Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 517.54

ПРОДОЛЖЕНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ ВАРИАЦИЮ, И ОБОБЩЕННАЯ СУЩЕСТВЕННАЯ ВАРИАЦИЯ

С. П. Пономарев

Аннотация: Показано, что если отображение, определенное на произвольном подмножестве вещественной прямой со значениями в метрическом пространстве, имеет конечную обобщенную вариацию, то оно может быть продолжено до отображения всей прямой без изменения вариации. Полученный результат используется для характеризации обобщенной существенной вариации.

Ключевые слова: метрическое пространство, обобщенная вариация, обобщенная существенная вариация.

Посвящается Юрию Григорьевичу Решетняку

в связи с его 75-летием

1. Определения и предварительные сведения

Пусть $\mathscr{E}$ — непустое подмножество в $\mathbb{R}$ (на $\mathscr{E}$ рассматриваем ту же стандартную метрику, что и на $\mathbb{R}$), и пусть $P \subset \mathscr{E}$. Для $P \neq \varnothing$ обозначим через $\mathscr{F}(P)$ множество всех конечных систем замкнутых интервалов (возможно, сводящихся к одной точке)

$$S = \big\{[t_1', t_1''], \dots, [t_k', t_k'']\big\}, \tag{1}$$

где $t_i', t_i'' \in P$, $t_i' \leq t_i''$, $1 \leq i \leq k$, и $t_i'' \leq t_{i+1}'$ для $1 \leq i \leq k-1$.

Обозначим через Φ множество всех функций $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, обладающих следующими свойствами:

(a) $\varphi(t) > 0$ для $t > 0$;

(b) $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = \varphi(0) = 0$;

(c) для любых $\varphi \in \Phi$ и $t > 0$

$$\varphi_*(t) := \inf_{\tau \geq t} \varphi(\tau) > 0.$$

Фиксируем $\varphi \in \Phi$, и пусть дано отображение $f : \mathscr{E} \to X$, где $X = (X, d)$ — метрическое пространство. Для каждой $S \in \mathscr{F}(P)$ положим

$$\Delta_\varphi(f, S) = \sum_{i=1}^{k} \varphi\big(d\big(f(t_i'), f(t_i'')\big)\big).$$

Определим φ-вариацию отображения $f : \mathscr{E} \to X$ на $P \subset \mathscr{E}$ обычным образом:

$$V_\varphi(f, P) = \sup\{\Delta_\varphi(f, S) : S \in \mathscr{F}(P)\}. \tag{2}$$

Насколько нам известно, понятие φ-вариации для отображения со значениями в метрическом пространстве детально изучено в [1], где получены основные результаты, в частности теорема о разложении (аналог классической теоремы о разложении Жордана) и принцип выбора Хелли.

Отметим, что в определении (2) мы не предполагаем φ непрерывной на $(0,\infty)$. Кроме того, φ может не быть монотонной, а также мы не требуем, чтобы $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$. Однако непрерывность φ будет предполагаться во всех наших утверждениях, кроме леммы 1.

Заметим, что если $X=\mathbb{R}$ и $\varphi(t)=t$ для $t\ge 0$, то (2) совпадает с вариацией, введенной в [2, гл. 7, § 4].

Ясно, что $V_\varphi(f|P,P)=V_\varphi(f,P)$. В случае $P=\varnothing$ положим $V_\varphi(f,\varnothing)=0$.

В разд. 2 будет доказан первый из основных результатов, а именно теорема 2 о «продолжениях, сохраняющих φ-вариацию».

В разд. 3 будет рассмотрена обобщенная существенная φ-вариация $V_{\varphi\mathfrak{A}}(f,\mathscr{E})$ отображения $f:\mathscr{E}\to X$ относительно семейства $\mathfrak{A}$ подмножеств в $\mathscr{E}$ и доказана теорема 4. Этот, второй из основных результатов, позволяет, в частности, аппроксимировать $V_{\varphi\mathfrak{A}}(f,\mathscr{E})$ обычными φ-вариациями отображений $g:\mathscr{E}\to X$, отличающихся от f только на множествах $A\in\mathfrak{A}$.

В разд. 4 включены некоторые сопутствующие результаты и примеры, касающиеся предположения полноты метрического пространства X.

2. Продолжения, сохраняющие φ-вариацию

Сначала докажем простое вспомогательное утверждение. Аналогичный результат можно найти в [1] (см. лемму 4.1), но мы формулируем его в несколько ином виде, где $\varphi\in\Phi$ может не быть монотонной или непрерывной, и дадим независимое доказательство (хотя неизбежно использующее полноту пространства).

Лемма 1. *Пусть E — непустое подмножество в $\mathbb{R}$ и $X=(X,d)$ — полное метрическое пространство. Пусть $\varphi\in\Phi$. Предположим, что отображение $f:E\to X$ имеет ограниченную φ-вариацию, т. е. $V_\varphi(f,E)<\infty$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(a) *Для любой монотонной последовательности $\{t_n\}$, $t_n\in E$, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}f(t_n)$.*

(b) *Если производное множество E' непусто, то для каждой неизолированной слева (справа) точки $t\in E'$ существует предел $f(t-0)=\lim\limits_{\tau\to t-0}f(\tau)$ (соответственно $f(t+0)=\lim\limits_{\tau\to t+0}f(\tau)$).*

Доказательство. (a) Достаточно рассмотреть возрастающую последовательность $\{t_n\}$. Предположим, что последовательность $\{f(t_n)\}$ расходится. Из полноты X вытекает, что $\{f(t_n)\}$ не является последовательностью Коши. Тогда существуют $\varepsilon>0$ и две строго возрастающие подпоследовательности $\{t_{n'_k}\}$, $\{t_{n''_k}\}$ такие, что

(i) $\forall k\ t_{n'_k}<t_{n''_k}<t_{n'_{k+1}}$,

(ii) $\forall k\ d(f(t_{n'_k}),f(t_{n''_k}))\ge\varepsilon$.

Ввиду (i) промежутки $[t'_k,t''_k]$ попарно дизъюнктны. Поэтому для каждого $m\in\mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{m}\varphi(d(f(t_{n'_k}),f(t_{n''_k})))\le V_\varphi(f,E)<\infty.$$

С другой стороны, согласно (ii) для каждого $m \in \mathbb{N}$ будет

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi(d(f(t_{n'_k}), f(t_{n''_k}))) \geq m\varphi_*(\varepsilon);$$

получаем противоречие с тем, что $\varphi_*(\varepsilon) > 0$.

Доказательство п. (b) аналогично, ибо ясно, что достаточно использовать только монотонные последовательности, так что мы его опускаем. $\square$

Замечание. Такая же техника «монотонных последовательностей» хорошо срабатывает при доказательствах следующих утверждений.

В предположениях леммы 1

(a) *множество $f(E)$ относительно компактно;*

(b) *множество $\Omega_n(f) = \{t \in E : \omega(f,t) > 1/n\}$, где $\omega(f,t)$ — колебание f в точке t, дискретно для каждого $n \in \mathbb{N}$.*

Отсюда немедленно вытекает, что f имеет не более чем счетное множество точек разрыва $\mathscr{D}(f)$ (факт, хорошо известный по крайней мере для $X = \mathbb{R}$ и $\varphi(t) = t$). Под колебанием f в точке $t \in E$ мы понимаем, как обычно, величину

$$\omega(f,t) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{t',t'' \in (t-\delta, t+\delta)\cap E} d(f(t'), f(t'')).$$

В конце разд. 4, используя теорему 2, мы покажем, что $\mathscr{D}(f)$ не более чем счетно также в случае, когда X не является полным.

Теорема 2. *Пусть дано отображение $f : E \to X$, где $X = (X,d)$ — полное метрическое пространство, и E — непустое подмножество в $\mathbb{R}$. Предположим, что существует непрерывная функция $\varphi \in \Phi$ такая, что $V_\varphi(f,E) < \infty$. Тогда существует отображение $g : \mathbb{R} \to X$ со следующими свойствами:*

$$g|E = f \quad \text{и} \quad V_\varphi(g,\mathbb{R}) = V_\varphi(f,E), \tag{3}$$

откуда, в частности, следует, что

$$V_\varphi(g,E) = V_\varphi(g|\mathscr{E},\mathscr{E}) = V_\varphi(f,E) \tag{4}$$

для каждого множества $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}$, $E \subset \mathscr{E}$.

Доказательство. Вначале продолжим f на замыкание $\overline{E}$. Для этого определим отображение $f^* : \overline{E} \to X$, полагая

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } t \in E; \\ f(t-0), & \text{если } t \in \overline{E} \setminus E \text{ и } t \text{ не изолированная слева;} \\ f(t+0) & \text{в ином случае.} \end{cases} \tag{5}$$

Согласно лемме 1 f^* определена. Если производное множество E' пустое, то, очевидно, $f^* = f$.

На следующем шаге покажем, что

$$V_\varphi(f,E) = V_\varphi(f^*,\overline{E}). \tag{6}$$

Фиксируем систему промежутков $S \in \mathscr{F}(\overline{E})$:

$$S = \{[t'_i, t''_i],\ 1 \leq i \leq k\}, \quad t'_i, t''_i \in \overline{E},\ t''_i \leq t'_{i+1}. \tag{7}$$

По лемме 1 и определению f^* для каждого $i = 1, \dots, k$ можно выбрать монотонные последовательности $\{t'_{in},\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t''_{in}\}_{n=1}^{\infty}$, обладающие следующими свойствами:

1) $t'_{in}, t''_{in} \in E$;
2) если $t'_i \in E$ $\big(t''_i \in E\big)$, то $t'_{in} = t'_i$ (соответственно $t''_{in} = t''_i$) для $n \in \mathbb{N}$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} t'_{in} = t'_i$, $\lim\limits_{n\to\infty} t''_{in} = t''_i$, $\lim\limits_{n\to\infty} f\big(t'_{in}\big) = f^*\big(t'_i\big)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f\big(t''_{in}\big) = f^*\big(t''_i\big)$;
4) если $t''_i = t'_{i+1}$ то $t'_{i+1,n} = t''_{in}$ для $n \in \mathbb{N}$.

Тогда существует $\mathscr{N} \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n > \mathscr{N}$ система промежутков $S_n = \big\{\big[t'_{in}, t''_{in}\big],\ 1 \le i \le k\big\}$ будет элементом семейства $\mathscr{F}(E)$ (ср. (1)). Поэтому, принимая во внимание непрерывность φ, можем написать, что

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi\big(d\big(f^*\big(t'_i\big), f^*\big(t''_i\big)\big)\big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \varphi\big(d\big(f\big(t'_{in}\big), f\big(t''_{in}\big)\big)\big) \le V_\varphi(f, E) < \infty. \tag{8}$$

Это будет верно для каждой системы $S \in \mathscr{F}(\overline{E})$, так что $V_\varphi(f^*, \overline{E}) \le V_\varphi(f, E) < \infty$. Поскольку $f^*|E = f$, очевидно обратное неравенство $V_\varphi(f, E) \le V_\varphi(f^*, \overline{E})$, откуда и вытекает (6).

Наконец, продолжим f^* до требуемого отображения $g : \mathbb{R} \to X$, имеющего ту же вариацию, что и f^*, а следовательно, и f. Если $\overline{E} = \mathbb{R}$, то, очевидно, положим $g = f^*$. Пусть $\overline{E} \ne \mathbb{R}$. Для определенности будем считать, что $\mathbb{R} \setminus \overline{E}$ записано в виде

$$\mathbb{R} \setminus \overline{E} = (-\infty, a) \cup \bigcup_{j\in J} (\alpha_j, \beta_j) \cup (b, \infty), \tag{9}$$

где интервалы в (9) смежные с $\overline{E}$ и $J \subset \mathbb{N}$ (разумеется, (9) может содержать один из интервалов $(-\infty, a)$, (b, ∞) или не содержать их вовсе, это не повлияет на рассуждения). Определим $g : \mathbb{R} \to X$, полагая

$$g(t) = \begin{cases} f^*(t), & \text{если } t \in \overline{E}; \\ f^*(a), & \text{если } t \in (-\infty, a); \\ f^*(\alpha_j), & \text{если } t \in (\alpha_j, \beta_j); \\ f^*(b), & \text{если } t \in (b, \infty). \end{cases} \tag{10}$$

Для оценки вариации g на $\mathbb{R}$ возьмем систему замкнутых промежутков S (в виде (1)), где $t'_i, t''_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le k$. Поскольку ввиду (10) g постоянна на интервалах, смежных к $\overline{E}$, легко видеть, что сумма

$$\Delta_\varphi(g, S) = \sum_{i=1}^{k} \varphi\big(d\big(g\big(t'_i\big), g\big(t''_i\big)\big)\big)$$

может быть записана так:

$$\Delta_\varphi(g, S) = \Delta_\varphi(g, \sigma) = \sum_{s=1}^{m} \varphi\big(d\big(g\big(\tau'_s\big), g\big(\tau''_s\big)\big)\big), \tag{11}$$

где система замкнутых промежутков $\sigma = \big\{\big[\tau'_s, \tau''_s\big],\ 1 \le s \le m\big\} \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$ получается из начальной системы S следующим образом. Каждая $t'_i \in (\alpha_j, \beta_j)$ (и также каждая $t''_i \in (\alpha_j, \beta_j)$) заменяется на α_j. Если точка t'_i или t''_i принадлежит $(-\infty, a)$ (или (b, ∞)), то эта точка заменяется точкой a (соответственно точкой b). Заметим, что точки a, b, α_j, β_j $(j \in J)$ содержатся в $\overline{E}$.

Так как $g|\overline{E} = f^*$, из (11) получаем, что

$$\Delta_\varphi(g, S) = \sum_{s=1}^{m} \varphi\big(d\big(f^*\big(\tau'_s\big), f^*\big(\tau''_s\big)\big)\big) \le V_\varphi(f^*, \overline{E}).$$

Отсюда $V_\varphi(g,\mathbb{R}) \le V_\varphi(f^*,\overline{E})$. Поскольку противоположное неравенство тривиально, имеем $V_\varphi(g,\mathbb{R}) = V_\varphi(f^*,\overline{E})$, откуда ввиду (6) вытекает требуемое неравенство (3). Если теперь $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}$ — некоторое множество, содержащее E, то согласно (3) получаем

$$V_\varphi(g,\mathbb{R}) = V_\varphi(f,E) = V_\varphi(g|E,E) = V_\varphi(g,E) \le V_\varphi(g,\mathscr{E}) \le V_\varphi(g,\mathbb{R}),$$

откуда следует (4). $\square$

3. Обобщенная существенная φ-вариация

Введем следующее обозначение: для множества E символом 2^E будем обозначать множество всех подмножеств E.

Пусть $\mathfrak{A}$ — непустое семейство подмножеств $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}$, обладающих свойством

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad 2^A \subset \mathfrak{A}. \tag{12}$$

Пусть $X = (X,d)$ — метрическое пространство. Для $f : \mathscr{E} \to X$ и $\varphi \in \Phi$, определим (обобщенную) существенную φ-вариацию f относительно семейства $\mathfrak{A}$:

$$V_{\varphi\mathfrak{A}}(f,\mathscr{E}) = \inf\{V_\varphi(f,\mathscr{E}\setminus A) : A \in \mathfrak{A}\}. \tag{13}$$

Наша задача — выразить существенную φ-вариацию в терминах «обычной» φ-вариации отображения $g : \mathscr{E} \to X$. Для этого введем еще одно определение. Пусть дано семейство $\mathfrak{A}$, удовлетворяющее (12). Тогда для каждого $f : \mathscr{E} \to X$ и каждого $\varphi \in \Phi$ положим

$$\mathfrak{A}(f) = \{g : \mathscr{E} \to X : \{t \in \mathscr{E} : f(t) \ne g(t)\} \in \mathfrak{A}\} \tag{14}$$

и определим

$$W_{\varphi\mathfrak{A}}(f,\mathscr{E}) = \inf\{V_\varphi(g,\mathscr{E}) : g \in \mathfrak{A}(f)\}. \tag{15}$$

Из предыдущих определений непосредственно вытекает, что $V_{\varphi\mathfrak{A}}(f,\mathfrak{A}) = V_\varphi(f,\mathscr{E})$, если $\mathfrak{A} = \{\varnothing\}$, и $V_{\varphi\mathfrak{A}}(f,\mathscr{E}) = 0$, если $\mathscr{E} \in \mathfrak{A}$ (т. е. если $\mathfrak{A} = 2^{\mathscr{E}}$). Далее, если $\mathfrak{A} = \{\varnothing\}$, то, очевидно, $W_{\varphi\mathfrak{A}}(f,\mathscr{E}) = V_\varphi(f,\mathscr{E})$. В случае $\mathfrak{A} = 2^{\mathscr{E}}$ множество $\mathfrak{A}(f)$ состоит из всех отображений $g : \mathscr{E} \to X$, поэтому $W_{\varphi\mathfrak{A}}(f,\mathscr{E}) = 0$.

Наш следующий основной результат (теорема 4) дает достаточные условия, при которых выполняется равенство

$$V_{\varphi\mathfrak{A}}(f,\mathscr{E}) = W_{\varphi\mathfrak{A}}(f,\mathscr{E}). \tag{16}$$

Ясно, что (16) очевидно в каждом из «экстремальных» случаев $\mathfrak{A}$, которые мы только что рассмотрели, независимо от выбора $\varphi \in \Phi$.

Напомним также, что понятие существенной вариации для функций $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ относительно σ-идеала $\mathfrak{A}$, состоящего из множеств нулевой лебеговой меры, изучалось в [3, 4]. Заметим, что семейство $\mathfrak{A}$, введенное соотношением (12), может не быть идеалом, хотя, конечно, каждый σ-идеал $\mathfrak{A}$ подмножеств $\mathscr{E}$ обладает свойством (12).

Лемма 3. *Для* $X = (X,d)$, $f : \mathscr{E} \to X$, $\mathfrak{A}$ *и* $\varphi \in \Phi$ *имеет место следующее неравенство:*

$$V_{\varphi\mathfrak{A}}(f,\mathscr{E}) \le W_{\varphi\mathfrak{A}}(f,\mathscr{E}). \tag{17}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $W_{\varphi\mathfrak{A}}(f,\mathscr{E}) < \infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Существует $g_\varepsilon : \mathscr{E} \to X$ такое, что

$$W_{\varphi\mathfrak{A}}(f,\mathscr{E}) + \varepsilon \ge V_\varphi(g_\varepsilon,\mathscr{E}) \tag{18}$$

и $A_\varepsilon = \{t \in \mathscr{E} : f(t) \neq g_\varepsilon(t)\} \in \mathfrak{A}$.

Так как $f|\mathscr{E} \setminus A_\varepsilon = g|\mathscr{E} \setminus A_\varepsilon$, очевидно, имеем

$$V_\varphi(g_\varepsilon, \mathscr{E}) \geq V_\varphi(g_\varepsilon, \mathscr{E} \setminus A_\varepsilon) = V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus A_\varepsilon) \geq V_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}). \tag{19}$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ из (18), (19) без труда следует, что

$$V_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) \leq W_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) < \infty. \qquad \square \tag{20}$$

Теорема 4. *Пусть дано отображение $f : \mathscr{E} \to X$, где $\mathscr{E}$ — произвольное непустое подмножество $\mathbb{R}$ и $X = (X, d)$ — полное метрическое пространство. Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство подмножеств $\mathscr{E}$, удовлетворяющее условию* (12). *Тогда для каждой непрерывной функции $\varphi \in \Phi$ выполнено равенство* (16), *т. е.*

$$V_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) = \inf\{V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus A) : A \in \mathfrak{A}\} = \inf\{V_\varphi(g, \mathscr{E}) : g \in \mathfrak{A}(f)\} = W_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}). \tag{21}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $W_{\varphi\mathscr{E}}(f, \mathscr{E}) < \infty$. Тогда согласно (17)

$$V_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) \leq W_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) < \infty. \tag{22}$$

Для доказательства обратного неравенства $W_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) \leq V_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E})$ используем теорему 2, принимая во внимание полноту X и непрерывность φ. Пусть снова дано $\varepsilon > 0$. Согласно (13), (22) найдется $A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$ такое, что

$$-\varepsilon + V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus A_\varepsilon) \leq V_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) < \infty. \tag{23}$$

Положим $E = \mathscr{E} \setminus A_\varepsilon$. Применяя теорему 2 к $f|E$, заключаем, что существует $g_\varepsilon : \mathscr{E} \to X$ такое, что $g_\varepsilon|E = f|E$ и

$$V_\varphi(g_\varepsilon, \mathscr{E}) = V_\varphi(f|E, E) = V_\varphi(f, E). \tag{24}$$

Поскольку

$$B_\varepsilon = \{t \in \mathscr{E} : g_\varepsilon(t) \neq f(t)\} \subset A_\varepsilon \in \mathfrak{A},$$

имеем $B_\varepsilon \in \mathfrak{A}$, откуда $g_\varepsilon \in \mathfrak{A}(f)$. Тогда из (23), (24) и (15) вытекает, что

$$W_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) \leq V_\varphi(g_\varepsilon, \mathscr{E}) = V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus A_\varepsilon) \leq V_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) + \varepsilon,$$

так что $W_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) \leq V_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E})$. Тем самым мы доказали, что (21) выполняется при $W_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) < \infty$.

Пусть теперь $W_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) = \infty$. Это означает, что

$$\forall g \in \mathfrak{A}(f) \quad V_\varphi(g, \mathscr{E}) = \infty. \tag{25}$$

Покажем, что в этом случае для каждого $A \in \mathfrak{A}$ будет $V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus A) = \infty$. Действительно, допустим, что это не так. Тогда найдется $A_0 \in \mathfrak{A}$ такое, что $V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus A_0) < \infty$. По теореме 2 существует $g_0 : \mathscr{E} \to X$ такое, что $g_0|\mathscr{E} \setminus A_0 = f|\mathscr{E} \setminus A_0$ и

$$V_\varphi(g_0, \mathscr{E}) = V_\varphi(f|\mathscr{E} \setminus A_0, \mathscr{E} \setminus A_0) = V_\varphi(f, \mathscr{E} \setminus A_0) < \infty. \tag{26}$$

Поскольку $\{t \in \mathscr{E} : g_0(t) \neq f(t)\} \subset A_0 \in \mathfrak{A}$, то $g_0 \in \mathfrak{A}(f)$. Тогда из (26) вытекает, что $W_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) < \infty$; противоречие с (25). Это показывает, что

$$W_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) = \infty \Longrightarrow V_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) = \infty,$$

чем завершается доказательство теоремы 4. $\square$

4. О предположении полноты пространства X

Хотя в определениях (13) и (15) не предполагалась полнота пространства X, теорема 4 в отсутствие полноты X, вообще говоря, неверна. Прежде чем показать это, сделаем необходимые замечания, касающиеся случая, когда X неполное.

Обозначим через $\widehat{X}$ пополнение X, и пусть $\theta : X \to \widehat{X}$ — изометрическое вложение. Отметим, что φ-вариация (2) инвариантна относительно изометрий X, т. е. если $j : X \to Y$ — изометрия, то $V_\varphi(f, \mathscr{E}) = V_\varphi(j \circ f, \mathscr{E})$ для $f : \mathscr{E} \to X$. Итак, не уменьшая общности, можно считать, что $X \subset \widehat{X}$ (заменяя при необходимости X на $\theta(X)$). Будем в дальнейшем отождествлять $f : \mathscr{E} \to X$ с $\hat{f} = i \circ f$, где $i : X \to \widehat{X}$ — естественное вложение $i(x) = x$, что не приведет к недоразумениям. Для $f : \mathscr{E} \to X$, семейства $\mathfrak{A}$ подмножеств $\mathscr{E}$ (см. (12)) и $\varphi \in \Phi$ определим

$$\widehat{V}_\varphi(f, \mathscr{E}), \quad \widehat{V}_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}), \quad \widehat{\mathfrak{A}}(f), \quad \widehat{W}_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E})$$

точно так же, как в (2), (13)–(15), «крышечка» ставится для указания того факта, что объекты рассматриваются в $\widehat{X}$. Например, определение $\widehat{\mathfrak{A}}(f)$ получается заменой X в (14) на $\widehat{X}$.

Для данных $f : \mathscr{E} \to X$, $\varphi \in \Phi$ и семейства $\mathfrak{A}$ (12), очевидно, имеем $V_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) = \widehat{V}_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E})$.

Если $\varphi \in \Phi$ непрерывна, то по теореме 4 получаем

$$\widehat{V}_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) = \widehat{W}_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}).$$

Легко проверить, что $\mathfrak{A}(f) \subset \widehat{\mathfrak{A}}(f)$ для каждых $\mathfrak{A}$ и $f : \mathscr{E} \to X$. Отсюда

$$\widehat{W}_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) \le W_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}). \tag{27}$$

Итак, мы показали, что для любого пространства X, любой непрерывной $\varphi \in \Phi$, каждого семейства $\mathfrak{A}$ и каждой $f : \mathscr{E} \to X$ имеют место соотношения (см. (17))

$$V_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) = \widehat{V}_{\varphi,\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) = \widehat{W}_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}) \le W_{\varphi\mathfrak{A}}(f, \mathscr{E}). \tag{28}$$

Если X полное, то в последнем из соотношений (28), т. е. в (27), очевидно, выполнено равенство. Вместе с тем равенство может быть и в случае неполного пространства. Это легко увидеть из следующего примера.

Пример 1. Пусть $\mathscr{E} = [0, 1]$, $\mathfrak{A} = \{\{1\}, \varnothing\} (= 2^{\{1\}})$, $X = [0, 1)$ снабжено стандартной метрикой $d(x, y) = |x - y|$ и $\varphi(t) = t$. Рассмотрим $f : [0, 1] \to X$, определенную соотношением

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0, 1); \\ 0, & \text{если } t = 1. \end{cases} \tag{29}$$

Пространство X, очевидно, не полное. Легко проверить, что $V_\varphi(f, [0, 1]) = 2$ и $V_{\varphi\mathfrak{A}}(f, [0, 1]) = 1$. Множество $\mathfrak{A}(f)$ состоит из всех отображений $g : [0, 1] \to [0, 1)$ таких, что $g(t) = f(t) = t$ для $t \in [0, 1)$, откуда легко вывести, что $W_{\varphi\mathfrak{A}}(f, [0, 1]) = 1 = V_{\varphi\mathfrak{A}}(f, [0, 1])$, т. е. (21) выполнено.

Следующий пример, однако, показывает, что предположение полноты в теореме 4, вообще говоря, не может быть опущено.

Пример 2. Пусть $\mathscr{E} = [0,1]$, $\mathfrak{A} = 2^{\mathscr{C}}$, где $\mathscr{C}$ — классическое канторово троичное множество. Пусть $X = [0,1] \setminus \mathscr{C}$ снабжено стандартной метрикой $d(x,y) = |x-y|$. Положим также $\varphi(t) = t$.

Рассмотрим $f : [0,1] \to X$, определенную следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in X; \\ 0, & \text{если } t \in \mathscr{C}. \end{cases} \tag{30}$$

Метрическое пространство X, очевидно, не полное, и легко проверить, что $V_\varphi(f,[0,1]) = \infty$, тогда как $V_{\varphi\mathfrak{A}}(f,[0,1]) \le V_\varphi(f,[0,1] \setminus \mathscr{C}) = 1$ (в действительности $V_{\varphi\mathfrak{A}}(f,[0,1]) = 1$, но это нам не потребуется).

Покажем, что $W_{\varphi\mathfrak{A}}(f,[0,1]) = \infty$. Предположим противное. Тогда существует $g : [0,1] \to X$ такое, что

$$\{t \in [0,1] : g(t) \ne f(t)\} \subset \mathscr{C} \tag{31}$$

и

$$V_\varphi(g,[0,1]) < \infty. \tag{32}$$

Пусть $t_0 \in \mathscr{C}$ — точка непрерывности g, $0 < t_0 < 1$ (существование такой точки, очевидно, следует из (32)). Так как $g(t_0) \in X = [0,1] \backslash C$, имеем $g(t_0) \ne t_0$. Без потери общности можно считать, что $g(t_0) < t_0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условиям:

(i) $3\varepsilon < t_0 - g(t_0)$,

(ii) $[g(t_0) - \varepsilon, g(t_0) + \varepsilon] \subset (a,b)$, где $(a,b) \subset X$ — интервал, смежный с $\mathscr{C}$.

Ввиду непрерывности g в t_0 найдется δ, $0 < \delta < \varepsilon$, такое, что

$$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \quad g(t) < g(t_0) + \varepsilon < c_0 - \varepsilon < t_0 - \delta < t. \tag{33}$$

Можно также считать, что t_0 не является концевой точкой какого-либо интервала, смежного с $\mathscr{C}$. Пусть $\{(a_n, b_n), n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность интервалов, смежных с $\mathscr{C}$, таких, что $(a_n, b_n) \subset (c_0 - \delta, c_0 + \delta)$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n < a_{n+1}$ и $a_n \to t_0$. Поскольку $a_n \in \mathscr{C}$, из (33) вытекает, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g(a_n) < g(t_0) + \varepsilon. \tag{34}$$

Фиксируем некоторую последовательность $\{c_n\}$ такую, что $c_n \in (a_n, b_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $c_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому ввиду (33), (31) получаем

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g(c_n) = f(c_n) = c_n > t_0 - \varepsilon. \tag{35}$$

Интервалы в семействе $\{[a_n, c_n],\ n \in \mathbb{N}\}$ попарно дизъюнктны, и из (34), (35) немедленно следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} |g(c_k) - g(a_k)| = \sum_{k=1}^{n} g(c_k) - g(a_k) > n(t_0 - g(t_0) - 2\varepsilon) > \frac{n}{3}(t_0 - g(t_0)) > 0, \tag{36}$$

откуда заключаем, что $V_\varphi(g,[0,1]) = \infty$; противоречие с (32). Тем самым доказано, что для f и $\mathfrak{A}$ в нашем примере имеем

$$V_{\varphi\mathfrak{A}}(f,[0,1]) \le 1 < W_{\varphi\mathfrak{A}}(f,[0,1]) = \infty.$$

В завершение докажем утверждение, являющееся, по существу, следствием замечания и теоремы 2 из разд. 2.

Теорема 5. *Пусть дана* $f : \mathscr{E} \to X$, *где* $X = (X, d)$ — *метрическое пространство, полное или нет. Допустим, что есть* $\varphi \in \Phi$ *такая, что* $V_\varphi(f, \mathscr{E}) < \infty$. *Тогда множество* $\mathscr{D}(f)$ *точек разрыва* f *не более чем счетно.*

Доказательство. Утверждение верно для полного X, как отмечено в замечании из разд. 2. Допустим, что X не полное, и пусть $\widehat{X}$ — его пополнение. Как в начале разд. 4, можно считать, что $X \subset \widehat{X}$, и отождествлять f с $\hat{f} = i \circ f$. По теореме 2 найдется отображение $g : \mathbb{R} \to \widehat{X}$ такое, что $g|\mathscr{E} = f$ и $V_\varphi(g, \widehat{X}) = V_\varphi(f, \mathscr{E})$. Пространство $\widehat{X}$ полное, множество $\mathscr{D}(g)$ точек разрыва g не более чем счетно, поэтому таким будет и $\mathscr{D}(f) \subset \mathscr{D}(g)$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chistyakov V. V., Galkin O. E.* Mappings of bounded Φ-variation with arbitrary function Φ // J. Dynam. Control Systems. 1998. V. 4, N 2. P. 217–247.
2. *Saks S.* Theory of the integral. Warszawa: Monografie Matematyczne, 1937.
3. *Orlicz W.* On functions of finite variation depending on a parameter // Studia Math. 1953. V. 13. P. 218–232.
4. *Cybertowicz Z., Matuszewska W.* Functions of bounded generalized variation // Ann. Soc. Math. Polonae. Ser. I: Comment. Math. 1977. V. 20. P. 29–52.

Статья поступила 25 декабря 2003 г.

Пономарев Станислав Петрович
Institute of Mathematics, Pedagogical University,
Arciszewskiego 22b, 76-200 Slupsk, Poland
stapon@pap.edu.pl