

4.1. Многообразие M_2 . Предполагаем аналогично § 3, что фундаментальное множество многообразия M_2 натянуто на линейно независимые векторы $\ell_1/2$, ℓ_2 и ℓ_3 (см. рис. 3). Заметим, что классы изометрий M_2 параметризованы с помощью $\text{vol}(M_2)$, $|\ell_1| = \ell_1$ и двумерной решетки $\Lambda_2 = \{\ell_2, \ell_3\}$, порожденной векторами ℓ_2 и ℓ_3 (теорема 3). Найдём все эти параметры по функции следа $\text{tr}(H_{M_2})$.

(1) Используя теорему А, покажем, что $\text{tr}(H_{M_2})$ в точности определяет ℓ_1 . Пусть

$$F(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(4\pi t)^{3/2} \text{tr}(H_{M_2}) - \text{vol}(M_2)}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда

$$F(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\text{vol}(M_2)(2e^{(\lambda^2 - \ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_2^2)/4t} + \dots) + 2\pi t \ell_1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2)/4t} \right).$$

Ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$. Если $F(\lambda_{\max}) \neq 0$, то

$$\text{tr}(H_{M_2}) := \text{tr}(H_{M_2}) - 2 \frac{\text{vol}(M_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \lambda_{\max}^2/4t},$$

опять ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$. Если λ_{\max} такое, что $F(\lambda_{\max}) = 0$, тогда $\lambda_{\max} = \ell_1/2$.

(2) Покажем, что $\text{tr}(H_{M_2})$ определяет двумерную решетку $\{\ell_2, \ell_3\}$. Пусть

$$F_1(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{e^{-\lambda^2/4t}} \left((4\pi t)^{3/2} \text{tr}(H_{M_2}) - \text{vol}(M_2) \left(1 + \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-m^2 \ell_1^2/4t} \right) - 2\pi t \ell_1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2/4t} \right).$$

Следовательно,

$$F_1(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\text{vol}(M_2)(2e^{(\lambda^2 - \ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_3^2)/4t} + 4e^{(\lambda^2 - (\ell_1^2 + \ell_2^2))/4t} + 4e^{(\lambda^2 - (\ell_1^2 + \ell_3^2))/4t} + 2e^{(\lambda^2 - (\ell_2^2 + \ell_3^2 + 2\ell_2 \ell_3 \cos \varphi))/4t} + 2e^{(\lambda^2 - (\ell_2^2 + \ell_3^2 - 2\ell_2 \ell_3 \cos \varphi))/4t} + 4e^{(\lambda^2 - (\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2 + 2\ell_2 \ell_3 \cos \varphi))/4t} + \dots) \right),$$

где φ — угол между ℓ_2 и ℓ_3 , $0 < \varphi < \pi$.

Ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F_1(\lambda_{\max}) < \infty$. Зная λ_{\max} , переопределим функцию следа

$$\text{tr}(H_{M_2}) := \text{tr}(H_{M_2}) - 2 \frac{\text{vol}(M_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \lambda_{\max}^2/4t},$$

опять ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F_1(\lambda) < \infty$. Используя эту процедуру, мы определим, что $\{\lambda \mid F_1(\lambda) = 2 \text{vol}(M_2)\} = \{|\ell|, \ell \in \Lambda_2\}$, где $\Lambda_2 = \{\ell_2, \ell_3\}$.

Известно [6], что плоская решетка $\Lambda_2 = \{\ell_2, \ell_3\}$ определяется с точностью до изометрии своими кратчайшими длинами линейно независимых векторов и

площадью параллелограмма, натянутого на эти векторы. Поскольку площадь S параллелограмма, натянутого на векторы ℓ_2 и ℓ_3 , можно определить как $S = \text{vol}(M_2)/(\ell_1/2)$, то $\text{tr}(H_{M_2})$ определяет двумерную решетку $\Lambda_2 = \{\ell_2, \ell_3\}$. Лемма в случае M_2 доказана.

4.2. Многообразие M_4 . Предполагаем, что фундаментальное множество многообразия M_4 натянуто на линейно независимые векторы $\ell_1/4$, ℓ_2 и ℓ_3 (см. рис. 5). Заметим, что классы изометрий M_4 параметризованы с помощью $\text{vol}(M_4)$ и $\ell_1 = |\ell_1|$ (теорема 3). Покажем, что функция следа $\text{tr}(H_{M_4})$ определяет все эти параметры.

Используя теорему А, покажем, что $\text{tr}(H_{M_4})$ в точности определяет ℓ_1 . Пусть

$$F(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(4\pi t)^{3/2} \text{tr}(H_{M_4}) - \text{vol}(M_4)}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда

$$F(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\text{vol}(M_4)(2e^{(\lambda^2 - \ell_1^2)/4t} + 4e^{(\lambda^2 - \ell_2^2)/4t} + \dots) + 2\pi t \ell_1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m + \frac{1}{4})^2 \ell_1^2)/4t} + \pi t \ell_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (n + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2)/4t} \right).$$

Ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$.

Если $F(\lambda_{\max}) \neq 0$, то

$$\text{tr}(H_{M_4}) := \text{tr}(H_{M_4}) - 2 \frac{\text{vol}(M_4)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \lambda_{\max}^2/4t},$$

опять ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$. Если $F(\lambda_{\max}) = 0$, то определим ℓ_1 по функции $\text{tr}(H_{M_4})$, более того, заметим, что $\lambda_{\max} = \ell_1/4$.

Таким образом, функция следа $\text{tr}(H_{M_4})$ определяет фундаментальное множество M_4 и, следовательно, с точностью до изометрии многообразие M_4 . Лемма 3 в случае M_4 доказана.

4.3. Многообразие M_6 . Предполагаем, что фундаментальное множество многообразия M_6 натянуто на линейно независимые векторы $\ell_1/2$, $\ell_2/2$ и ℓ_3 (см. рис. 7). По теореме 1 в случае M_6 заметим, что ℓ_i , $i = 1, 2, 3$, попарно ортогональны, и пусть $\ell_1 = (\ell_1, 0, 0)$, $\ell_2 = (0, \ell_2, 0)$, $\ell_3 = (0, 0, \ell_3)$ в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 .

Фундаментальное множество 3-мерного плоского тора M_1 , накрывающего многообразие M_6 , натянуто на векторы ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_3 (см. рис. 7) и классы изометрий M_6 параметризованы неупорядоченными тройками $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ (теорема 3). Теперь мы найдем все эти параметры по функции следа $\text{tr}(H_{M_6})$.

Используя теорему А, покажем, что $\text{tr}(H_{M_6})$ определяет ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_3 . Пусть

$$F(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(4\pi t)^{3/2} \text{tr}(H_{M_6}) - \text{vol}(M_6)}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда

$$F(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\text{vol}(M_6)(2e^{(\lambda^2 - \ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_3^2)/4t} + \dots) + \pi t \left(\ell_1 \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2)/4t} + \ell_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (n + \frac{1}{2})^2 \ell_2^2)/4t} + \ell_3 \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (k + \frac{1}{2})^2 \ell_3^2)/4t} \right) \right).$$

Ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$.

Если $F(\lambda_{\max}) \neq 0$, то

$$\text{tr}(H_{M_6}) := \text{tr}(H_{M_6}) - 2 \frac{\text{vol}(M_6)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \lambda_{\max}^2 / 4t},$$

опять ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$.

Если $F(\lambda_{\max}) = 0$, то $\lambda_{\max} = \min\{\ell_1/2, \ell_2/2, \ell_3/2\}$. Напомним, что мы ищем ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 в любом порядке (см. теорему 3). Зная λ_{\max} , переопределим функцию следа

$$\text{tr}(H_{M_6}) := \text{tr}(H_{M_6}) - \frac{1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m + \frac{1}{2})^2 4\lambda_{\max}^2 / 4t}$$

и затем, применяя эту процедуру, определяем второе наименьшее значение из множества $\{\ell_1/2, \ell_2/2, \ell_3/2\}$ и т. д. Таким образом, мы определим неупорядоченную тройку $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$.

Итак, функция следа $\text{tr}(H_{M_6})$ определяет фундаментальное множество M_6 и тем самым с точностью до изометрии многообразие M_6 . Лемма 3 в случае M_6 доказана.

4.4. Многообразие N_2 . Предполагаем, что фундаментальное множество многообразия N_2 натянуто на линейно независимые векторы $\ell_1/2, \ell_2$ и ℓ_3 (см. рис. 9). По теореме 2 в случае N_2 заметим, что ортогональная проекция ℓ_3 на плоскость (ℓ_1, ℓ_2) равна $(\ell_1 + \ell_2)/2$. Пусть

$$\ell_1 = (\ell_1, 0, 0), \quad \ell_2 = (\ell_2 \cos \varphi, \ell_2 \sin \varphi, 0), \quad \ell_3 = \left(\frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2 \cos \varphi), \frac{1}{2}\ell_2 \sin \varphi, h \right)$$

в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 , где φ — угол между ℓ_1 и ℓ_2 , $0 < \varphi < \pi$, h — проекция вектора ℓ_3 на e_3 .

Заметим, что фундаментальное множество 3-мерного плоского тора M_1 , накрывающего многообразие N_2 , натянуто на векторы ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 (см. рис. 9) и классы изометрий N_2 параметризованы с помощью h и двумерной решетки $\{\ell_1, \ell_2\}$, порожденной векторами ℓ_1 и ℓ_2 (теорема 3).

Теперь найдем, как и в предыдущих случаях, все эти параметры по функции следа $\text{tr}(H_{N_2})$. Покажем, что $\text{tr}(H_{N_2})$ определяет $h = 2 \text{vol}(N_2)/S$, где $S = \ell_1 \ell_2 \sin \varphi$, и решетку $\{\ell_1, \ell_2\}$.

Определим $S = \ell_1 \ell_2 \sin \varphi$ — площадь параллелограмма, натянутого на векторы ℓ_1 и ℓ_2 , следовательно, $h = 2 \text{vol}(N_2)/S$. Затем определим двумерную решетку $\{\ell_1, \ell_2\}$.

1. Определим $S = \ell_1 \ell_2 \sin \varphi$ с помощью следующего предела:

$$F(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(4\pi t)^{3/2} \text{tr}(H_{N_2}) - \text{vol}(N_2)}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(\lambda) = & \lim_{t \rightarrow +0} \left(\text{vol}(N_2) (2e^{(\lambda^2 - \ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_3^2)/4t} + \dots) \right. \\ & + \frac{\sqrt{\pi t} \ell_1 \ell_2 \sin \varphi}{2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - ((\ell_1(m + \frac{1}{2}) + n\ell_2 \cos \varphi)^2 + (n\ell_2 \sin \varphi)^2))/4t} \\ & \left. + \frac{\sqrt{\pi t} \ell_1 \ell_2 \sin \varphi}{2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - ((\ell_1 m + (n + \frac{1}{2})\ell_2 \cos \varphi)^2 + ((n + \frac{1}{2})\ell_2 \sin \varphi)^2))/4t} \right). \end{aligned}$$

Ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$.

Если $F(\lambda_{\max}) \neq 0$, то

$$\mathrm{tr}(H_{N_2}) := \mathrm{tr}(H_{N_2}) - 2 \frac{\mathrm{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \lambda_{\max}^2 / 4t},$$

опять ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$.

Если $F(\lambda_{\max}) = 0$, то зафиксируем это значение как λ_0 . Определим $S = \ell_1 \ell_2 \sin \varphi$, учитывая, что

$$2 \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(4\pi t)^{3/2} \mathrm{tr}(H_{N_2})|_{\lambda=\lambda_0} - \mathrm{vol}(N_2)}{\sqrt{\pi t} e^{-\lambda_0^2 / 4t}} = S.$$

Следовательно, $h = 2 \mathrm{vol}(N_2) / S$.

2. Определим двумерную решетку $\{\ell_1, \ell_2\}$, порожденную векторами ℓ_1 и ℓ_2 . Используя теорему 2 в случае N_2 , заметим, что $\ell_3 = \mathbf{h} + \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)$, где \mathbf{h} ортогонален к ℓ_1 и ℓ_2 , $\mathbf{h} = (0, 0, h)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2 / 4t} = \sum_{m, k, n \in \mathbb{Z}} e^{-|k\ell_1 + m\ell_2 + n\ell_3|^2 / 4t} \\ &= \sum_{m, k, n \in \mathbb{Z}} e^{-|k\ell_1 + m\ell_2 + \frac{n}{2}(\ell_1 + \ell_2) + n\mathbf{h}|^2 / 4t} = \sum_{m, k, n \in \mathbb{Z}} e^{-(|k\ell_1 + m\ell_2 + \frac{n}{2}(\ell_1 + \ell_2)|^2 + n^2 h^2) / 4t}. \end{aligned}$$

Запишем S_1 как две суммы S_{11} и S_{12} , соответствующие $n = 2j$ и $n = 2j + 1$:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \sum_{m, k, n \in \mathbb{Z}} e^{-(|k\ell_1 + m\ell_2 + \frac{n}{2}(\ell_1 + \ell_2)|^2 + n^2 h^2) / 4t} \Big|_{n=2j} \\ &= \sum_{m, k, j \in \mathbb{Z}} e^{-(|k\ell_1 + m\ell_2 + \frac{2j}{2}(\ell_1 + \ell_2)|^2 + (2j)^2 h^2) / 4t} \\ &= \sum_{m, k, j \in \mathbb{Z}} e^{-((k+j)\ell_1 + (m+j)\ell_2)^2 + (2j)^2 h^2) / 4t} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-j^2 h^2 / t} \left(\sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{-|(k+j)\ell_1 + (m+j)\ell_2|^2 / 4t} \right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-j^2 h^2 / t} \left(\sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{-|k\ell_1 + m\ell_2|^2 / 4t} \right) \\ &= \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{-|k\ell_1 + m\ell_2|^2 / 4t} + 2 \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2 h^2 / t} \left(\sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{-|k\ell_1 + m\ell_2|^2 / 4t} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{12} &= \sum_{m, k, n \in \mathbb{Z}} e^{-(|k\ell_1 + m\ell_2 + \frac{n}{2}(\ell_1 + \ell_2)|^2 + n^2 h^2) / 4t} \Big|_{n=2j+1} \\ &= \sum_{m, k, j \in \mathbb{Z}} e^{-(|k\ell_1 + m\ell_2 + \frac{2j+1}{2}(\ell_1 + \ell_2)|^2 + (2j+1)^2 h^2) / 4t} \\ &= \sum_{m, k, j \in \mathbb{Z}} e^{-((k+j)\ell_1 + (m+j)\ell_2 + \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2))^2 + (2j+1)^2 h^2) / 4t} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-(2j+1)^2 h^2 / 4t} \left(\sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{-|(k+j)\ell_1 + (m+j)\ell_2 + \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)|^2 / 4t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-(2j+1)^2 h^2 / t} \left(\sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{-|k \ell_1 + m \ell_2 + \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)|^2 / 4t} \right) \\
 &= 2 \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-(2j+1)^2 h^2 / t} \left(\sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{-|k \ell_1 + m \ell_2 + \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)|^2 / 4t} \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}(H_{N_2}) &= \frac{\operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{-|k \ell_1 + m \ell_2|^2 / 4t} \\
 &\quad + \frac{2 \operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2 h^2 / t} \left(\sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{-|k \ell_1 + m \ell_2|^2 / 4t} \right) \\
 &\quad + \frac{2 \operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-(2j+1)^2 h^2 / t} \left(\sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{-|k \ell_1 + m \ell_2 + \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)|^2 / 4t} \right) \\
 &\quad + \frac{\ell_1 \ell_2 \sin \varphi}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{-((\ell_1(m + \frac{1}{2}) + n \ell_2 \cos \varphi)^2 + (n \ell_2 \sin \varphi)^2) / 4t} \\
 &\quad + \frac{\ell_1 \ell_2 \sin \varphi}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{-((\ell_1 m + (n + \frac{1}{2}) \ell_2 \cos \varphi)^2 + ((n + \frac{1}{2}) \ell_2 \sin \varphi)^2) / 4t}.
 \end{aligned}$$

Для того чтобы определить решетку $\{\ell_1, \ell_2\}$, рассмотрим предел

$$F(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(4\pi t)^{3/2} \operatorname{tr}^*(H_{N_2})}{e^{-\lambda^2 / 4t}},$$

где

$$\operatorname{tr}^*(H_{N_2}) = \operatorname{tr}(H_{N_2}) - \frac{\operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}} - \frac{2 \operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2 h^2 / t}.$$

Ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$.

Рассмотрим случай $F(\lambda_{\max}) \neq 0$. Если

$$F(\lambda_{\max}) = \frac{2 \operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-(2j+1)^2 h^2 / t},$$

то $\lambda_{\max} = \min_{m, n \in \mathbb{Z}} \{m \ell_1 + n \ell_2 + \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)\}$, в противном случае $\lambda_{\max} = \min_{m, n \in \mathbb{Z}} \{m \ell_1 + n \ell_2\}$. Зная λ_{\max} , переопределим функцию следа $\operatorname{tr}(H_{N_2})$: в первом случае

$$\operatorname{tr}^*(H_{N_2}) := \operatorname{tr}^*(H_{N_2}) - \frac{2 \operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-(2j+1)^2 h^2 / t} e^{-\lambda_{\max}^2 / 4t},$$

во втором случае

$$\operatorname{tr}^*(H_{N_2}) := \operatorname{tr}^*(H_{N_2}) - \frac{\operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}} e^{-\lambda_{\max}^2 / 4t} + \frac{2 \operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2 h^2 / t} e^{-\lambda_{\max}^2 / 4t},$$

затем определяем следующее значение λ_{\max} .

Если $F(\lambda_{\max}) = 0$, то переопределим функцию следа

$$\operatorname{tr}^*(H_{N_2}) := \operatorname{tr}^*(H_{N_2}) - \frac{\ell_1 \ell_2 \sin \varphi}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m, n, k \in \mathbb{Z}} e^{-\lambda_{\max}^2 / 4t},$$

затем определяем следующее значение λ_{\max} .

Таким образом, мы определим двумерную решетку $\{\ell_1, \ell_2\} = \{m\ell_1 + n\ell_2, m, n \in \mathbb{Z}\}$. Для завершения доказательства леммы 3 в случае N_2 заметим, что решетка $\{\ell_1, \ell_2\}$ в \mathbb{R}^2 определяется с точностью до изометрии кратчайшими длинами своих линейно независимых векторов и площадью параллелограмма, натянутого на них. Поскольку все эти параметры определяются по функции $\text{tr}(H_{N_2})$, лемма 3 в случае N_2 доказана.

4.5. Многообразие N_3 . Предполагаем, что фундаментальное множество многообразия N_3 натянуто на линейно независимые векторы $\ell_1/2$, $\ell_2/2$ и ℓ_3 (см. рис. 10). Из теоремы 2 в случае N_3 следует, что ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_3 попарно ортогональны. Пусть $\ell_1 = (\ell_1, 0, 0)$, $\ell_2 = (0, \ell_2, 0)$ и $\ell_3 = (0, 0, \ell_3)$ в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 . Заметим, что классы изометрий N_3 параметризованы с помощью $\text{vol}(N_3)$, ℓ_1 , ℓ_2 или ℓ_3 (теорема 3).

Теперь мы покажем, как и в предыдущих случаях, что все эти параметры определяются по функции следа $\text{tr}(H_{N_3})$, а именно покажем, что $\text{tr}(H_{N_3})$ определяет ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_3 .

1. Пусть

$$F(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(4\pi t)^{3/2} \text{tr}(H_{N_3}) - \text{vol}(N_3)}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(\lambda) = & \lim_{t \rightarrow +0} \left(\text{vol}(N_3)(2e^{(\lambda^2 - \ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_3^2)/4t} + \dots) \right. \\ & + \ell_1 \pi t \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1 \ell_2 \sqrt{\pi t}}{2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m^2 \ell_1^2 + (n + \frac{1}{2})^2 \ell_2^2))/4t} \\ & \left. + \frac{\ell_1 \ell_3 \sqrt{\pi t}}{2} \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - ((m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2 + k^2 \ell_3^2))/4t} \right). \end{aligned}$$

Ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$. Имеем два случая: (i) $F(\lambda_{\max}) \neq 0$ и (ii) $F(\lambda_{\max}) = 0$.

Рассмотрим случай (i). В этом случае $\lambda_{\max} = \ell_3$. Следовательно, $\ell_1 \ell_2 = 4 \text{vol}(N_3)/\ell_3$. Пусть

$$F_1(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\pi t \text{tr}(H_{N_3}) - \frac{\text{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-m^2 \ell_3^2/4t}}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) = & \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{\text{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}} (2e^{(\lambda^2 - \ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_2^2)/4t} + 4e^{(\lambda^2 - (\ell_1^2 + \ell_3^2))/4t} + \dots) \right. \\ & + \frac{\ell_1 \sqrt{\pi t}}{8} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1 \ell_2}{16} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m^2 \ell_1^2 + (n + \frac{1}{2})^2 \ell_2^2))/4t} \\ & \left. + \frac{\ell_1 \ell_3}{16} \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - ((m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2 + k^2 \ell_3^2))/4t} \right). \end{aligned}$$

Ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F_1(\lambda) < \infty$. Заметим, что $\lambda_{\max} = \min\{\ell_1/2, \ell_2/2\}$. Если $F_1(\lambda_{\max}) = \frac{\ell_1 \ell_2}{16}$, то $\lambda_{\max} = \ell_2/2$, иначе

$\lambda_{\max} = \ell_1/2$. Таким образом, в случае (i) функция следа $\text{tr}(H_{N_3})$ определяет все параметры фундаментального множества многообразия N_3 .

Рассмотрим случай (ii). В этом случае $\lambda_{\max} = \min\{\ell_1/2, \ell_2/2\}$. Пусть

$$F(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\pi t \text{tr}(H_{N_3}) - \frac{\text{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}}}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(\lambda) = & \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{\text{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}} (2e^{(\lambda^2 - \ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_3^2)/4t} + \dots) \right. \\ & + \frac{\ell_1\sqrt{\pi t}}{8} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1\ell_2}{16} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m^2 \ell_1^2 + (n + \frac{1}{2})^2 \ell_2^2))/4t} \\ & \left. + \frac{\ell_1\ell_3}{16} \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - ((m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2 + k^2 \ell_3^2))/4t} \right). \end{aligned}$$

Ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$. Зафиксируем значения λ_{\max} как λ_0 и $F(\lambda_{\max})$ как f_0 . Имеем два случая: 1) $\lambda_0 = \ell_1/2$ и $f_0 = \frac{\ell_1\ell_3}{16}$; 2) $\lambda_0 = \ell_2/2$ и $f_0 = \frac{\ell_1\ell_2}{16}$. Пусть

$$F_1(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(4\pi t)^{3/2} \text{tr}(H_{N_3}) - \text{vol}(N_3) - A}{e^{-\lambda^2/4t}},$$

где

$$A = f_0 \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{-(m^2 B^2 + (2\lambda)^2 (k + \frac{1}{2})^2)/4t}, \quad B = \frac{16f_0}{2\lambda}.$$

В случае 1 имеем

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) = & \lim_{t \rightarrow +0} \left(\text{vol}(N_3) (2e^{(\lambda^2 - \ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_3^2)/4t} + \dots) \right. \\ & \left. + \ell_1 \pi t \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1 \ell_2 \sqrt{\pi t}}{2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m^2 \ell_1^2 + (n + \frac{1}{2})^2 \ell_2^2))/4t} \right), \end{aligned}$$

в случае 2 —

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) = & \lim_{t \rightarrow +0} \left(\text{vol}(N_3) (2e^{(\lambda^2 - \ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_3^2)/4t} + \dots) \right. \\ & \left. + \ell_1 \pi t \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1 \ell_3 \sqrt{\pi t}}{2} \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - ((m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2 + k^2 \ell_3^2))/4t} \right). \end{aligned}$$

Ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F_1(\lambda) < \infty$. Если $F_1(\lambda_{\max}) \neq 0$, то

$$\text{tr}(H_{N_3}) := \text{tr}(H_{N_3}) - \frac{2 \text{vol}(N_3)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \lambda_{\max}^2/4t},$$

опять ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F_1(\lambda) < \infty$. Если $F_1(\lambda_{\max}) = 0$, то рассмотрим

$$F_2(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\pi t \text{tr}(H_{N_3}) - \frac{\text{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}}}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Следовательно, в случае 1 имеем

$$F_2(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{\text{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}} (2e^{(\lambda^2 - \ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_3^2)/4t} + \dots) \right. \\ \left. + \frac{\ell_1 \sqrt{\pi t}}{8} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1 \ell_2}{16} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m^2 \ell_1^2 + (n + \frac{1}{2})^2 \ell_2^2))/4t} \right),$$

в случае 2 —

$$F_2(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{\text{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}} (2e^{(\lambda^2 - \ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_3^2)/4t} + \dots) \right. \\ \left. + \frac{\ell_1 \sqrt{\pi t}}{8} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1 \ell_3}{16} \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - ((m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2 + k^2 \ell_3^2))/4t} \right).$$

Ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F_2(\lambda) < \infty$. Заметим, что $\lambda_{\max} = \ell_1/2$. Здесь мы воспользовались тем, что в первом случае $\ell_1 = \min\{\ell_1, \ell_2\}$, во втором $\ell_2 = \min\{\ell_1, \ell_2\}$.

Теперь опять рассмотрим

$$F(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\pi t \text{tr}(H_{N_3}) - \frac{\text{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}}}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда

$$F(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{\text{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}} (2e^{(\lambda^2 - \ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2 - \ell_3^2)/4t} + \dots) \right. \\ \left. + \frac{\ell_1 \sqrt{\pi t}}{8} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1 \ell_2}{16} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - (m^2 \ell_1^2 + (n + \frac{1}{2})^2 \ell_2^2))/4t} \right. \\ \left. + \frac{\ell_1 \ell_3}{16} \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{(\lambda^2 - ((m + \frac{1}{2})^2 \ell_1^2 + k^2 \ell_3^2))/4t} \right).$$

Ищем λ_{\max} — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$. Заметим, что $\lambda_{\max} = \min\{\ell_1/2, \ell_2/2\}$. Поскольку мы знаем значение ℓ_1 , если $\lambda_{\max} = \ell_1/2$, то $\ell_3 = \frac{16F(\lambda_{\max})}{\ell_1}$, если $\lambda_{\max} \neq \ell_1/2$, то $\lambda_{\max} = \ell_2/2$.

Таким образом, в случае (ii) функция следа $\text{tr}(H_{N_3})$ определяет все параметры фундаментального множества многообразия N_3 . Лемма 3 в случае многообразия N_3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство леммы 3 в случаях M_3, M_5, N_1 и N_4 аналогично доказательствам в случаях M_2, M_4, N_2 и N_3 соответственно.

Лемма 3 доказана.

Для завершения доказательства теоремы Б заметим, что функции следа изоспектральных компактных римановых многообразий совпадают (предложение 3) и функция следа $\text{tr}(H_M)$ определяет все параметры фундаментального множества соответствующего многообразию M , следовательно, определяет с точностью до изометрии многообразие M (лемма 3).

Теорема Б доказана.

§ 5. Доказательство теоремы В

Для доказательства теоремы В достаточно проверить совпадение функций следа $\text{tr}(H_{M_4})$ и $\text{tr}(H_{M_6})$ при некоторых значениях параметров многообразий M_4 и M_6 в силу того, что спектр многообразия M в точности определяется по функции следа $\text{tr}(H_M)$ (предложение 4).

Используя теорему А в случае M_4 и M_6 , имеем

$$\text{tr}(H_{M_4}) = \frac{\text{vol}(M_4)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} + \frac{\ell_1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{4})^2 \ell_1^2/4t} + \frac{\ell_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(n+\frac{1}{2})^2 \ell_1^2/4t}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(H_{M_6}) = & \frac{\text{vol}(M_6)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\mathbf{b} \in \Lambda_1} e^{-|\mathbf{b}|^2/4t} + \frac{b_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{2})^2 b_1^2/4t} \\ & + \frac{b_2}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(n+\frac{1}{2})^2 b_2^2/4t} + \frac{b_3}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-(k+\frac{1}{2})^2 b_3^2/4t}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\Lambda = \{\ell = m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2 + m_3 \ell_3, m_i \in \mathbb{Z}, \ell_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, 2, 3\}$ — решетка тора, 4-листно накрывающего многообразия M_4 , где попарно ортогональные векторы $\ell_1/4, \ell_2$ и ℓ_3 образуют фундаментальное множество многообразия M_4 , $\ell_1 = (\ell_1, 0, 0)$. Аналогично $\Lambda_1 = \{\mathbf{b} = m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 + m_3 \mathbf{b}_3, m_i \in \mathbb{Z}, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, 2, 3\}$ — решетка тора, 2-листно накрывающего многообразия M_2 , которое, в свою очередь, 2-листно накрывает многообразие M_6 . Векторы $\mathbf{b}_1/2, \mathbf{b}_2/2$ и \mathbf{b}_3 образуют фундаментальное множество многообразия M_6 , $\mathbf{b}_1 = (b_1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (0, b_2, 0)$ и $\mathbf{b}_3 = (0, 0, b_3)$.

Заметим, что при $b_2 = \ell_1$ суммы

$$\frac{\ell_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(n+\frac{1}{2})^2 \ell_1^2/4t} \quad \text{и} \quad \frac{b_2}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(n+\frac{1}{2})^2 b_2^2/4t} \quad (5)$$

совпадут.

Также заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{4})^2 \ell_1^2/4t} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(2m+\frac{1}{2})^2 (\ell_1/2)^2/4t} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(-2m+\frac{1}{2})^2 (\ell_1/2)^2/4t} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(2m-\frac{1}{2})^2 (\ell_1/2)^2/4t} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-((2m-1)+\frac{1}{2})^2 (\ell_1/2)^2/4t} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-(k+\frac{1}{2})^2 (\ell_1/2)^2/4t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь нетрудно получить, что при $b_1 = b_3 = \ell_1/2$ имеет место равенство

$$\frac{\ell_1/2}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-(k+\frac{1}{2})^2 (\ell_1/2)^2/4t} = \frac{b_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{2})^2 b_1^2/4t} + \frac{b_3}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-(k+\frac{1}{2})^2 b_3^2/4t}. \quad (7)$$

Остается проверить совпадение следующих сумм:

$$\frac{\text{vol}(M_4)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} \quad \text{и} \quad \frac{\text{vol}(M_6)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\mathbf{b} \in \Lambda_1} e^{-|\mathbf{b}|^2/4t}. \quad (8)$$

В силу необходимого равенства объемов многообразий M_4 и M_6 имеем $b_1 = \ell$, где $\ell = |\ell_2| = |\ell_3|$ (теорема 1 в случае M_4). Здесь мы воспользовались тем,

что $\text{vol}(M_4) = \ell_1 \ell^2 / 4$, $\text{vol}(M_6) = b_1 b_2 b_3 / 4$. Следовательно, получим $\ell_1 = 2\ell$. В силу этого соотношения решетки Λ и Λ_1 совпадают.

Однопараметрическое семейство пар изоспектральных, но негомеоморфных компактных плоских 3-многообразий, которое состоит из многообразий M_4 и M_6 , построено. Здесь фундаментальное множество многообразия M_4 образовано векторами $\ell_1/4$, ℓ_2 и ℓ_3 , где $|\ell_1/4| = \ell/2$, $|\ell_2| = |\ell_3| = \ell$, а фундаментальное множество многообразия M_6 образовано векторами $\mathbf{b}_1/2$, $\mathbf{b}_2/2$ и \mathbf{b}_3 , где $|\mathbf{b}_1/2| = \ell/2$, $|\mathbf{b}_2/2| = |\mathbf{b}_3| = \ell$.

Используя явный вид функций следа $\text{tr}(H_M)$ компактных плоских 3-многообразий M (теорема А), нетрудно понять, что других примеров не существует. Действительно, достаточно заметить, что функции следа неориентируемых многообразий содержат слагаемые с коэффициентом $\frac{1}{t}$, в отличие от функций следа ориентируемых многообразий, наибольшая степень по t которых есть $\frac{1}{\sqrt{t}}$, а необходимое равенство объемов многообразий и решеток накрывающих торов дают нам дополнительные условия.

Теорема В доказана.

§ 6. Приложение. Функции следа компактных плоских 3-многообразий

Многообразие M_1 .

Функция следа:

$$F_1 = \frac{\text{vol}(M_1)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t};$$

Λ — решетка для плоского тора $M_1 = \mathbb{R}^3/\Lambda$.

Многообразие M_2 .

Функция следа:

$$F_2 = \frac{\text{vol}(M_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} + \frac{\ell_1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{2})^2 \ell_1^2/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1 , двулистно накрывающего многообразия M_2 . Здесь векторы $\ell_1/2$, ℓ_2 и ℓ_3 образуют фундаментальное множество многообразия M_2 , $\ell_1 = (\ell_1, 0, 0)$.

Многообразие M_3 .

Функция следа:

$$F_3 = \frac{\text{vol}(M_3)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} + \frac{\ell_1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{3})^2 \ell_1^2/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1 , 3-листно накрывающего многообразия M_3 . Здесь векторы $\ell_1/3$, ℓ_2 и ℓ_3 образуют фундаментальное множество многообразия M_3 , $\ell_1 = (\ell_1, 0, 0)$.

Многообразие M_4 .

Функция следа:

$$F_4 = \frac{\text{vol}(M_4)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} + \frac{\ell_1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{4})^2 \ell_1^2/4t} + \frac{\ell_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(n+\frac{1}{2})^2 \ell_1^2/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1 , 4-листно накрывающего многообразие M_4 . Здесь векторы $\ell_1/4$, ℓ_2 и ℓ_3 образуют фундаментальное множество многообразия M_4 , $\ell_1 = (\ell_1, 0, 0)$.

Многообразие M_5 .

Функция следа:

$$F_5 = \frac{\text{vol}(M_5)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} + \frac{\ell_1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{6})^2 \ell_1^2/4t} + \frac{\ell_1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(n+\frac{1}{3})^2 \ell_1^2/4t} + \frac{\ell_1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-(k+\frac{1}{2})^2 \ell_1^2/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1 , 6-листно накрывающего многообразие M_5 . Здесь векторы $\ell_1/6$, ℓ_2 и ℓ_3 образуют фундаментальное множество многообразия M_5 , $\ell_1 = (\ell_1, 0, 0)$.

Многообразие M_6 .

Функция следа:

$$F_6 = \frac{\text{vol}(M_6)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} + \frac{\ell_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{2})^2 \ell_1^2/4t} + \frac{\ell_2}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(n+\frac{1}{2})^2 \ell_2^2/4t} + \frac{\ell_3}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-(k+\frac{1}{2})^2 \ell_3^2/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1 , 2-листно накрывающего многообразие M_2 , которое, в свою очередь, 2-листно накрывает многообразие M_6 . Здесь векторы $\ell_1/2$, $\ell_2/2$ и ℓ_3 образуют фундаментальное множество многообразия M_6 , $\ell_1 = (\ell_1, 0, 0)$, $\ell_2 = (0, \ell_2, 0)$ и $\ell_3 = (0, 0, \ell_3)$.

Многообразие N_1 .

Функция следа:

$$P_1 = \frac{\text{vol}(N_1)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} + \frac{\ell_1 \ell_2 \sin \varphi}{8\pi t} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{-[(\ell_1(m+\frac{1}{2})+\ell_2 n \cos \varphi)^2 + (n \ell_2 \sin \varphi)^2]/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1 , 2-листно накрывающего многообразие N_1 . Здесь векторы $\ell_1/2$, ℓ_2 и ℓ_3 образуют фундаментальное множество многообразия N_1 , $\ell_1 = (\ell_1, 0, 0)$, $\ell_2 = (\ell_2 \cos \varphi, \ell_2 \sin \varphi, 0)$ и $\ell_3 = (0, 0, \ell_3)$, где φ — угол между ℓ_1 и ℓ_2 , $0 < \varphi < \pi$.

Многообразие N_2 .

Функция следа:

$$P_2 = \frac{\text{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} + \frac{\ell_1 \ell_2 \sin \varphi}{16\pi t} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{-[(\ell_1(m+\frac{1}{2})+n \ell_2 \cos \varphi)^2 + (n \ell_2 \sin \varphi)^2]/4t} + \frac{\ell_1 \ell_2 \sin \varphi}{16\pi t} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{-[\ell_1 m + (n+\frac{1}{2}) \ell_2 \cos \varphi]^2 + ((n+\frac{1}{2}) \ell_2 \sin \varphi)^2/4t}$$

где Λ — решетка для плоского тора M_1 , 2-листно накрывающего многообразие N_2 . Здесь векторы $\ell_1/2$, ℓ_2 и ℓ_3 образуют фундаментальное множество многообразия N_2 , $\ell_1 = (\ell_1, 0, 0)$, $\ell_2 = (\ell_2 \cos \varphi, \ell_2 \sin \varphi, 0)$, $\ell_3 = (\frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2 \cos \varphi), \frac{1}{2} \ell_2 \sin \varphi, h)$, где φ — угол между ℓ_1 и ℓ_2 , $0 < \varphi < \pi$, h — проекция вектора ℓ_3 на e_3 .

Многообразие N_3 .

Функция следа:

$$P_3 = \frac{\text{vol}(N_3)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} + \frac{\ell_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-[(m+\frac{1}{2})^2 \ell_1^2]/4t} \\ + \frac{\ell_1 \ell_2}{16\pi t} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{-[\ell_1^2 m^2 + \ell_2^2 (n+\frac{1}{2})^2]/4t} + \frac{\ell_1 \ell_3}{16\pi t} \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{-[\ell_1^2 (m+\frac{1}{2})^2 + \ell_3^2 k^2]/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1 , 2-листно накрывающего многообразия M_2 , которое, в свою очередь, 2-листно накрывает многообразие N_3 . Здесь векторы $\ell_1/2$, $\ell_2/2$ и ℓ_3 образуют фундаментальное множество многообразия N_3 , $\ell_1 = (\ell_1, 0, 0)$, $\ell_2 = (0, \ell_2, 0)$ и $\ell_3 = (0, 0, \ell_3)$.

Многообразие N_4 .

Функция следа:

$$P_4 = \frac{\text{vol}(N_4)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\ell \in \Lambda} e^{-|\ell|^2/4t} + \frac{\ell_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-[(m+\frac{1}{2})^2 \ell_1^2]/4t} \\ + \frac{\ell_1 \ell_2}{16\pi t} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{-[\ell_1^2 m^2 + \ell_2^2 (n+\frac{1}{2})^2]/4t} + \frac{\ell_1 \ell_3}{16\pi t} \sum_{m, k \in \mathbb{Z}} e^{-[\ell_1^2 (m+\frac{1}{2})^2 + \ell_3^2 (k+\frac{1}{2})^2]/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1 , 2-листно накрывающего многообразия M_2 , которое, в свою очередь, 2-листно накрывает многообразие N_4 . Здесь векторы $\ell_1/2$, $\ell_2/2$ и $\ell_3/2$ образуют фундаментальное множество многообразия N_4 , $\ell_1 = (\ell_1, 0, 0)$, $\ell_2 = (0, \ell_2, 0)$ и $\ell_3 = (0, 0, \ell_3)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кас М. Can one hear the shape of a drum? // Amer. Math. Monthly. 1966. V. 73. P. 1–23.
2. Conway J. H. The sensual (quadratic) form. Washington DC: The Mathematical Association of America, 1997. (The Carus Mathematical Monographs; 26).
3. Milnor J. Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1964. V. 51. P. 542.
4. McKean H. P. Selberg's trace formula as applied to a compact Riemann surface // Comm. Pure Appl. Math. 1972. V. 25. P. 225–246.
5. Sunada T. Riemannian coverings and isospectral manifolds // Ann. of Math. (2). 1985. V. 121. P. 169–186.
6. Brooks R. Constructing isospectral manifolds // Amer. Math. Monthly. 1988. V. 95. P. 823–839.
7. Berger M., Gauduchon P., Mazet E. Le Spectre d'une Variété Riemannienne. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Springer Lecture Notes; 194).
8. Schiemann A. Ein Beispiel positiv definiten quadratischer Formen der Dimension 4 mit gleichen Darstellungszahlen // Arch. Math. 1990. V. 54. P. 372–375.
9. Conway J. H., Sloane N. J. A. Four-dimensional lattices with the same theta series // International Mathematics Research Notices. 1992. V. 4. P. 93–96.
10. Schiemann A. Ternary positive definite quadratic forms are determined by their theta series // Math. Ann. 1997. V. 308. P. 507–517.
11. Исангулов Р. Р. Изоспектральные плоские бутылки Клейна // Мат. заметки ЯГУ. 2000. Т. 7, № 2. С. 39–48.
12. Buser P. Geometry and spectra of compact Riemann surfaces. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1992. (Progress in Mathematics; 106).
13. Wolf J. Spaces of constant curvature. New York; St. Louis; San Francisco; Toronto; London; Sidney: McGraw-Hill, 1967.
14. Conway J. H., Rossetti J. P. Describing the platycosms. (Preprint / arXiv:math.DG/0311476 v1 26 Nov 2003).

-
15. Rossetti J. P., Conway J. H. Hearing the platycosms. (Preprint / arXiv:math.DG/0311470 v1 26 Nov 2003).
 16. Luft E., Sjerve D. 3-Manifolds with subgroup $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ in their fundamental group // Pacific J. Math. 1984. V. 114, N 1. P. 191–205.

Статья поступила 25 декабря 2003 г.

*Исангулов Руслан Рамильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
isan@math.nsc.ru*