Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 519.21

АСИМПТОТИКА СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

Д. К. Ким, В. И. Лотов

Аннотация: Получены теоремы об асимптотике стационарного распределения осциллирующего случайного блуждания с двумя уровнями переключений при условии, что расстояние между уровнями неограниченно увеличивается.

Ключевые слова: осциллирующее случайное блуждание, стационарное распределение, асимптотические разложения.

1. Введение

Пусть $\{\xi_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 0, 1, 2,$ — три независимые последовательности независимых случайных величин, одинаково распределенных внутри каждой последовательности; при этом предполагается, что $\mathbf{E}\xi_n^{(1)} < 0$, $\mathbf{E}\xi_n^{(2)} > 0$. Пусть a и b — произвольные числа, $a \le 0 \le b$, и X_0 — случайная величина, независимая от $\{\xi_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 0, 1, 2$. Определим цепь Маркова следующим образом: для $n \ge 1$ положим

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} + \xi_n^{(0)}, & \text{если } X_{n-1} \in [a, b], \\ X_{n-1} + \xi_n^{(1)}, & \text{если } X_{n-1} > b, \\ X_{n-1} + \xi_n^{(2)}, & \text{если } X_{n-1} < a. \end{cases}$$

Случайные блуждания, вероятностные характеристики которых меняются при достижении некоторых множеств, обычно называют *осциллирующими*. В ряде работ (ссылки можно найти в [1]) изучались осциллирующие блуждания с переключением в нуле. В частности, с помощью факторизационных методов для таких блужданий в статье А. А. Боровкова [2] найдены преобразования Лапласа — Стилтьеса стационарного распределения. Можно рассматривать более общую схему, когда переключения между двумя последовательностями скачков происходят поочередно после достижения полуосей (b, ∞), $(-\infty, a)$. Простейшие случайные блуждания такого типа впервые рассматривались в работе Ю. В. Прохорова [3]. Некоторые модификации этой модели при различных предположениях на распределения скачков изучались Д. В. Гусаком (см. ссылки в [1]). Позже в [1] для этой же схемы блуждания, но в более широких предположениях относительно исходных распределений были найдены преобразования Лапласа — Стилтьеса распределений цепи в стационарном и достационарном режимах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–00358, 03–01–06312), Минобразования России (грант А03–2.8–357) и фонда Президента РФ (грант НШ–2139.2003.1).

В настоящей работе мы также имеем два уровня переключений, однако переключение здесь производится между тремя последовательностями скачков в зависимости от того, в какой из трех зон находится блуждающая частица. Эта же модель изучалась в предыдущей публикации авторов [4], где были найдены факторизационные представления для двойных производящих функций

$$W_1(z,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_b^{\infty} e^{\lambda x}\mathbf{P}(X_n \in dx),$$

$$W_2(z,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{-\infty}^{a} e^{\lambda x}\mathbf{P}(X_n \in dx),$$

$$W_0(z,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_a^{b} e^{\lambda x}\mathbf{P}(X_n \in dx)$$

и для функций

$$W_1(\lambda) = \int_b^{\infty} e^{\lambda x} dF(x), \quad W_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{a} e^{\lambda x} dF(x), \quad W_0(\lambda) = \int_a^{b} e^{\lambda x} dF(x),$$

где $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n < x)$ — функция распределения, соответствующая стационарному режиму. В данной работе продолжается изучение свойств введенного осциллирующего случайного блуждания. Ясно, что полученные в [4] выражения для преобразований Лапласа — Стилтьеса в общем случае не допускают простых процедур обращения, однако они могут быть основой для асимптотического анализа распределений в той или иной предельной схеме. Мы будем рассматривать ситуацию, когда расстояние между регулирующими границами неограниченно увеличивается, т. е. $b-a \to \infty$. В этих условиях найдена асимптотика стационарного распределения $F(x)$ вместе с оценкой по вариации убывания остатка. Всюду в работе предполагается выполненным следующее условие.

(A_1) Функции распределения случайных величин $\{\xi_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 0,1,2$, имеют ненулевые абсолютно непрерывные компоненты.

Отдельно исследованы случаи $\mathbf{E}\xi_1^{(0)} = 0$ и $\mathbf{E}\xi_1^{(0)} \neq 0$.

2. Предварительные сведения и формулировки результатов

Для формулировки результатов нам понадобится ряд обозначений. Положим для $i = 0,1,2$

$$S_0^{(i)} = 0, \quad S_n^{(i)} = \xi_1^{(i)} + \dots + \xi_n^{(i)},$$

$$\eta_+^{(i)} = \inf\{n \geq 1 : S_n^{(i)} \geq 0\}, \quad \eta_-^{(i)} = \inf\{n \geq 1 : S_n^{(i)} < 0\}, \quad \chi_\pm^{(i)} = S^{(i)}_{\eta_\pm^{(i)}}$$

(везде полагаем $\inf\varnothing = \infty$). На множествах $\{\eta_\pm^{(i)} = \infty\}$ случайные величины $\chi_\pm^{(i)}$, $i = 0,1,2$, можно считать неопределенными.

Пусть

$$\overline{S}^{(1)} = \sup_{n\geq 0} S_n^{(1)}, \quad \underline{S}^{(2)} = \inf_{n\geq 0} S_n^{(2)},$$

$$p_1 = \big(1 - \mathbf{P}\big(\eta_+^{(1)} < \infty\big)\big)^{-1}, \quad p_2 = \big(1 - \mathbf{P}\big(\eta_-^{(2)} < \infty\big)\big)^{-1}.$$

Мы будем также использовать обозначения

$$\overline{S}^{(0)} = \sup_{n\ge 0} S_n^{(0)}, \quad \underline{S}^{(0)} = \inf_{n\ge 0} S_n^{(0)},$$

$$k_0 = \big(1 - \mathbf{P}\big(\eta_+^{(0)} < \infty\big)\big)^{-1}, \quad p_0 = \big(1 - \mathbf{P}\big(\eta_-^{(0)} < \infty\big)\big)^{-1}$$

в тех случаях, когда эти величины конечны. Если $\mathbf{E}\big|\chi_\pm^{(i)}\big| < \infty$, то через $\gamma_\pm^{(i)}$ будем обозначать случайные величины с плотностями $\big(\mathbf{E}\chi_+^{(i)}\big)^{-1}\mathbf{P}\big(\chi_+^{(i)} > x\big)$ и $\big(\mathbf{E}|\chi_-^{(i)}|\big)^{-1}\mathbf{P}\big(\chi_-^{(i)} < -x\big)$ для $x \ge 0$ ($\pm\gamma_\pm^{(i)}$ принято называть *величинами перескока* последовательностями $S_n^{(i)}$ *через бесконечно удаленные барьеры*).

Для собственных случайных величин $\chi_\pm^{(i)}$ положим

$$\alpha_\pm^{(i)} = \mathbf{E}\chi_\pm^{(i)}, \quad \beta_\pm^{(i)} = \mathbf{E}\big(\chi_\pm^{(i)}\big)^2,$$

$$A = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_-^{(1)}\beta_-^{(0)} - \alpha_-^{(0)}\beta_-^{(1)}}{\beta_-^{(0)}}, \quad B = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_+^{(0)}\beta_+^{(2)} - \alpha_+^{(2)}\beta_+^{(0)}}{\beta_+^{(0)}},$$

$$M = \alpha_+^{(0)}\alpha_-^{(0)}\left(\frac{p_1}{\alpha_-^{(1)}} - \frac{p_2}{\alpha_+^{(2)}}\right), \quad L = M - \frac{\alpha_-^{(0)}}{\alpha_-^{(1)}}A - \frac{\alpha_+^{(0)}}{\alpha_+^{(2)}}B.$$

Всюду в работе, где участвует переменная λ (если не оговорено противное), будем считать, что $\operatorname{Re}\lambda = 0$.

Пусть

$$f_i(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi_1^{(i)}}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Мы будем использовать компоненты $r_i^+(\lambda)$, $r_i^-(\lambda)$ факторизационных представлений (см., например, [5])

$$1 - f_i(\lambda) = r_i^+(\lambda)\; r_i^-(\lambda), \tag{1}$$

где

$$r_i^\pm(\lambda) = 1 - \mathbf{E}\big(e^{\lambda\chi_\pm^{(i)}}; \eta_\pm^{(i)} < \infty\big), \quad i = 0, 1, 2.$$

Из [6] вытекают следующие факты: если $\mathbf{E}\xi_1^{(0)} = 0$, $\mathbf{E}\big|\xi_1^{(i)}\big|^2 < \infty$, $i = 1, 2$, $\mathbf{E}\big|\xi_1^{(0)}\big|^3 < \infty$, то следующие функции являются преобразованиями Лапласа — Стилтьеса (ПЛС) функций ограниченной вариации и представимы в виде

$$\left(\frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}} - \frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)}\right)\lambda^{-1} = \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda x} u_1(x)\,dx,$$

$$\left(\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)} - \frac{\alpha_+^{(2)}}{\alpha_+^{(0)}}\right)\lambda^{-1} = \int_{0}^{\infty} e^{\lambda x} u_2(x)\,dx$$

для некоторых функций $u_1(x)$, $u_2(x)$. Нетрудно видеть, что

$$\int_{-\infty}^{0} u_1(x)\,dx = A, \quad \int_{0}^{\infty} u_2(x)\,dx = B.$$

В некоторых ситуациях нам понадобится следующее условие крамеровского типа.

(A_2). $\mathbf{E}e^{\lambda\xi_1^{(j)}} < \infty, j = 0, 1, 2$, для любого $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$, где $\lambda_- < 0 < \lambda_+$.

В дальнейшем через X будем обозначать случайную величину, имеющую функцию распределения $F(x)$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие* (A_1), $\mathbf{E}\xi_1^{(0)} = 0$ *и для некоторого целого* $k \geq 2$

$$\mathbf{E}\big|\xi_1^{(0)}\big|^{k+1} < \infty, \quad \mathbf{E}\big|\xi_1^{(i)}\big|^{k} < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Тогда для любого $x \geq 0$ *при* $b - a \to \infty$

$$\mathbf{P}(X > b + x) = \frac{1}{b - a + L} \frac{\mathbf{E}\big(\xi_1^{(0)}\big)^2}{2\big|\mathbf{E}\xi_1^{(1)}\big|} \mathbf{P}\big(\overline{S}^{(1)} + \gamma_+^{(0)} > x\big) + o\bigg(\frac{1}{(b-a)^k}\bigg), \tag{2}$$

$$\mathbf{P}(X < a - x) = \frac{1}{b - a + L} \frac{\mathbf{E}\big(\xi_1^{(0)}\big)^2}{2\mathbf{E}\xi_1^{(2)}} \mathbf{P}\big(\underline{S}^{(2)} + \gamma_-^{(0)} < -x\big) + o\bigg(\frac{1}{(b-a)^k}\bigg) \tag{3}$$

и равномерно по всем борелевским множествам $\mathscr{B} \subseteq [a, b]$

$$\mathbf{P}(X \in \mathscr{B}) = \frac{1}{b - a + L} \int\limits_{\mathscr{B}} \bigg(1 - \frac{\alpha_-^{(0)}}{\alpha_-^{(1)}} u_1(t - b) - \frac{\alpha_+^{(0)}}{\alpha_+^{(2)}} u_2(t - a)\bigg)\, dt + o\bigg(\frac{1}{(b-a)^{k-1}}\bigg).$$

Если выполнено условие (A_2), *то остаточные члены во всех этих соотношениях можно заменить на* $O(e^{\varepsilon(a-b)})$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *при* $k = 2$. *Тогда для любого* $r \in (0, 1)$

$$\mathbf{P}(X \in [a, a + r(b - a)]) = r - \frac{rL + B\alpha_+^{(0)}/\alpha_+^{(2)}}{b - a + L} + o\bigg(\frac{1}{b - a}\bigg),$$

$$\mathbf{P}(X \in [b - r(b - a), b]) = r - \frac{rL + A\alpha_-^{(0)}/\alpha_-^{(1)}}{b - a + L} + o\bigg(\frac{1}{b - a}\bigg).$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (A_1) *и для некоторого целого* $k \geq 1$

$$\mathbf{E}\big|\xi_1^{(i)}\big|^k < \infty,\ i = 0, 1, 2, \quad \mathbf{E}\xi_1^{(0)} < 0.$$

Тогда для любого $x \geq 0$ *при* $b - a \to \infty$

$$\mathbf{P}(X > b + x) = o((b - a)^{1-k}),$$

$$\mathbf{P}(X < a - x) = \frac{\mathbf{E}\xi_1^{(0)}}{\mathbf{E}\xi_1^{(0)} - \mathbf{E}\xi_1^{(2)}} \mathbf{P}\big(\underline{S}^{(2)} + \gamma_-^{(0)} < -x\big) + o((b - a)^{1-k}) \tag{4}$$

и равномерно по всем борелевским множествам $\mathscr{B} \subseteq [a, b]$

$$\mathbf{P}(X \in \mathscr{B}) = \frac{\mathbf{E}\xi_1^{(2)}}{\mathbf{E}\xi_1^{(2)} - \mathbf{E}\xi_1^{(0)}} \mathbf{P}\big(\overline{S}^{(0)} + \gamma_+^{(2)} \in \mathscr{B}\big) + o((b - a)^{1-k}). \tag{5}$$

Если к тому же выполнено условие (A_2) *и существует* $\beta \in (0, \lambda_+)$ *такое, что* $f_0(\beta) = 1$, *то предыдущие соотношения допускают следующее уточнение: для некоторого* $\varepsilon > 0$ *при* $b - a \to \infty$

$$\mathbf{P}(X > b + x) = \frac{p_1 k_0}{\beta} R_1 \mathbf{P}\big(\overline{S}^{(1)} + \tilde{\gamma}_+^{(0)} > x\big) + O(e^{(\beta+\varepsilon)(a-b)}),$$

$$\mathbf{P}(X < a - x) = \frac{\mathbf{E}\xi_1^{(0)}}{\mathbf{E}\xi_1^{(0)} - \mathbf{E}\xi_1^{(2)}} R_2 \mathbf{P}\big(\underline{S}^{(2)} + \gamma_-^{(0)} < -x\big) + O(e^{(\beta+\varepsilon)(a-b)})$$

и равномерно по всем борелевским $\mathscr{B} \subseteq [a,b]$

$$\mathbf{P}(X \in \mathscr{B}) = \frac{\mathbf{E}\xi_1^{(2)}}{\mathbf{E}\xi_1^{(2)} - \mathbf{E}\xi_1^{(0)}} R_2 \mathbf{P}\big(\overline{S}^{(0)} + \gamma_+^{(2)} \in \mathscr{B}\big) + R_1 \int\limits_{\mathscr{B}} u_3(y-b)\,dy + O(e^{(\beta+\varepsilon)(a-b)}),$$

где

$$R_2 = \left(1 + \frac{1}{k_0\alpha_+^{(2)} - p_2\alpha_-^{(0)}} \frac{e^{\beta(a-b)}}{\beta^2} \frac{r_2^+(\beta)}{(r_0^+(\beta))'} \frac{r_0^-(\beta)}{r_1^-(\beta)} \left(\frac{p_1}{k_0} - \frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}}\right)\right)^{-1},$$

$$R_1 = R_2\big(k_0\alpha_+^{(2)} - p_2\alpha_-^{(0)}\big) \frac{e^{\beta(a-b)}}{\beta} \frac{r_2^+(\beta)}{(r_0^+(\beta))'} \frac{r_0^-(\beta)}{r_1^-(\beta)}.$$

Случайная величина $\tilde{\gamma}_+^{(0)}$ *не зависит от исходных последовательностей, ее распределение задается с помощью* ПЛС

$$\mathbf{E}e^{\lambda\tilde{\gamma}_+^{(0)}} = -\frac{\beta}{k_0} \frac{r_0^+(\lambda)}{\lambda - \beta},$$

функция u_3 *задается соотношением*

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\lambda y} u_3(y)\,dy = \left(\frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)} - \frac{r_1^-(\beta)}{r_0^-(\beta)}\right)(\lambda - \beta)^{-1}.$$

Замечание 1. Асимптотическое поведение при $x \to \infty$ функций вида $\mathbf{P}\big(\overline{S}^{(1)} + \gamma_+^{(0)} > x\big)$ и $\mathbf{P}\big(\underline{S}^{(2)} + \gamma_-^{(0)} < -x\big)$ изучалось в работах [7, 8] для широкого класса случаев. Например, если выполнено условие (A_2) и существует $q \in (0, \lambda_+)$ такое, что $f_1(q) = 1$, $\mathbf{E}\exp\{q\gamma_+^{(0)}\} < \infty$, то $\mathbf{P}\big(\overline{S}^{(1)} + \gamma_+^{(0)} > x\big) = ce^{-qx}(1 + o(1))$ для некоторой известной константы c.

Замечание 2. Как следует из доказательств сформулированных теорем, указанный в них порядок убывания остаточных членов относится к полной вариации этих остатков.

3. Доказательства теорем

В дальнейшем нам потребуется несколько вспомогательных утверждений. Заметим, что в условиях нашей задачи имеют место тождества (см., например, [5])

$$\frac{1}{r_1^+(\lambda)} = p_1\mathbf{E}e^{\lambda\overline{S}^{(1)}}, \quad \frac{1}{r_2^-(\lambda)} = p_2\mathbf{E}e^{\lambda\underline{S}^{(2)}}; \tag{6}$$

если $\mathbf{E}\xi_1^{(0)} < 0$, то

$$\frac{1}{r_0^+(\lambda)} = k_0\mathbf{E}e^{\lambda\overline{S}^{(0)}}, \tag{7}$$

если $\mathbf{E}\xi_1^{(0)} > 0$, то

$$\frac{1}{r_0^-(\lambda)} = p_0\mathbf{E}e^{\lambda\underline{S}^{(0)}}.$$

Пусть $Q(\lambda)$ — ПЛС функции ограниченной вариации $U(x)$:

$$Q(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\, dU(x).$$

Введем обозначения

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\, dU(x)\right]^D = \int\limits_D e^{\lambda x}\, dU(x), \quad \operatorname*{Var}_D U = \int\limits_D |dU(x)|$$

для любого борелевского множества $D \subseteq R$, и на множестве функций, представимых при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ в виде ПЛС функции ограниченной вариации, определим норму

$$\|Q\| = \|Q(\lambda)\| = \operatorname{Var} U = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |dU(x)|.$$

Лемма 3.1. *Пусть $F_1(x)$, $F_2(x)$ — функции ограниченной вариации. Если $F(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_2(y-t)dF_1(t)$ и всё изменение $F_1(x)$ сосредоточено на полуоси (b,∞), а $F_2(x)$ — на $(-\infty, 0)$, то*

$$\operatorname*{Var}_{(-\infty,a)} F(y) \le \operatorname*{Var}_{(-\infty,a-b)} F_2(y) \operatorname{Var} F_1(y).$$

Если всё изменение $F_1(x)$ сосредоточено на полуоси $(-\infty, a)$, а $F_2(x)$ — на $(0,\infty)$, то

$$\operatorname*{Var}_{(b,\infty)} F(y) \le \operatorname*{Var}_{(b-a,\infty)} F_2(y) \operatorname{Var} F_1(y).$$

Доказательство леммы очевидно.

Лемма 3.2. *Пусть для некоторого целого $k \ge 1$ функции*

$$\varphi(\lambda) = \int e^{\lambda x}\, d\psi(x), \quad \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\varphi(\lambda) = \int e^{\lambda x}\, d\tau(x)$$

являются при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ ПЛС функций ограниченной вариации. Тогда для любого целого $i \le k$

1) *функция $\frac{\partial^i}{\partial\lambda^i}\varphi(\lambda)$ является ПЛС функции ограниченной вариации, и*

$$\frac{\partial^i}{\partial\lambda^i}\varphi(\lambda) = \int e^{\lambda x} x^i\, d\psi(x);$$

2) *для любого борелевского $D \subseteq R$*

$$\frac{\partial^i}{\partial\lambda^i}[\varphi(\lambda)]^D = \left[\frac{\partial^i}{\partial\lambda^i}\varphi(\lambda)\right]^D;$$

3) *функция $\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(0)}{\lambda}$ является ПЛС функции ограниченной вариации, и*

$$\left\|\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(0)}{\lambda}\right\| \le \left\|\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(\lambda)\right\|.$$

Доказательства третьего и первого утверждений для $k = 1$ можно найти в [6], для остальных значений k они проводятся по индукции. Справедливость второго утверждения очевидна.

Лемма 3.3. *Пусть функция $Q(\lambda)$ является* ПЛС *функции ограниченной вариации при* $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$. *Если она аналитична при* $\mathrm{Re}\,\lambda > -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, *и непрерывна на границе этой области, то для любого* $a < 0$

$$\|[Q(\lambda)]^{(-\infty,a)}\| \leq ce^{\varepsilon a},$$

где c — некоторая константа. Если $Q(\lambda)$ аналитична при $\mathrm{Re}\,\lambda < \varepsilon$ *и непрерывна на границе, то для любого* $b > 0$

$$\|[Q(\lambda)]^{(b,\infty)}\| \leq \tilde{c}e^{-\varepsilon b},$$

где $\tilde{c}$ — некоторая константа.

Доказательство можно найти в [9].

Лемма 3.4. *Если* $\mathbf{E}\big|\xi_1^{(i)}\big|^k < \infty$ *для некоторого целого* $k \geq 2$ *и для* $i = 0, 1, 2$, *то* $\mathbf{E}|X|^{k-1} < \infty$.

Доказательство. Пусть Y_n — возвратная по Харрису (см. [7]) цепь Маркова в $\mathbb{R}$ с единственной стационарной мерой $\pi(dx)$; $t(x)$ — некоторая неотрицательная измеримая функция и $\mathbf{P}(x, A) = \mathbf{P}(Y_1 \in A | Y_0 = x)$. Мы воспользуемся следующим результатом.

Теорема 3.1 [10]. *Для того чтобы* $\int\limits_{\mathbb{R}} t(x)\pi(dx) < \infty$, *достаточно существования множества A такого, что* $\pi(A) > 0$, $\int\limits_{A} t(x)\pi(dx) < \infty$ *и некоторой измеримой функции* $g(y) \geq t(y)$, $y \in A^c$, *такой, что*

$$\int\limits_{A^c} g(y)\mathbf{P}(x, dy) \leq g(x) - t(x), \quad x \in A^c, \tag{8}$$

и

$$\sup_{x\in A} \int\limits_{A^c} g(y)\mathbf{P}(x, dy) < \infty.$$

Возвратность по Харрису и существование единственной стационарной меры $\mathbf{P}(X \in dx)$ для нашей цепи X_n были показаны в [4]. Положим $g(x) = |x|^k$ и выберем число $N_1 \geq 0$ такое, что

$$\mathbf{P}\big(\xi_1^{(1)} > -N_1\big) < 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_{-N_1}^{\infty} t\mathbf{P}\big(\xi_1^{(1)} \in dt\big) < 0$$

(требуемое число существует в силу условия $\mathbf{E}\xi_1^{(1)} < 0$). Введем еще одно число $N_2 \geq \max\{N_1, \max\{-a, b\} + 1\}$ такое, что

$$\mathbf{P}\big(\xi_1^{(1)} > -N_1\big) + \mathbf{P}\big(\xi_1^{(1)} \leq -2N_2\big) < 1,$$

$$\nu = \int\limits_{-N_1}^{\infty} t\mathbf{P}\big(\xi_1^{(1)} \in dt\big) + \int\limits_{-\infty}^{-2N_2} |t|\mathbf{P}\big(\xi_1^{(1)} \in dt\big) < 0,$$

и положим для некоторого числа $N \geq N_2$, значение которого будет уточнено ниже, $A = [-N, N]$, $t(x) = -\frac{k\nu}{2}x^{k-1}$ при $x > 0$. Таким образом, при $x \geq N$ для некоторых α_i, $i = 0, \dots, k$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{A^c} g(y)\mathbf{P}(x, dy) = \int\limits_{N}^{\infty} y^k\mathbf{P}\big(\xi_1^{(1)} \in dy - x\big) + \int\limits_{-\infty}^{-N} |y|^k\mathbf{P}\big(\xi_1^{(1)} \in dy - x\big)$$
$$\leq \alpha_k x^k + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

где
$$\alpha_k = \mathbf{P}\big(\xi_1^{(1)} \ge N - x\big) + \mathbf{P}\big(\xi_1^{(1)} \le -N - x\big),$$
$$\alpha_{k-1} = k \left(\int\limits_{N-x}^{\infty} t\mathbf{P}\big(\xi_1^{(1)} \in dt\big) + \int\limits_{-\infty}^{-N-x} |t|\mathbf{P}\big(\xi_1^{(1)} \in dt\big) \right)$$
и α_i, $i = 0, \dots, k-2$, ограничены сверху для рассматриваемых значений x и N.

Очевидно, что $\alpha_k < 1$ при $x \in [N, N + N_1)$ и $\alpha_k \le 1$, $\alpha_{k-1} \le k\nu$ при $x \ge N + N_1$. В обоих случаях можно выбрать достаточно большое N, чтобы при $x \ge N$ выполнялось условие (8). Повторив аналогичную процедуру для $x \le -N$, можно доопределить $t(x)$ при $x \le 0$ и подобрать число N так, чтобы для любого $x \in A^c$ выполнялось условие (8). Справедливость остальных требований теоремы очевидна. Лемма доказана.

При выполнении условий леммы 3.4 существуют производные $\frac{\partial^{k-1}}{\partial\lambda^{k-1}} W_1(\lambda)$, $\frac{\partial^{k-1}}{\partial\lambda^{k-1}} W_2(\lambda)$, чем мы будем пользоваться в дальнейшем (функции W_i определены во введении).

Факторизационные компоненты $r_1^-(\lambda)$, $r_2^+(\lambda)$ равны нулю при $\lambda = 0$; это дает возможность ввести в рассмотрение функции
$$\omega_1^-(\lambda) = \frac{r_1^-(\lambda)}{\lambda}(\lambda + c), \quad \omega_2^+(\lambda) = \frac{r_2^+(\lambda)}{\lambda}(\lambda - c)$$
при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ и произвольном $c > 0$. В том случае, когда $\lambda = 0$ является нулем для $r_0^-(\lambda)$ или $r_0^+(\lambda)$ (напомним, что это верно для обеих функций при $\mathbf{E}\xi_1^{(0)} = 0$ и только для одной из них при $\mathbf{E}\xi_1^{(0)} \ne 0$), введем дополнительно при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ и произвольном $c > 0$ функции
$$\omega_0^-(\lambda) = \frac{r_0^-(\lambda)}{\lambda}(\lambda + c), \quad \omega_0^+(\lambda) = \frac{r_0^+(\lambda)}{\lambda}(\lambda - c).$$
Из [9] известно, что функции $\big(\omega_i^+(\lambda)\big)^{\pm 1}$, $i = 0, 2$, представимы в виде ПЛС функций ограниченной вариации (для этого достаточно выполнения условия $\mathbf{E}\big|\xi_1^{(0)}\big|^2 < \infty$, если $\mathbf{E}\xi_1^{(0)} = 0$, и $\mathbf{E}|\xi_1^{(0)}| < \infty$, если $\mathbf{E}\xi_1^{(0)} \ne 0$), всё изменение которых сосредоточено на неотрицательной полуоси. Если, кроме того, выполнено условие (A_2), то существует $\varepsilon > 0$ такое, что эти функции аналитичны в области $\operatorname{Re}\lambda < \varepsilon$ и непрерывны на границе. Аналогичными свойствами обладают функции $\big(\omega_i^-(\lambda)\big)^{\pm 1}$, $i = 0, 1$, с той лишь разницей, что они являются ПЛС функций ограниченной вариации с изменением на неположительной полуоси и при выполнении условия (A_2) аналитичны в области $\operatorname{Re}\lambda > -\varepsilon$. Каждый раз, когда мы говорим о функциях $\big(\omega_0^{\pm}(\lambda)\big)^{\pm 1}$, негласно предполагаем их существование.

Лемма 3.5. *Пусть $\mathbf{E}\big|\xi_1^{(i)}\big|^k < \infty$ для некоторого целого $k \ge 2$, $i = 0, 1, 2$. Тогда производные порядка $k-1$ по λ функций $\big(\omega_1^-(\lambda)\big)^{\pm 1}$, $\big(\omega_2^+(\lambda)\big)^{\pm 1}$, $r_i^{\pm}(\lambda)$, $i = 0, 1, 2$, являются* ПЛС *функций ограниченной вариации. Если дополнительно $\mathbf{E}\big|\xi_1^{(0)}\big|^{k+1} < \infty$, $\mathbf{E}\xi_1^{(0)} = 0$, то $(k-1)$-е производные по λ функций $\big(\omega_0^{\pm}(\lambda)\big)^{\pm 1}$, $\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}$, $\frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)}\frac{\lambda-c}{\lambda+c}$ являются* ПЛС *функций ограниченной вариации.*

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [9]), что
$$\mathbf{E}\big(\big|\chi_{\pm}^{(i)}\big|^{k-1}; \eta_{\pm}^{(i)} < \infty\big) < \infty, \quad i = 0, 1, 2,$$

в условиях леммы. Таким образом, равенство

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial\lambda^{k-1}} r_i^{\pm}(\lambda) = -\mathbf{E}\big(\big(\chi_{\pm}^{(i)}\big)^{k-1} e^{\lambda\chi_{\pm}^{(i)}}; \eta_{\pm}^{(i)} < \infty\big)$$

немедленно влечет представимость этого выражения в виде ПЛС функции ограниченной вариации. Справедливость леммы относительно функций $\omega_i^{\pm}(\lambda)$, $i = 0, 1, 2$, следует из вспомогательных утверждений в [6].

Из равенств

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\omega_2^+(\lambda)}{\omega_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)}\frac{\lambda-c}{\lambda+c}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\omega_1^-(\lambda)}{\omega_0^-(\lambda)}\frac{\lambda-c}{\lambda+c}\right)$$

вытекают последние утверждения леммы.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Из [4] известны представления

$$\begin{aligned} W_1(\lambda) &= -K_-\frac{1}{r_1^+(\lambda)}\frac{r_0^+(\lambda)}{\lambda}e^{\lambda b} + \frac{1}{r_1^+(\lambda)}\varphi_1(\lambda), \\ W_2(\lambda) &= K_+\frac{1}{r_2^-(\lambda)}\frac{r_0^-(\lambda)}{\lambda}e^{\lambda a} + \frac{1}{r_2^-(\lambda)}\varphi_2(\lambda), \end{aligned} \tag{9}$$

где K_+ и K_- — некоторые зависящие от a и b константы, и

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda) &= -\omega_0^+(\lambda)\left[\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}\frac{r_2^-(\lambda)}{\omega_1^-(\lambda)}W_2(\lambda)\right]^{(b,\infty)}, \\ \varphi_2(\lambda) &= -\omega_0^-(\lambda)\left[\frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)}\ \frac{\lambda-c}{\lambda+c}\frac{r_1^+(\lambda)}{\omega_2^+(\lambda)}W_1(\lambda)\right]^{(-\infty,a)} \end{aligned} \tag{10}$$

для произвольного $c > 0$.

Дальнейшие наши действия будут состоять в следующем. Мы покажем, что последние слагаемые в правых частях (9) соответствуют остаточным членам в асимптотических представлениях для вероятностей (2), (3). Таким образом, главные члены искомой асимптотики будут определяться первыми слагаемыми в правых частях (9). Как функции переменной λ эти выражения легко обращаются, но в них присутствуют константы K_+ и K_-. Алгоритм их нахождения предложен в [4], однако он сложен и не приводит к компактным выражениям. С другой стороны, для наших целей достаточно будет ограничиться нахождением асимптотических представлений для величин $K_{\pm}$ при $b - a \to \infty$, что и будет сделано ниже.

Далее под c_i будем понимать константы, не зависящие от a и b, а буквой ε будут обозначаться положительные постоянные, возможно, различные в разных выкладках. С помощью леммы 3.1 можно получить оценки (см. [4])

$$\|\varphi_1(\lambda)\| \le c_1\|W_2(\lambda)\|\left\|\left[\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\ \frac{\lambda+c}{\lambda-c}\right]^{(b-a,\infty)}\right\|, \tag{11}$$

$$\|\varphi_2(\lambda)\| \le c_2\|W_1(\lambda)\|\left\|\left[\frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)}\ \frac{\lambda-c}{\lambda+c}\right]^{(-\infty,a-b)}\right\|. \tag{12}$$

Положим $K = \max\{W_1(0), W_2(0)\}$ (эта величина зависит от a и b), и пусть

$$\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c} = \int\limits_0^\infty e^{\lambda x} dA(x),$$

здесь A — функция ограниченной вариации в соответствии с леммой 3.5. Используя леммы 3.2 и 3.5, можно записать (11) в следующем виде:

$$\|\varphi_1(\lambda)\| \le c_1 K \int\limits_{b-a}^\infty |dA(x)| \equiv \frac{K}{b-a} l, \tag{13}$$

где символом l мы будем для краткости обозначать любую величину, имеющую порядок малости $o\big(\frac{1}{(b-a)^{k-2}}\big)$ при $b-a \to \infty$.

В последующем нам понадобится оценка для $\big\|\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_1(\lambda)\big\|$. Из лемм 3.4 и 3.5 следует, что выражение

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}\frac{r_2^-(\lambda)}{\omega_1^-(\lambda)}W_2(\lambda)\right) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}\right)\frac{r_2^-(\lambda)}{\omega_1^-(\lambda)}W_2(\lambda)\\ &+ \frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{r_2^-(\lambda)}{\omega_1^-(\lambda)}\right)W_2(\lambda) + \frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}\frac{r_2^-(\lambda)}{\omega_1^-(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}W_2(\lambda)\\ &\equiv I_1(\lambda) + I_2(\lambda) + I_3(\lambda)\end{aligned}$$

является ПЛС функции ограниченной вариации. Таким образом, применяя лемму 3.2, можно записать:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_1(\lambda) &= -\omega_0^+(\lambda)[I_1(\lambda)+I_2(\lambda)+I_3(\lambda)]^{(b,\infty)}\\ &- \frac{\partial}{\partial\lambda}(\omega_0^+(\lambda))\left[\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}\frac{r_2^-(\lambda)}{\omega_1^-(\lambda)}W_2(\lambda)\right]^{(b,\infty)}.\end{aligned} \tag{14}$$

Так как $\frac{\partial}{\partial\lambda}(\omega_0^+(\lambda))$ — ПЛС функции ограниченной вариации (см. лемму 3.5), функция $\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}$ есть ПЛС функции ограниченной вариации, сосредоточенной на неотрицательной полуоси, $\frac{r_2^-(\lambda)}{\omega_1^-(\lambda)}W_2(\lambda)$ — ПЛС функции ограниченной вариации с изменением на полуоси $(-\infty, a)$, по лемме 3.1 второе слагаемое в (14) не превосходит по норме

$$c_3\|W_2(\lambda)\|\left\|\left[\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}\right]^{(b-a,\infty)}\right\| = \frac{K}{b-a}l. \tag{15}$$

Отметим, что $\frac{\partial}{\partial\lambda}(\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c})$ является ПЛС функции, сосредоточенной на неотрицательной полуоси, $\frac{\partial}{\partial\lambda}(\frac{r_2^-(\lambda)}{\omega_2^-(\lambda)})$, $\frac{\partial}{\partial\lambda}W_2(\lambda)$ — ПЛС функций, сосредоточенных на неположительной полуоси и на полуоси $(-\infty, a)$ соответственно. Теперь аналогично предыдущим рассуждениям с помощью леммы 3.1 получим оценки

$$\|[I_1(\lambda)]^{(b,\infty)}\| \le c_4\|W_2(\lambda)\|\left\|\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}\right)\right]^{(b-a,\infty)}\right\| = Kl, \tag{16}$$

$$\|[I_2(\lambda)]^{(b,\infty)}\| \le c_5\|W_2(\lambda)\|\left\|\left[\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}\right]^{(b-a,\infty)}\right\| = \frac{K}{b-a}l, \tag{17}$$

$$\|[I_3(\lambda)]^{(b,\infty)}\| \le c_6\left\|\frac{\partial}{\partial\lambda}W_2(\lambda)\right\|\left\|\left[\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}\right]^{(b-a,\infty)}\right\| = \left\|\frac{\partial}{\partial\lambda}W_2(\lambda)\right\|\frac{l}{b-a}, \tag{18}$$

где, напомним, $l = o\big(\frac{1}{(b-a)^{k-2}}\big)$ при $b-a\to\infty$. Таким образом, на основе равенства (14) мы показали, что при $b-a\to\infty$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_1(\lambda)\right\| = \left(K+\frac{U}{b-a}\right)l, \tag{19}$$

где $U = \max\big(\|\frac{\partial}{\partial\lambda}W_1(\lambda)\|, \|\frac{\partial}{\partial\lambda}W_2(\lambda)\|\big)$. Совершенно аналогично получаются соотношения при $b-a\to\infty$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_2(\lambda)\right\| = \left(K+\frac{U}{b-a}\right)l, \tag{20}$$

$$\|\varphi_2(\lambda)\| = \frac{K}{b-a}\,l. \tag{21}$$

Перейдем теперь к нахождению неизвестных K_- и K_+ из (9), а точнее к поиску асимптотических представлений для этих величин. Из [4] известно, что функции $W_1(\lambda)$, $W_2(\lambda)$, $W_0(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda=0$ связаны между собой соотношением

$$(1-f_1(\lambda))W_1(\lambda)+(1-f_2(\lambda))W_2(\lambda)+(1-f_0(\lambda))W_0(\lambda)=0. \tag{22}$$

Разделив это выражение на λ и устремив λ к нулю, получим

$$\mathbf{E}\xi_1^{(1)}W_1(0) = -\mathbf{E}\xi_1^{(2)}W_2(0). \tag{23}$$

Из (9) нетрудно найти значения

$$\mathbf{E}\xi_1^{(1)}W_1(0) = K_-\alpha_-^{(1)}\alpha_+^{(0)}+\alpha_-^{(1)}\varphi_1(0), \quad -\mathbf{E}\xi_1^{(2)}W_2(0) = K_+\alpha_+^{(2)}\alpha_-^{(0)}-\alpha_+^{(2)}\varphi_2(0),$$

поэтому равенство (23) принимает вид

$$K_-\frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}}+\frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}\alpha_+^{(0)}}\varphi_1(0) = K_+\frac{\alpha_+^{(2)}}{\alpha_+^{(0)}}-\frac{\alpha_+^{(2)}}{\alpha_-^{(0)}\alpha_+^{(0)}}\varphi_2(0). \tag{24}$$

Вторым уравнением для нахождения K_+, K_- будет условие нормировки

$$W_1(0)+W_2(0)+W_0(0)=1. \tag{25}$$

Чтобы воспользоваться этим соотношением, займемся изучением поведения величин $W_1(0)$, $W_2(0)$, $W_0(0)$ при $b-a\to\infty$. Мы покажем, что главные члены асимптотики этих величин линейно зависят от $K_\pm$. Подстановка этих асимптотических формул в (24) и (25) позволит нам получить асимптотику $K_\pm$.

Начнем с анализа $W_0(0)$. Используя (9), получим

$$W_0(\lambda) = -\frac{1-f_1(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}W_1(\lambda)-\frac{1-f_2(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}W_2(\lambda) = K_-\frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)}\frac{e^{\lambda b}}{\lambda}-K_+\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{e^{\lambda a}}{\lambda}$$
$$-\frac{r_1^-(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}\varphi_1(\lambda)-\frac{r_2^+(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}\varphi_2(\lambda) = K_-\frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}}\frac{e^{\lambda b}}{\lambda}-K_+\frac{\alpha_+^{(2)}}{\alpha_+^{(0)}}\frac{e^{\lambda a}}{\lambda}$$

$$- K_- e^{\lambda b} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\lambda x} u_1(x)\,dx - K_+ e^{\lambda a} \int\limits_{0}^{\infty} e^{\lambda x} u_2(x)\,dx$$
$$- \frac{r_1^-(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}\varphi_1(\lambda) - \frac{r_2^+(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}\varphi_2(\lambda).$$

Учитывая соотношение (24), перепишем последнее выражение следующим образом:

$$W_0(\lambda) = K_- \frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}} \frac{e^{\lambda b} - e^{\lambda a}}{\lambda} - K_- e^{\lambda b} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\lambda x} u_1(x)\,dx$$
$$- K_- \frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}} \frac{\alpha_+^{(0)}}{\alpha_+^{(2)}} e^{\lambda a} \int\limits_{0}^{\infty} e^{\lambda x} u_2(x)\,dx + \varphi_0(\lambda), \qquad (26)$$

где

$$\varphi_0(\lambda) = \frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}\alpha_+^{(0)}} \varphi_1(0) \frac{e^{\lambda b} - e^{\lambda a}}{\lambda}$$
$$- \left(\frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}\alpha_+^{(0)}} \varphi_1(0) + \frac{\varphi_2(0)}{\alpha_-^{(0)}} \right) e^{\lambda a} \int\limits_{0}^{\infty} e^{\lambda x} u_2(x)\,dx$$
$$- \left(\frac{r_1^-(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}\varphi_1(\lambda) + \frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}\alpha_+^{(0)}} \varphi_1(0) \frac{e^{\lambda b}}{\lambda} \right) - \left(\frac{r_2^+(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}\varphi_2(\lambda) + \frac{\alpha_+^{(2)}}{\alpha_-^{(0)}\alpha_+^{(0)}} \varphi_2(0) \frac{e^{\lambda a}}{\lambda} \right). \qquad (27)$$

Лемма 3.6. *$\|\varphi_0(\lambda)\| = \big(K + \frac{U}{b-a}\big) l$, где $l = o\big(\frac{1}{(b-a)^{k-2}}\big)$ при $b-a \to \infty$.*

Доказательство. Так как $|\varphi_i(0)| \le \|\varphi_i(\lambda)\|$, $i = 1, 2$, из (13) и (21) сразу же получим, что первое и второе слагаемые в правой части (27) оцениваются по норме величиной Kl при $b-a \to \infty$. Рассмотрим третье слагаемое. Положим для краткости $s = \frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}\alpha_+^{(0)}}$ и напомним, что $\frac{\omega_1^-(\lambda)}{\omega_0^-(\lambda)\omega_0^+(\lambda)}$ является ПЛС функции ограниченной вариации. Перепишем рассматриваемое слагаемое в виде

$$\frac{r_1^-(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}\varphi_1(\lambda) + s\varphi_1(0)\frac{e^{\lambda b}}{\lambda}$$
$$= \frac{\lambda - c}{\lambda} \left(\frac{\omega_1^-(\lambda)}{\omega_0^-(\lambda)\omega_0^+(\lambda)} \varphi_1(\lambda) + s\varphi_1(0) \frac{e^{\lambda b}}{\lambda - c} \right) \equiv \frac{\lambda - c}{\lambda} R(\lambda). \qquad (28)$$

Нетрудно видеть, что $R(\lambda)$ является ПЛС функции ограниченной вариации и $\|R(\lambda)\| \le c_7 \|\varphi_1(\lambda)\|$. Остается показать, что $\frac{R(\lambda)}{\lambda}$ также ПЛС функции ограниченной вариации и

$$\left\| \frac{R(\lambda)}{\lambda} \right\| = \left(K + \frac{U}{b-a} \right) l$$

при $b-a \to \infty$. Так как $\frac{\omega_1^-(0)}{\omega_0^+(0)\omega_0^-(0)} = \frac{s}{c}$, с помощью лемм 3.2, 3.5 и элементарных преобразований устанавливаем, что выражения

$$X(\lambda) \equiv \left(\frac{\omega_1^-(\lambda)}{\omega_0^+(\lambda)\omega_0^-(\lambda)} - \frac{s}{c} \right) \lambda^{-1},$$

$$Y(\lambda) \equiv \left(\frac{e^{\lambda b}}{\lambda - c} + \frac{1}{c}\right)\lambda^{-1} = \frac{e^{\lambda b} - 1}{\lambda(\lambda - c)} + \frac{1}{c(\lambda - c)}$$

являются ПЛС функций ограниченной вариации.

Имеем, далее,

$$c\frac{R(\lambda)}{\lambda} = cX(\lambda)\varphi_1(\lambda) + cs\varphi_1(0)Y(\lambda) + s\frac{\varphi_1(\lambda) - \varphi_1(0)}{\lambda}. \quad (29)$$

Для первых двух слагаемых из правой части имеют место оценки

$$\|cX(\lambda)\varphi_1(\lambda) + cs\varphi_1(0)Y(\lambda)\| \le c_8 b\|\varphi_1(\lambda)\| \equiv Kl.$$

Так как $\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_1(\lambda)$ — ПЛС функции ограниченной вариации (см. (14)), из (19) и леммы 3.2 получаем, что

$$\left\|\frac{\varphi_1(\lambda) - \varphi_1(0)}{\lambda}\right\| = \left(K + \frac{U}{b-a}\right) l$$

при $b - a \to \infty$. Такая же оценка для четвертого слагаемого в (27) устанавливается аналогично.

Лемма доказана.

Теперь из (9), (24) и (26) находим

$$W_0(0) = K_-\frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}}(b-a) - K_-A - \frac{\alpha_+^{(0)}}{\alpha_+^{(2)}}\frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}}K_-B + \left(K + \frac{U}{b-a}\right) l,$$

$$W_1(0) = K_-p_1\alpha_+^{(0)} + \frac{K}{b-a}l,$$

$$W_2(0) = -K_+p_2\alpha_-^{(0)} + \frac{K}{b-a}l = -K_-p_2\frac{\alpha_-^{(1)}\alpha_+^{(0)}}{\alpha_+^{(2)}} + \frac{K}{b-a}l.$$

Из условия нормировки

$$W_1(0) + W_2(0) + W_0(0) = K_-\frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}}(b-a)\left(1 - \frac{1}{b-a}\left(A\frac{\alpha_-^{(0)}}{\alpha_-^{(1)}} + B\frac{\alpha_+^{(0)}}{\alpha_+^{(2)}}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{p_1}{b-a}\frac{\alpha_-^{(0)}\alpha_+^{(0)}}{\alpha_-^{(1)}} - \frac{p_2}{b-a}\frac{\alpha_-^{(0)}\alpha_+^{(0)}}{\alpha_+^{(2)}}\right) + \left(K + \frac{U}{b-a}\right) l$$

$$\equiv K_-\frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}}(b-a)\left(1 + \frac{L}{b-a}\right) + \left(K + \frac{U}{b-a}\right) l = 1$$

следует, что

$$K_- = \frac{\alpha_-^{(0)}}{\alpha_-^{(1)}}\frac{1}{b-a+L} + \frac{K + \frac{U}{b-a}}{b-a+L}l,$$

и с помощью (24) получаем

$$K_+ = \frac{\alpha_+^{(0)}}{\alpha_+^{(2)}}\frac{1}{b-a+L} + \frac{K + \frac{U}{b-a}}{b-a+L}l.$$

Если мы подставим K_+ и K_- в (9) и продифференцируем в этих выражениях функции $W_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda)$, то нетрудно оценить порядок убывания K и U при $b - a \to \infty$:

$$K = \max(W_1(0), W_2(0)) = O\left(\frac{1}{b-a}\right),$$

$$U = \max\left(\left\|\frac{\partial}{\partial\lambda}W_1(\lambda)\right\|, \left\|\frac{\partial}{\partial\lambda}W_2(\lambda)\right\|\right) = O(1).$$

Подставляя теперь K_+ и K_- в (9) и (26), имеем

$$W_1(\lambda) = -\frac{\alpha_-^{(0)}}{\alpha_-^{(1)}}\frac{1}{b-a+L}\frac{1}{r_1^+(\lambda)}\frac{r_0^+(\lambda)}{\lambda}e^{\lambda b} + \widetilde{\varphi}_1(\lambda),$$

$$W_2(\lambda) = \frac{\alpha_+^{(0)}}{\alpha_+^{(2)}}\frac{1}{b-a+L}\frac{1}{r_2^-(\lambda)}\frac{r_0^-(\lambda)}{\lambda}e^{\lambda a} + \widetilde{\varphi}_2(\lambda),$$

$$W_0(\lambda) = \frac{1}{b-a+L}\Biggl(\frac{e^{\lambda b}-e^{\lambda a}}{\lambda} - \frac{\alpha_-^{(0)}}{\alpha_-^{(1)}}e^{\lambda b}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\lambda x}u_1(x)\,dx - \frac{\alpha_+^{(0)}}{\alpha_+^{(2)}}e^{\lambda a}\int\limits_{0}^{\infty} e^{\lambda x}u_2(x)\,dx\Biggr) + \widetilde{\varphi}_0(\lambda),$$

где

$$\|\widetilde{\varphi}_i(\lambda)\| = o\left(\frac{1}{(b-a)^k}\right),\ i=1,2, \quad \|\widetilde{\varphi}_0(\lambda)\| = o\left(\frac{1}{(b-a)^{k-1}}\right).$$

Нетрудно видеть, что первые члены полученных соотношений являются ПЛС главных членов в формулировке теоремы. Это следует из равенства $\lambda^{-1}r_0^{\pm}(\lambda) = -\alpha_{\pm}^{(0)}\mathbf{E}e^{\lambda\gamma_{\pm}^{(0)}}$, соотношений (6) и $\alpha_+^{(0)}\alpha_-^{(0)} = -\mathbf{E}\bigl(\xi_1^{(0)}\bigr)^2/2$, $\alpha_-^{(1)} = p_1\mathbf{E}\xi_1^{(1)}$, $\alpha_+^{(2)} = p_2\mathbf{E}\xi_1^{(2)}$. Таким образом, полученные выражения для $W_i(\lambda)$ вместе с оценками остатков эквивалентны утверждению теоремы 2.1 в той части, где наложены моментные ограничения.

Предположим теперь, что выполнены условия (A_2). Тогда функции

$$\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c} = \frac{\omega_2^+(\lambda)}{\omega_0^+(\lambda)}\frac{\lambda+c}{\lambda-c}, \quad \frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)}\frac{\lambda-c}{\lambda+c}$$

аналитичны соответственно в областях $\operatorname{Re}\lambda < \varepsilon$ и $\operatorname{Re}\lambda > -\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Таким образом, по лемме 3.3 из неравенств (11) и (12) следует, что $\|\varphi_i(\lambda)\| = O(e^{\varepsilon(a-b)})$, $i=1,2$, при $b-a\to\infty$. Применяя те же рассуждения и учитывая, что $U = O(1)$ при $b-a\to\infty$, из соотношений (15)–(18) и аналогичных неравенств для функции $\frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)}\frac{\lambda-c}{\lambda+c}$ выводим оценку

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_i(\lambda)\right\| = O(e^{\varepsilon(a-b)}), \quad i=1,2,$$

при $b-a\to\infty$. Так как норма $\varphi_0(\lambda)$ известным образом выражается через нормы функций $\varphi_i(\lambda)$ и $\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_i(\lambda)$ (см. доказательство леммы 3.6, равенства (28), (19)), сразу же получаем, что $\|\varphi_0(\lambda)\| = O(e^{\varepsilon(a-b)})$ при $b-a\to\infty$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Из [4] известны представления

$$W_1(\lambda) = -\frac{r_0^+(\lambda)}{r_1^+(\lambda)}\left[\frac{1-f_2(\lambda)}{r_0^+(\lambda)r_1^-(\lambda)}W_2(\lambda)\right]^{(b,\infty)}, \tag{30}$$

$$W_2(\lambda) = \frac{R_+}{r_2^-(\lambda)} \frac{r_0^-(\lambda)}{\lambda} e^{\lambda a} + q_2(\lambda), \tag{31}$$

где R_+ — зависящая от a и b константа и

$$q_2(\lambda) = -\frac{\omega_0^-(\lambda)}{r_2^-(\lambda)} \left[\frac{1 - f_1(\lambda)}{\omega_0^-(\lambda) r_2^+(\lambda)} W_1(\lambda) \right]^{(-\infty,a)}.$$

Функции

$$\frac{r_2^+(\lambda)}{\lambda} \frac{\lambda + c}{r_0^+(\lambda)}, \quad \frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)} \frac{\lambda - c}{\lambda + c}$$

являются ПЛС функций ограниченной вариации, сосредоточенных на неотрицательной и неположительной полуосях соответственно; функции

$$\frac{r_2^-(\lambda)}{\omega_1^-(\lambda)} W_2(\lambda), \quad \frac{r_1^+(\lambda)}{\omega_2^+(\lambda)} W_1(\lambda)$$

— ПЛС функций ограниченной вариации, сосредоточенных на полуосях $(-\infty, a)$ и (b, ∞) соответственно. Применив лемму 3.1, получаем оценки

$$\|W_1(\lambda)\| \le \left\| \frac{r_0^+(\lambda)}{r_1^+(\lambda)} \right\| \left\| \left[\frac{r_2^+(\lambda)}{\lambda} \frac{\lambda + c}{r_0^+(\lambda)} \right]^{(b-a,\infty)} \right\| \left\| \frac{r_2^-(\lambda)}{\omega_1^-(\lambda)} \right\| \|W_2(\lambda)\|, \tag{32}$$

$$\|q_2(\lambda)\| \le \left\| \frac{\omega_0^-(\lambda)}{r_2^-(\lambda)} \right\| \left\| \left[\frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)} \frac{\lambda - c}{\lambda + c} \right]^{(-\infty,a-b)} \right\| \left\| \frac{r_1^+(\lambda)}{\omega_2^+(\lambda)} \right\| \|W_1(\lambda)\|. \tag{33}$$

В условиях теоремы ПЛС функций ограниченной вариации будут являться $(k-1)$-я производная функции $\left(r_0^+(\lambda)\right)^{-1}$ (это следует из тождества (7) и конечности момента $\mathbf{E}|\overline{S}^{(0)}|^{k-1} < \infty$ (см. [9])) и функции $\omega_2^+(\lambda)$ (см. лемму 3.5). Поэтому $(k-1)$-я производная функции

$$\frac{r_2^+(\lambda)}{\lambda} \frac{\lambda + c}{r_0^+(\lambda)} = k_0 \mathbf{E} e^{\lambda \overline{S}^{(0)}} \omega_2^+(\lambda) \frac{\lambda + c}{\lambda - c}$$

также будет ПЛС функции ограниченной вариации. Отсюда с помощью леммы 3.2 получаем, что

$$\left\| \left[\frac{r_2^+(\lambda)}{\lambda} \frac{\lambda + c}{r_0^+(\lambda)} \right]^{(b-a,\infty)} \right\| = o\left(\frac{1}{(b-a)^{k-1}} \right).$$

В итоге на основе этих и аналогичных утверждений относительно функции $\frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)} \frac{\lambda-c}{\lambda+c}$ (см. лемму 3.5) выводим, что

$$\|W_1(\lambda)\| = o\left(\frac{1}{(b-a)^{k-1}} \right), \quad \|q_2(\lambda)\| = o\left(\frac{1}{(b-a)^{k-1}} \right) \tag{34}$$

при $b - a \to \infty$. Первое из этих соотношений, очевидно, влечет справедливость первого из утверждений (4). Далее, так как при $\mathbf{E}\xi_1^{(0)} \ne 0$ функции $\frac{1-f_1(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}$, $\frac{1-f_1(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}$ являются ПЛС функций ограниченной вариации, то при $b - a \to \infty$ также

$$\left\| \frac{1 - f_1(\lambda)}{1 - f_0(\lambda)} W_1(\lambda) \right\| = o\left(\frac{1}{(b-a)^{k-1}} \right), \quad \left\| \frac{1 - f_2(\lambda)}{1 - f_0(\lambda)} q_2(\lambda) \right\| = o\left(\frac{1}{(b-a)^{k-1}} \right).$$

Таким образом, с помощью тождества (22) можно записать:

$$W_0(\lambda) = -\frac{1-f_1(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}W_1(\lambda) - \frac{1-f_2(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}W_2(\lambda)$$
$$= -\frac{1-f_1(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}W_1(\lambda) - R_+\frac{r_2^+(\lambda)}{r_0^+(\lambda)}\frac{e^{\lambda a}}{\lambda} - \frac{1-f_2(\lambda)}{1-f_0(\lambda)}q_2(\lambda)$$
$$\equiv -R_+\frac{1}{r_0^+(\lambda)}\frac{r_2^+(\lambda)}{\lambda}e^{\lambda a} + \phi(\lambda), \quad (35)$$

где

$$\|\phi(\lambda)\| = o\left(\frac{1}{(b-a)^{k-1}}\right) \quad (36)$$

при $b-a\to\infty$.

Асимптотику величины R_+ при $b-a\to\infty$ можно найти с помощью условия нормировки (25):

$$-p_2\alpha_-^{(0)}R_+ + k_0\alpha_+^{(2)}R_+ + o\left(\frac{1}{(b-a)^{k-1}}\right) = 1,$$

откуда

$$R_+ = \left(k_0\alpha_+^{(2)} - p_2\alpha_-^{(0)}\right)^{-1} + o\left(\frac{1}{(b-a)^{k-1}}\right).$$

Подставим это выражение в (31) и (35). Остается заметить, что главные члены полученных соотношений являются ПЛС первых слагаемых в правых частях (4) и (5). Это следует из равенства $-\alpha_+^{(2)}\mathbf{E}e^{\lambda\gamma_+^{(2)}} = \lambda^{-1}r_2^+(\lambda)$ и аналогичного равенства для $\gamma_-^{(0)}$, а также из соотношений (6), (7) $\alpha_-^{(0)} = k_0\mathbf{E}\xi_1^{(0)}$, $\alpha_+^{(2)} = p_2\mathbf{E}\xi_1^{(2)}$. Вместе с оценками (34) и (36) это доказывает утверждения (4) и (5) теоремы.

Займемся уточнением теоремы в крамеровском случае. Рассмотрим для этого функцию $W_1(\lambda)$ более подробно. Подставив (31) в (30), получим

$$W_1(\lambda) = -R_+\frac{r_0^+(\lambda)}{r_1^+(\lambda)}\left[\frac{\frac{r_2^+(\lambda)}{\lambda}}{r_0^+(\lambda)}\frac{r_0^-(\lambda)}{r_1^-(\lambda)}e^{\lambda a}\right]^{(b,\infty)} + q_1(\lambda), \quad (37)$$

где

$$q_1(\lambda) = -\frac{r_0^+(\lambda)}{r_1^+(\lambda)}\left[\frac{1-f_2(\lambda)}{r_0^+(\lambda)r_1^-(\lambda)}q_2(\lambda)\right]^{(-\infty,a)}.$$

На основе тех же рассуждений, что были использованы для получения оценки (32), при помощи леммы 3.1 можно получить оценку

$$\|q_1(\lambda)\| \le \left\|\frac{r_0^+(\lambda)}{r_1^+(\lambda)}\right\|\left\|\left[\frac{\frac{r_2^+(\lambda)}{\lambda}(\lambda+c)}{r_0^+(\lambda)}\right]^{(b-a,\infty)}\right\|\left\|\frac{r_0^-(\lambda)}{\omega_1^-(\lambda)}\right\|\|q_2(\lambda)\|. \quad (38)$$

Заметим, что если выполнено условие (A_2) и существует $\beta\in(0,\lambda_+)$ такое, что $f_0(\beta)=1$, то в этом случае функция $r_0^+(\lambda)$ имеет единственный действительный нуль $\beta>0$, функция $\left(r_0^+(\lambda)\right)^{-1}$ будет аналитична в области $\operatorname{Re}\lambda<\beta$, компоненты факторизации $r_i^+(\lambda)$, $i=0,1,2$, аналитичны в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<\lambda_+$ и $r_i^-(\lambda)$ — в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>\lambda_-$. Так как функция $\lambda^{-1}r_2^+(\lambda)$ вновь будет аналитична в области $\operatorname{Re}\lambda<\lambda_+$ (см. [9]), справедливо представление

$$\frac{r_2^+(\lambda)}{\lambda r_0^+(\lambda)} = \frac{r_2^+(\beta)}{\beta(\lambda-\beta)}\frac{1}{(r_0^+(\beta))'} + \upsilon(\lambda),$$

где функция $\upsilon(\lambda)$ аналитична уже в области $\operatorname{Re}\lambda < \beta + \varepsilon$ и является ПЛС функции ограниченной вариации с изменением на неотрицательной полуоси. Подставив это выражение в (37), нетрудно видеть (см. [4, лемма 3.2]), что

$$W_1(\lambda) = -R_- \frac{1}{r_1^+(\lambda)} \frac{r_0^+(\lambda)}{\lambda - \beta} e^{\lambda b} + \frac{1}{r_1^+(\lambda)} N_1(\lambda) + q_1(\lambda), \tag{39}$$

где

$$N_1(\lambda) = -r_0^+(\lambda) \left[\upsilon(\lambda) \frac{r_0^-(\lambda)}{r_1^-(\lambda)} e^{\lambda a} \right]^{(b,\infty)}, \quad R_- = R_+ \frac{e^{\beta(a-b)}}{\beta} \frac{r_2^+(\beta)}{(r_0^+(\beta))'} \frac{r_0^-(\beta)}{r_1^-(\beta)}. \tag{40}$$

Принимая во внимание область аналитичности функции $\upsilon(\lambda)$ и используя леммы 3.1 и 3.3, приходим к оценке

$$\left\| \frac{1}{r_1^+(\lambda)} N_1(\lambda) \right\| \le \left\| \frac{r_0^+(\lambda)}{r_1^+(\lambda)} \right\| \| [\upsilon(\lambda)]^{(b-a,\infty)} \| \left\| \frac{r_0^-(\lambda)}{r_1^-(\lambda)} \right\| \le c_9 e^{(\beta+\varepsilon)(a-b)} \tag{41}$$

аналогично тому, как были найдены оценки (32) и (33). Как уже отмечалось, функция

$$\frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)} \frac{\lambda - c}{\lambda + c}$$

аналитична в области $\operatorname{Re}\lambda > -\varepsilon$ и поэтому с помощью леммы 3.3 оценку (33) можно записать в виде

$$\|q_2(\lambda)\| \le c_{10} e^{\varepsilon(a-b)} \|W_1(\lambda)\|.$$

Отсюда сразу же следует (см. (38)), что

$$\|q_1(\lambda)\| \le c_{11} e^{(\beta+\varepsilon)(a-b)} \|W_1(\lambda)\|. \tag{42}$$

Теперь из равенств (39)–(42) находим, что при $b - a \to \infty$

$$\|W_1(\lambda)\| = O(e^{\beta(a-b)}),$$

поэтому

$$\|q_2(\lambda)\| = O(e^{(\beta+\varepsilon)(a-b)}).$$

Рассмотрим выражение (35). Привлекая полученные выше соотношения (39) и (40), можно записать:

$$\begin{aligned} W_0(\lambda) = -R_+ \frac{1}{r_0^+(\lambda)} \frac{r_2^+(\lambda)}{\lambda} e^{\lambda a} + R_- \frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)} \frac{e^{\lambda b}}{\lambda - \beta} - \frac{r_1^-(\lambda)}{1 - f_0(\lambda)} N_1(\lambda) \\ - \frac{1 - f_2(\lambda)}{1 - f_0(\lambda)} q_2(\lambda) - \frac{1 - f_1(\lambda)}{1 - f_0(\lambda)} q_1(\lambda) = R_+ \frac{e^{\beta(a-b)}}{\beta} \frac{r_2^+(\beta)}{(r_0^+(\beta))'} \frac{r_0^-(\beta)}{r_1^-(\beta)} \frac{r_1^-(\lambda)}{r_0^-(\lambda)} \frac{e^{\lambda b}}{\lambda - \beta} \\ - R_+ \frac{1}{r_0^+(\lambda)} \frac{r_2^+(\lambda)}{\lambda} e^{\lambda a} + \phi_0(\lambda), \end{aligned} \tag{43}$$

где

$$\|\phi_0(\lambda)\| = O(e^{(\beta+\varepsilon)(a-b)})$$

при $b - a \to \infty$.

Как и ранее, с помощью условия нормировки (25) на основе тождеств (31), (43), (39) можно уточнить значение R_+, а именно, при $b - a \to \infty$

$$R_+ = \left(k_0 \alpha_+^{(2)} - p_2 \alpha_-^{(0)} + \frac{e^{\beta(a-b)}}{\beta^2} \frac{r_2^+(\beta)}{(r_0^+(\beta))'} \frac{r_0^-(\beta)}{r_1^-(\beta)} \left(\frac{p_1}{k_0} - \frac{\alpha_-^{(1)}}{\alpha_-^{(0)}} \right) \right)^{-1} + O(e^{(\beta+\varepsilon)(a-b)}).$$

Подставив это выражение в (31), (40), (39) и (43), получим утверждение второй части теоремы. Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность Б. А. Рогозину, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лотов В. И.* Об осциллирующих случайных блужданиях // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 869–888.
2. *Боровков А. А.* Предельное распределение для осциллирующего случайного блуждания // Теория вероятностей и ее применения. 1988. Т. 25, № 3. С. 663–665.
3. *Прохоров Ю. В.* Управление винеровским процессом при ограниченном числе переключений // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1964. Т. 71. С. 82–87.
4. *Ким Д. К., Лотов В. И.* Об осциллирующих случайных блужданиях с двумя уровнями переключений // Мат. тр. 2003. Т. 6, № 1. С. 34–74.
5. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
6. *Рогозин Б. А.* Асимптотика функции восстановления // Теория вероятностей и ее применения. 1976. Т. 21, № 4. С. 689–706.
7. *Боровков А. А.* Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
8. *Боровков А. А., Коршунов Д. А.* Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Ч. 1. Стационарные распределения // Теория вероятностей и ее применения. 1996. Т. 41, № 1. С. 3–30.
9. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
10. *Tweedie R. L.* The existence of moments for stationary Markov chains // J. Appl. Probab. 1983. V. 20, N 1. P. 191–196.

Статья поступила 14 ноября 2003 г., окончательный вариант — 9 июня 2004 г.

Ким Дмитрий Константинович
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090

Лотов Владимир Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
lotov@math.nsc.ru