Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 519.542

РАСПОЗНАВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП $F_4(2^m)$ ПО СПЕКТРУ

А. В. Васильев, М. А. Гречкосеева, В. Д. Мазуров, Х. П. Чао, Г. Ю. Чен, В. Д. Ши

Аннотация: Спектр конечной группы — это множество порядков ее элементов. Конечная группа G называется *распознаваемой по спектру*, если каждая конечная группа с таким же спектром, что и G, изоморфна G. Цель работы — доказать, что для каждого натурального числа m конечная простая группа Шевалле $F_4(2^m)$ распознаваема по спектру.

Ключевые слова: распознавание по спектру, конечная простая группа, группа лиева типа.

Введение

Спектром $\omega(G)$ конечной группы G называется множество порядков ее элементов. Иными словами, натуральное число n принадлежит $\omega(G)$ тогда и только тогда, когда в G есть элемент порядка n. Конечная группа G называется *распознаваемой по ее спектру* (кратко, *распознаваемой*), если для каждой конечной группы H такой, что $\omega(H) = \omega(G)$, имеет место изоморфизм $H \simeq G$. Поскольку любая конечная группа, обладающая нетривиальной разрешимой нормальной подгруппой, нераспознаваема (см. [1, лемма 1]), каждая распознаваемая группа является расширением прямого произведения M неабелевых простых групп с помощью некоторой подгруппы из $\mathrm{Out}(M)$. Особый интерес представляет вопрос о распознаваемости простых и почти простых групп (группа G называется *почти простой*, если $S \leqslant G \leqslant \mathrm{Aut}(S)$ для некоторой неабелевой простой группы S). Первые примеры распознаваемых конечных простых групп указаны Ши в середине 80-х гг. прошлого века (см. [2, 3]). В 1994 г. Ши и Брандл доказали распознаваемость бесконечной серии простых линейных групп $L_2(q)$, $q \neq 9$ (см. [4, 5]). К настоящему времени решен вопрос о распознаваемости для всех групп, простые делители которых не превосходят 11 (см. [6]), доказана распознаваемость нескольких бесконечных серий конечных

Работа А. В. Васильева, М. А. Гречкосеевой и В. Д. Мазурова выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–00495 и 02–01–39005), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ–2069.2003.1), а также программы «Университеты России» (код проекта УР.04.01.031). Работа М. А. Гречкосеевой поддержана также Федеральным агентством по образованию (грант А04–2.8–293 для поддержки научно-исследовательской работы аспирантов вузов). Работа Х. П. Чао и В. Д. Ши выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (грант № 10171074).

простых и почти простых групп. Список групп, для которых к настоящему времени решен вопрос о распознаваемости, можно найти в [6].

Цель настоящей работы — доказать следующий результат.

Теорема. *Для каждого натурального числа m группа $G = F_4(2^m)$ распознаваема по спектру.*

Замечание. Распознаваемость группы $F_4(2)$ была установлена в [7], поэтому при доказательстве теоремы мы можем считать, что $m > 1$.

§ 1. Предварительные результаты

Множество $\omega(H)$ конечной группы H замкнуто относительно делимости и однозначно определено множеством $\mu(H)$ тех элементов из $\omega(H)$, которые являются максимальными относительно делимости. Кроме того, множество $\omega(H)$ определяет граф Грюнберга — Кегеля $GK(H)$, вершинами которого служат все простые делители порядка группы H, и два простых числа p и q смежны, если H содержит элемент порядка $p \cdot q$. Обозначим через $s(H)$ число компонент связности графа $GK(H)$, а через $\pi_i(H)$, $i = 1, \dots, s(H)$, — его i-ю компоненту связности. Если группа H имеет четный порядок, то положим $2 \in \pi_1(H)$. Обозначим через $\mu_i(H)$ (соответственно через $\omega_i(H)$) множество чисел $n \in \mu(H)$ ($n \in \omega(H)$) таких, что каждый простой делитель числа n принадлежит π_i.

В работе [8] было показано, что для группы $G = F_4(q)$, где $q = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$, выполнено $s(G) = 3$. Таким образом, мы можем использовать следующие две леммы.

Лемма 1.1 (следствие теоремы Грюнберга — Кегеля). *Пусть H — конечная группа с $s(H) > 2$. Тогда существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{H} = H/K \leqslant \mathrm{Aut}(S)$ для некоторой нильпотентной нормальной $\pi_1(H)$-подгруппы K из H и группа $\overline{H}/S$ является $\pi_1(H)$-подгруппой. Более того, граф $GK(L)$ несвязен, $s(S) \geq s(H)$, и для каждого i, $2 \leq i \leq s(H)$, существует j, $2 \leq j \leq s(S)$, такое, что $\omega_i(H) = \omega_j(S)$.*

Доказательство. См. [9].

Лемма 1.2. *Пусть S — конечная простая неабелева группа, не изоморфная знакопеременной группе A_6, и $s(S) > 2$. Тогда S квазираспознаваема, т. е. любая конечная группа H такая, что $\omega(H) = \omega(S)$, содержит композиционный фактор, изоморфный S.*

Доказательство. См. [10].

Лемма 1.3. *Пусть H — конечная группа, $K \lhd H$ и H/K — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |K|) = 1$ и F не содержится в $KC_H(K)/K$, то $p|C| \in \omega(H)$ для некоторого простого делителя p числа $|K|$.*

Доказательство. См. [11, лемма 1].

Лемма 1.4. *Пусть $L = G_2(q)$, где $q = p^n$, p — простое число. Тогда L содержит подгруппу Фробениуса FC с ядром F — элементарной абелевой p-группой порядка q^2 — и дополнением $C = \langle c \rangle$ — циклической группой порядка $q^2 - 1$.*

Доказательство. Пусть Φ — система корней, Φ^+ — система положительных и $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ — система простых корней алгебры Ли G_2, причем корень α_2 длиннее, чем α_1, т. е. $(\alpha_2, \alpha_2) = 3(\alpha_1, \alpha_1)$. Обозначим через $x_\alpha(t)$, где $\alpha \in \Phi$,

$t \in \mathbf{F}_q$, корневой элемент группы L, через X_α — соответствующую корневую подгруппу, через $H = \langle h_{a_i}(u) \mid i = 1, 2, u \in \mathbf{F}_q^* \rangle$ — подгруппу Картана группы L и через $U = \langle X_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+ \rangle$ — максимальную унипотентную подгруппу, соответствующую Φ^+. Подгруппа U является силовской p-подгруппой L. С точностью до сопряжения в L существуют две максимальные параболические подгруппы. Следуя [12], где такие подгруппы подробно описаны, обозначим эти подгруппы через P_1 и P_2. Для нас интерес представляет группа P_1. Она допускает разложение Леви: $P_1 = U_1 : L_1$, где $U_1 = \langle X_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_2\} \rangle$ — унипотентная подгруппа порядка q^5, $L_1 = \langle H, X_{\alpha_2}, X_{-\alpha_2} \rangle$ — подгруппа порядка $q(q^2-1)(q-1)$, $U_1 \cap L_1 = 1$ и $P_1 = N_L(U_1)$ является нормализатором U_1 в L.

Обозначим через F подгруппу U_1, порожденную корневыми подгруппами $X_{3\alpha_1+\alpha_2}$ и $X_{3\alpha_1+2\alpha_2}$. В силу коммутаторной формулы Шевалле [13, теорема 5.2.2] элементы $x_{3\alpha_1+\alpha_2}(t)$ и $x_{3\alpha_1+2\alpha_2}(u)$ перестановочны для любых $t, u \in \mathbf{F}_q$. Следовательно, группа F является элементарной абелевой p-группой порядка q^2.

Подгруппа Картана H нормализует каждую корневую подгруппу. Далее, используя коммутаторную формулу Шевалле, легко проверить, что $X_\alpha^g \subseteq F$, где $\alpha = 3\alpha_1 + \alpha_2$ или $3\alpha_1 + 2\alpha_2$, а g пробегает множество элементов вида $x_{\pm\alpha_2}(t)$, $t \in \mathbf{F}_q$. Следовательно, подгруппа L_1 нормализует F.

Рассмотрим F как двумерное векторное пространство V над полем порядка q и выберем элементы $x_{3\alpha_1+\alpha_2}(1)$ и $x_{3\alpha_1+2\alpha_2}(1)$ в качестве базисных векторов v_1 и v_2 пространства V. Так как L_1 нормализует F, существует естественный гомоморфизм ψ из L_1 в $GL(V)$. Образы элементов $x_{\alpha_2}(t)$, $x_{-\alpha_2}(t)$ и $h_{\alpha_1}(\lambda)$, где $t \in \mathbf{F}_q$, $\lambda \in \mathbf{F}_q^*$, из L_1 под действием ψ выглядят следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку эти матрицы порождают $GL_2(q)$, отображение ψ является эпиморфизмом. Но $|L_1| = |GL_2(q)|$, поэтому $L_1 \simeq GL_2(q)$.

Теперь отождествим векторное пространство V с аддитивной группой поля порядка q^2. Тогда оператор правого умножения на примитивный элемент поля индуцирует невырожденное линейное преобразование φ пространства V порядка $q^2 - 1$, которое, очевидно, регулярно на V. Следовательно, его прообраз c в L_1 обладает тем же свойством. Таким образом, подгруппа FC, где $C = \langle c \rangle$, является искомой группой Фробениуса. Лемма доказана.

Замечание. Доказательство последней леммы повторяет с незначительными изменениями доказательство леммы 2.1 из [14], где тот же самый результат доказан для $G_2(q)$, $q = p^n$, p — нечетное простое число.

Лемма 1.5. *Пусть $G = F_4(q)$, $q = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$, действует на конечной 2-группе V. Тогда для каждого элемента x из G нечетного порядка группа $C_V(x)$ нетривиальна.*

Доказательство. Существуют алгебраическая группа $\widetilde{G}$ над алгебраическим замыканием $\mathbf{F}_q$ и ее эпиморфизм σ такие, что $G = O^{2'}(\widetilde{G}_\sigma)$, где $\widetilde{G}_\sigma$ — централизатор σ в $\widetilde{G}$. Более того, существует максимальный σ-инвариантный тор T группы G, содержащий x.

Без потери общности можно считать, что V — абсолютно неприводимый модуль для G. Поскольку по теореме Стейнберга [15, теоремы 41 и 43] любой такой модуль является тензорным произведением $\widetilde{G}$-модулей, полученных из так называемых базисных модулей применением степеней автоморфизма Фробениуса, можно считать, что V является базисным. Базисные модули для $\widetilde{G}$ описаны Велдкампом в [16]. Из табл. II в [16] следует, что T централизует некоторое ненулевое подпространство в V, и лемма доказана.

Авторы благодарны Франку Любеку, объяснившему одному из них, как применить результаты Велдкампа [16] для нужд настоящей работы.

В последней лемме определяется множество $\mu(G)$.

Лемма 1.6. *Пусть $G = F_4(2^m)$, $m \in \mathbb{N}$ и $m > 1$. Тогда*

$$\mu(G) = \{16, 8(q-1), 8(q+1), 4(q^2-1), 4(q^2+1), 4(q^2-q+1), 4(q^2+q+1), \\ 2(q-1)(q^2+1), 2(q+1)(q^2+1), 2(q^3-1), 2(q^3+1), \\ (q^2-1)(q^2-q+1), (q^2-1)(q^2+q+1), q^4-1, q^4+1, q^4-q^2+1\}.$$

В частности, $\mu_2(G) = \{q^4+1\}$, $\mu_3(G) = \{q^4-q^2+1\}$.

Доказательство. Классы сопряженных элементов группы G найдены Шинодой в [17]. Мы воспользуемся его результатами, чтобы получить порядки элементов в группе G.

2-элементы. Теорема 2.1 из [17] утверждает, что в G содержится 35 классов сопряженных 2-элементов (включая тождественный элемент). В этой же теореме даны их представители. Используя коммутаторную формулу Шевалле, получаем следующее:

x_0 — тождественный элемент;
$x_1, \dots, x_4$ имеют порядок 2;
$x_5, \dots, x_{19}$ имеют порядок 4;
$x_{20}, \dots, x_{30}$ имеют порядок 8;
$x_{31}, \dots, x_{34}$ имеют порядок 16.

$2'$-элементы. Хорошо известно, что каждый $2'$-элемент лежит в некотором максимальном торе группы G. По [17] группа G содержит 25 максимальных торов:

$H(1) \simeq Z_{q-1} \times Z_{q-1} \times Z_{q-1} \times Z_{q-1}$;
$H(2) \simeq Z_{q-1} \times Z_{q-1} \times Z_{q^2-1}$;
$H(3) \simeq Z_{q-1} \times Z_{q-1} \times Z_{q-1} \times Z_{q+1}$;
$H(4) \simeq Z_{q-1} \times Z_{q-1} \times Z_{q+1} \times Z_{q+1}$;
$H(5) \simeq Z_{q^2-1} \times Z_{q-1} \times Z_{q+1}$;
$H(i) \simeq Z_{q-1} \times Z_{q^3-1}$, где $i = 6, \dots, 10$;
$H(11) \simeq H(12) \simeq Z_{q^4-1}$;
$H(13) \simeq H(14) \simeq Z_{q-1} \times Z_{q^3+1}$;
$H(i) \simeq Z_{q+1} \times Z_{q^3-1}$, где $i = 15, \dots, 22$;
$H(23) \simeq Z_{q^4+1}$;
$H(24) \simeq Z_{q^4-q^2+1}$;
$H(25) \simeq Z_{q^2-q+1} \times Z_{q^2-q+1}$.

Поскольку $(q-1, q^3+1) = (q+1, q^3-1) = 1$, торы $H(13)$ и $H(15)$ циклические. Таким образом, максимальными относительно делимости порядками $2'$-элементов G являются q^4-1, q^4+1, $(q-1)(q^3+1)$, $(q+1)(q^3-1)$ и q^4-q^2+1.

Остальные элементы. Используя табл. IV из [17] и информацию о строении централизаторов 2-элементов и $2'$-элементов, мы вычисляем максимальные порядки составных элементов G. Они равны $8(q-1)$, $8(q+1)$, $4(q^2-1)$, $4(q^2+1)$, $4(q^2-q+1)$, $4(q^2+q+1)$, $2(q^3-1)$, $2(q^3+1)$, $2(q+1)(q^2+1)$, $2(q-1)(q^2+1)$. Таким образом, лемма доказана.

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть $G = F_4(q)$, $q = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, и H — конечная группа такая, что $\omega(H) = \omega(G)$.

Из лемм 1.1 и 1.2 следует, что $G \leq \overline{H} = H/K \leq \mathrm{Aut}(G)$ для некоторой нильпотентной нормальной $\pi_1(H)$-подгруппы K из H и группа $\overline{H}/S$ является $\pi_1(H)$-подгруппой. Мы проведем наше доказательство в три этапа.

Предложение 1. *K является элементарной абелевой p-группой, где $p = 2$ или $p = 3$.*

Доказательство. Применяя индукцию по порядку H, можно считать, что K является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого p. Предположим, что $p \neq 2, 3$.

В G существует подгруппа A, изоморфная простой линейной группе $A_3(q)$. Следовательно, в G есть подгруппа Фробениуса с ядром F порядка q^3 и дополнением C порядка $q^3 - 1$ (см. доказательство леммы 3 из [18]). Так как $p \neq 2$ и G проста, имеем $(|F|, |K|) = 1$ и $C_H(K) = K$. Таким образом , из леммы 1.3 следует, что группа H содержит элемент порядка $p(q^3 - 1)$. Используя лемму 1.6, получаем, что p делит $q + 1$.

Вместе с тем G содержит подгруппу B, изоморфную $G_2(q)$. По лемме 1.4 группа $G_2(q)$ содержит подгруппу Фробениуса с ядром F порядка q^2 и дополнением C порядка $q^2 - 1$. По лемме 1.3 группа H содержит элемент порядка $p(q^2-1)$. Используя лемму 1.6, получаем, что p делит либо q^2+1, либо q^2+q+1, либо $q^2 - q + 1$.

Поскольку $q = 2^m$, имеем $(q + 1, q^2 + 1) = (q + 1, q^2 + q + 1) = 1$. Далее, $(q+1, q^2-q+1) = 1$, если $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, и $(q+1, q^2-q+1) = 3$, если $q \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Предложение доказано.

Предложение 2. $K = 1$.

Доказательство. По предложению 1 можно считать, что K является элементарной абелевой p-группой, где $p = 2$ или $p = 3$.

Если $p = 2$, то по лемме 1.5 в H есть элемент порядка $2(q^4 + 1)$, что противоречит лемме 1.6.

Пусть $p = 3$. Группа G/K содержит подгруппу D, изоморфную ${}^2F_4(2)$, которая действует на K сопряжениями в G. Таблица брауэровских 3-характеров группы ${}^2F_4(2)$ из [19] показывает, что элемент $x \in D$ порядка 16 имеет неподвижную точку в любом абсолютно неприводимом модуле над полем характеристики 3. Поэтому x централизует некоторый нетривиальный элемент в K и, следовательно, $48 \in \omega(H)$; противоречие.

Предложение 3. $H = G$.

Доказательство. Итак, $G \leq H \leq \mathrm{Aut}(G)$. Группа $\mathrm{Out}(G)$ — циклическая группа порядка $2m$, и существует графовый автоморфизм σ такой, что его образ в $\mathrm{Out}(G)$ порождает эту группу. Кроме того, $\langle \sigma^2 \rangle$ — группа полевых автоморфизмов G. Эта группа централизует подгруппу F группы G, изоморфную $F_4(2)$. Если σ лежит в H, то в H лежит группа $F\langle \sigma \rangle$, содержащая элемент порядка 32 (см. [20, с. 169]), что противоречит лемме 1.6. Поэтому можно считать, что $\widetilde{H} = H/G$ содержит только полевые автоморфизмы. Так как централизатор C любого полевого автоморфизма содержит подгруппу, изоморфную $F_4(2)$, то $16 \in \omega(C)$. Если $|\widetilde{H}|$ делится на какое-нибудь нечетное число p, то

$16p \in \omega(H)$; противоречие. Значит, $\widetilde{H}$ — циклическая 2-группа, порожденная некоторым полевым автоморфизмом G.

Пусть τ — автоморфизм поля $\mathbf{F}_q$ порядка 2 и t — элемент поля $\mathbf{F}_q$ такой, что $t \neq t^\tau$. Мы будем отождествлять τ и полевой автоморфизм группы G, который он индуцирует. Ясно, что τ как элемент H имеет порядок 2 и его образ $\tilde{\tau}$ — единственная инволюция в $\widetilde{H}$. Пусть $\Pi = \{\alpha_i \mid i = 1, \dots, 4\}$ — система простых корней алгебры Ли F_4 и $x_{\alpha_i}(t)$, $i = 1, \dots, 4$, — соответствующие корневые элементы. Рассмотрим элементы $g = x_{\alpha_1}(t)x_{\alpha_2}(t)x_{\alpha_3}(t)x_{\alpha_4}(t)$ из G и $h = g\tau$ из H. Используя коммутаторную формулу Шевалле, можно проверить, что g имеет порядок 16 и что в канонической записи унипотентного элемента $h^2 \in G$ участвуют $x_{\alpha_1}(t + t^\tau)$, $x_{\alpha_2}(t + t^\tau)$, $x_{\alpha_3}(t + t^\tau)$ и $x_{\alpha_4}(t + t^\tau)$. Поскольку $t \neq 0$ и $t + t^\tau \neq 0$, по [21, предложение 5.1.3] элементы g и h^2 являются регулярными унипотентными элементами, и из [21, предложение 5.1.2] следует, что они имеют одинаковый порядок. Таким образом, элемент h имеет порядок 32. Следовательно, $32 \in \omega(H)$; противоречие. Таким образом, $H = G$, и теорема доказана.

Авторы благодарны Е. П. Вдовину за полезное замечание по оформлению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666.
2. *Shi W.* A characteristic property of $PSL_2(7)$ // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1984. V. 36, N 3. P. 354–356.
3. *Shi W.* A characteristic property of A_5 // J. Southwest-China Teach. Univ. 1986. V. 3. P. 11–14.
4. *Shi W.* A characteristic property of J_1 and $PSL_2(2^n)$ // Adv. Math. 1987. V. 16. P. 397–401.
5. *Brandl R., Shi W.* The characterization of $PSL(2, q)$ by its element orders // J. Algebra. 1994. V. 163, N 1. P. 109–114.
6. *Mazurov V. D.* Characterizations of groups by arithmetic properties // Algebra Colloq. 2004. V. 11, N 1. P. 129–140.
7. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.
8. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
9. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
10. *Алексеева О. А, Кондратьев А. С.* Квазираспознаваемость одного класса конечных простых групп по множеству порядков элементов // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 241–255.
11. *Мазуров В. Д.* Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
12. *Васильев А. В.* Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа G_2 и F_4 // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 6. С. 663–684.
13. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: John Wiley & Sons, 1972.
14. *Васильев А. В.* Распознаваемость групп $G_2(3^n)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 130–142.
15. *Стейнберг Р. В.* Лекции по группам Шевалле. М.: Мир, 1975.
16. *Veldkamp F. D.* Representations of algebraic groups of type F_4 in characteristic 2 // J. Algebra. 1970. V. 16, N 2. P. 326–339.
17. *Shinoda K.* The conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of characteristic 2 // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 1974. V. 21. P. 133–159.
18. *Заварницин А. В.* Порядки элементов в накрытиях групп $L_n(q)$ и распознаваемость знакопеременной группы A_{16}. Новосибирск, 2000. 12 с. (Препринт/НИИДМИ; № 48).

19. *Jansen C., Lux K., Parker R. A., Wilson R. A.* An atlas of Brauer characters. Oxford: Clarendon Press, 1995.
20. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
21. *Carter R. W.* Finite groups of Lie type. New York: John Wiley & Sons, 1985.

Статья поступила 22 сентября 2004 г.

Васильев Андрей Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vasand@math.nsc.ru

Гречкосеева Мария Александровна
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
grechkoseeva@gorodok.net

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
mazurov@math.nsc.ru

Чао Хонг Пин
School of Mathematics
Southwest-China Normal University
Chongqing 400715 P. R. China
caohongping18@hotmail.com

Чен Гуй Юн (Guiyun Chen)
School of Mathematics and Finance
Southwest-China Normal University
Beibei, Chongqing 400715 P. R. China
gychen@swnu.edu.cn

Ши Ву Джи
School of Mathematics
Suzhou University
Suzhou 215006 P. R. China
wjshi@suda.edu.cn