Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 512.55

ЭНДОМОРФИЗМЫ СВОБОДНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР ЛИ, СОХРАНЯЮЩИЕ ОРБИТЫ

И. В. Чирков, М. А. Шевелин

Аннотация: Доказано, что эндоморфизм свободной метабелевой алгебры Ли ранга 2 над бесконечным полем, сохраняющий автоморфную орбиту ненулевого элемента, является автоморфизмом. Над конечными полями построены контрпримеры.

Ключевые слова: Свободная метабелева алгебра Ли, примитивный элемент, группа автоморфизмов, эндоморфизм, автоморфная орбита элемента.

§ 1. Введение

В 1994 г. В. Шпильрайн сформулировал следующую задачу: верно ли, что эндоморфизм свободной группы конечного ранга, переводящий каждый примитивный элемент в примитивный, является автоморфизмом [1, problem 2] (эта задача поставлена и на сайте http://www.grouptheory.org, вопрос F3). Сам В. Шпильрайн [2] решил эту задачу для свободной группы ранга 2. В той же работе он доказал, что эндоморфизм свободной группы ранга 2, сохраняющий нетривиальную автоморфную орбиту, является автоморфизмом. Почти одновременно аналогичные результаты получил С. Иванов [3]. В работе [4] Ли полностью решена задача В. Шпильрайна, а в работе [5] доказано, что эндоморфизм свободной группы произвольного конечного ранга, сохраняющий нетривиальную автоморфную орбиту, является автоморфизмом. Аналогичный вопрос для свободных метабелевых групп рассматривался в совместной работе Ч. К. Гупты и Е. И. Тимошенко [6], где доказан более общий результат, из которого следует, что любой эндоморфизм свободной метабелевой группы ранга 2, сохраняющий примитивные элементы, является автоморфизмом. Затем тот же вопрос для произвольного конечного ранга был поставлен Е. И. Тимошенко в «Коуровской тетради» издания 1999 г. под номером 14.85, а позже, в новом издании «Коуровской тетради» 2002 г., он был сформулирован как совместный вопрос Е. И. Тимошенко и В. Шпильрайна.

Для свободной алгебры Ли конечного ранга над полем характеристики 0 и свободной p-алгебры Ли конечного ранга над полем характеристики $p > 0$ А. А. Золотых и А. А. Михалев в [7] доказали, что эндоморфизм такой алгебры, сохраняющий автоморфную орбиту примитивного элемента, является автоморфизмом. В работе [8] тех же авторов аналогичные утверждения доказаны для свободных (цветных) супералгебр Ли конечного ранга.

Недавно Е. И. Тимошенко задал вопрос: верно ли, что если некоторый эндоморфизм α свободной метабелевой алгебры Ли ранга 2 сохраняет орбиту ненулевого элемента этой алгебры, то α есть автоморфизм?

В настоящей работе мы показываем, что ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный, однако он положительный в случае бесконечного основного поля.

Введем некоторые обозначения. Пусть K — произвольное поле. Через F_2 обозначим свободную метабелеву алгебру Ли над полем K с порождающими x_1 и x_2, через A — группу автоморфизмов алгебры F_2. Алгебру многочленов от неизвестных $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ над K обозначим через P_2. Эта алгебра изоморфна универсальной обертывающей алгебре $U(F_2/F_2')$ и поэтому, она естественно действует на коммутанте F_2'. Сам коммутант как модуль над алгеброй P_2 порожден одним элементом $c = [x_1, x_2]$ и не имеет кручения [9, 10]. Действие алгебры P_2 на пространстве F_2' обозначаем нижней точкой, например, $c.\bar{x}_1 = [[x_1, x_2], x_1]$, $c.\bar{x}_1\bar{x}_2^2 = [[[[x_1, x_2], x_1], x_2], x_2]$ и т. д. Обычное действие группы $GL_2(K)$ на P_2 при помощи линейных замен неизвестных мы обозначаем через u^λ для $u \in P_2$, $\lambda \in GL_2(K)$. Для того чтобы определить эндоморфизм α свободной метабелевой алгебры Ли F_2, достаточно указать образы y_1 и y_2 под действием этого эндоморфизма порождающих элементов x_1 и x_2. В этой ситуации мы пишем $(x_1, x_2)\alpha = (y_1, y_2)$. Элемент $y \in F_2$ называется *примитивным* тогда и только тогда, когда найдется такой элемент $z \in F_2$, что пара y, z есть множество свободных порождающих алгебры F_2. Группа A содержит подгруппу невырожденных линейных замен порождающих, изоморфную $GL_2(K)$, и для каждого автоморфизма $\sigma \in A$ можно подобрать такую невырожденную замену порождающих λ, что автоморфизм, индуцированный элементом $\lambda\sigma$ на фактор-алгебре F_2/F_2', тривиален. Поэтому группа A есть расщепляемое расширение своей нормальной подгруппы IA автоморфизмов, индуцирующих тождественное отображение на факторе по коммутанту, при помощи группы $GL_2(K)$, при этом подгруппа IA действует на элементах коммутанта тождественно. Это обстоятельство позволяет просто находить орбиты. Для дальнейших ссылок отметим (см. [9]), что каждый автоморфизм $\sigma \in A$, действующий тождественно на фактор-алгебре F_2/F_2', определен следующим правилом:

$$(x_1, x_2)\sigma = (x_1 + c.u\bar{x}_1, x_2 + c.u\bar{x}_2), \quad u \in P_2. \tag{1}$$

Отсюда и из предыдущего замечания следует, что каждый примитивный элемент алгебры F_2 может быть записан в виде

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + c.(\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2)v, \tag{2}$$

где λ_1, λ_2 — не равные нулю одновременно элементы поля K, $v \in P_2$.

Еще одно очевидное замечание, которым мы все время будем пользоваться, состоит в том, что в нашей ситуации эндоморфизм α можно заменить эндоморфизмом $\sigma\alpha\tau$ $(\sigma, \tau \in A)$.

§ 2. Случай конечного поля

Сначала приведем пример, показывающий, что над конечными полями ответ на вопрос Е. И. Тимошенко отрицательный.

Предложение 1. *Пусть K — конечное поле, F_2 — свободная метабелева алгебра Ли над полем K. Элемент $w \in P_2$ зададим следующим равенством:*

$$w = \prod_{\varkappa \in K} (\bar{x}_1 + \varkappa\bar{x}_2).$$

Рассмотрим элемент $g = x_1 \in F_2$ *и эндоморфизм* α *такой, что* $(x_1, x_2)\alpha = (x_1 + c.\bar{x}_1, x_2 + c.\bar{x}_2(1 - w))$.

Тогда

1) α *сохраняет орбиту* gA,

2) α *не является автоморфизмом.*

Доказательство. П. 2 следует из формулы (1). Докажем п. 1. Орбита элемента x_1 состоит из элементов вида (см. (2))

$$h = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + c.(\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2)v,$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ не равны нулю одновременно, $v \in P_2$. Образ h под действием α выглядит, как можно проверить, следующим образом:

$$h\alpha = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + c.(\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 - \lambda_2 \bar{x}_2 w + (\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2)(1 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 w)v).$$

Элемент $h\alpha$ примитивен, поскольку (см. (2)) при любых $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, не равных нулю одновременно, справедливо сравнение $\bar{x}_2 w \equiv 0 \bmod (\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2)$. Предложение доказано.

§ 3. Произвольное поле

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство эндоморфизмов, сохраняющих нетривиальные автоморфные орбиты.

Лемма. *Пусть* K *— произвольное поле и* α *— эндоморфизм алгебры* F_2, *сохраняющий автоморфную орбиту ненулевого элемента* $g \in F_2$ *и такой, что*

$$(x_1, x_2)\alpha = (\lambda_{11} x_1 + \lambda_{21} x_2 + c.w_1, \lambda_{12} x_1 + \lambda_{22} x_2 + c.w_2),$$

где $\lambda_{ij} \in K$ $(i, j \in \{1, 2\})$, $w_i \in P_2$ $(i = 1, 2)$. *Тогда строчки* $(\lambda_{11}, \lambda_{12})$ *и* $(\lambda_{21}, \lambda_{22})$ *линейно независимы.*

Доказательство. Если бы это было не так, то в случае, когда обе строчки нулевые, быстро получается противоречие. Далее, пользуясь замечанием, сделанным во введении, можем считать, что $(x_1, x_2)\alpha = (x_1 + c.w_1, c.w_2)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $g = c.u \in F_2'$ $(0 \neq u \in P_2)$. Подействуем на g эндоморфизмом α:

$$(c.u)\alpha = [x_1 + c.w_1, c.w_2].u_1 = -c.\bar{x}_1 w_2 u_1 = -[[x_1, x_2], x_1].w_2 u_1.$$

Здесь $u_1 \in P_2$ — некоторый многочлен. Потом на полученный элемент подействуем перестановкой $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$, получим $[[x_1, x_2], x_2].w$ $(w \in P_2)$. После этого снова подействуем α. Так как α переводит x_2 в коммутант F_2', под действием α последний элемент переходит в 0. С другой стороны, по условию леммы попадем в орбиту gA. Поскольку автоморфные орбиты ненулевых элементов не могут содержать 0, получаем противоречие.

Случай 2. $g \notin F_2'$. Действуя на g некоторой линейной заменой порождающих, можем предполагать, что $g = x_2 + c.u$ $(u \in P_2)$. Образ этого элемента под действием α попадает в F_2', что сводится к первому случаю. Лемма доказана.

Предложение 2. *Пусть* K *— произвольное поле. Если* $0 \neq g \in F_2'$ *и для некоторого эндоморфизма* α *алгебры* F_2 *справедливо включение* $gA\alpha \subseteq gA$, *то* $\alpha \in A$.

Доказательство сразу следует из описания тестовых элементов алгебры F_2 [11].

§ 4. Бесконечное поле

Следующее предложение — аналог теоремы А. А. Золотых и А. А. Михалева для свободных алгебр Ли [7] в случае ранга 2. Как следует из предложения 1, для конечных полей такого аналога не существует.

Предложение 3. *Пусть K — бесконечное поле, $g \in F_2$ — примитивный элемент. Если для некоторого эндоморфизма α алгебры F_2 будет $gA\alpha \subseteq gA$, то α — автоморфизм.*

Доказательство. Можем считать, что $g = x_1$, α тождественный по модулю коммутанта, т. е. $(x_1, x_2)\alpha = (x_1 + c.w_1, x_2 + c.w_2)$, где $w_1, w_2 \in P_2$. Орбита элемента x_1 состоит из всех примитивных элементов алгебры F_2, т. е. из элементов вида $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + c.(\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2)v$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ не равны нулю одновременно, $v \in P_2$. Поскольку образы x_1 и x_2 примитивны, то $w_1 = w_1' \bar{x}_1$, а $w_2 = w_2' \bar{x}_2$ (см. (2)).

Возьмем произвольный элемент $h = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + c.(\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2)v \in gA$. Подействуем на h эндоморфизмом α:

$$\begin{aligned} h\alpha &= \lambda_1(x_1 + c.\bar{x}_1 w_1') + \lambda_2(x_1 + c.\bar{x}_2 w_2') + c.(1 + \bar{x}_1\bar{x}_2(w_2' - w_1'))(\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2)v \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + c.(\lambda_1\bar{x}_1 w_1' + \lambda_2\bar{x}_2 w_2' + (1 + \bar{x}_1\bar{x}_2(w_2' - w_1'))(\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2)v). \end{aligned}$$

Поскольку этот элемент примитивен, многочлен

$$\lambda_1\bar{x}_1 w_1' + \lambda_2\bar{x}_2 w_2' = \lambda_1\bar{x}_1(w_1' - w_2') + (\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2)w_2'$$

делится на $\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2$ (см. (2)). В частности, при всех $\lambda_1 \neq 0$ многочлен $\bar{x}_1(w_1' - w_2')$ делится на $\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2$. Так как поле K бесконечно, это возможно только в том случае, когда $w_1' = w_2'$. Из этого следует (см. (1)), что α — автоморфизм.

Предложение 4. *Пусть K — бесконечное поле, F_2 — свободная метабелева алгебра Ли над полем K. Пусть g — элемент F_2, не лежащий в коммутанте. Допустим, что эндоморфизм α алгебры F_2 сохраняет орбиту g относительно группы автоморфизмов A, $gA\alpha \subseteq gA$. Тогда α — автоморфизм.*

Доказательство. По лемме линейная часть α невырожденна. Изменив α на линейный автоморфизм, считаем, что $(x_1, x_2)\alpha = (x_1 + c.w_1, x_2 + c.w_2)$, $(w_1, w_2 \in P_2)$. Возьмем вместо g, если нужно, некоторый элемент его орбиты gA и далее считаем, что $g = x_1 + c.u$ $(u \in P_2)$. Вычисляя орбиту gA, видим, что произвольный ее элемент имеет вид

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + c.(|\lambda| u^\lambda + (\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2)v).$$

Здесь $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \in GL_2(K)$, $v \in P_2$. Под действием α это переходит в

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + c.(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) + c.(1 + w_1\bar{x}_2 - w_2\bar{x}_1)(|\lambda| u^\lambda + (\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2)v).$$

Стало быть, чтобы орбита gA сохранялась эндоморфизмом α, необходимо и достаточно, чтобы для каждых $\lambda \in GL_2(K)$ и $v \in P_2$ существовали такие $\mu \in GL_2(K)$ и $v_1 \in P_2$, для которых выполнялось равенство

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + c.(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) + c.(1 + w_1\bar{x}_2 - w_2\bar{x}_1)(|\lambda| u^\lambda + (\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2)v) \\ = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + c.(|\mu| u^\mu + (\mu_1\bar{x}_1 + \mu_2\bar{x}_2)v_1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что первая строчка матрицы μ совпадает с первой строчкой матрицы λ. Поэтому условия предложения можно переформулировать так.

Пусть заданы такие многочлены $u, w_1, w_2 \in P_2$, что для каждой невырожденной матрицы $\lambda \in GL_2(K)$ с первой строчкой (λ_1, λ_2) и каждого многочлена $v \in P_2$ найдутся такая невырожденная матрица $\mu \in GL_2(K)$ с той же первой строчкой, что и у λ, и такой многочлен $v_1 \in P_2$, что

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + (|\lambda| u^\lambda + (\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2) v)(1 + w_1 \bar{x}_2 - w_2 \bar{x}_1) = |\mu| u^\mu + (\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2) v_1. \tag{3}$$

Нам нужно проверить, что $w_1 \bar{x}_2 - w_2 \bar{x}_1 = 0$. Тем самым (см. (1)) мы докажем, что α — автоморфизм.

Подставим в равенство (3) вместо λ единичную матрицу. Получим, что

$$w_1 + (1 + w_1 \bar{x}_2) u \equiv 0 \bmod (\bar{x}_1).$$

Рассмотрим образы многочленов w_1 и u в фактор-алгебре $P_2/\bar{x}_1 P_2$.

Если $w_1 \not\equiv 0 \bmod (\bar{x}_1)$, то степень второго слагаемого в левой части последнего сравнения (как многочлена из $K[\bar{x}_2] \cong P_2/\bar{x}_1 P_2$) строго больше степени первого слагаемого, что невозможно. Это означает, что $w_1 = \bar{x}_1 w_1'$ для некоторого $w_1' \in P_2$. Аналогично, подставив в (3) вместо λ матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, получим сравнение

$$w_2 - (1 + w_2 \bar{x}_1) u^\lambda \equiv 0 \bmod (\bar{x}_2),$$

из которого следует, что $w_2 = \bar{x}_2 w_2'$ для некоторого $w_2' \in P_2$.

Рассмотрим эндоморфизм $\beta = \alpha\tau$, где τ — автоморфизм, заданный правилом

$$(x_1, x_2)\tau = (x_1 - c.w_2' \bar{x}_1, x_2 - c.w_2' \bar{x}_2).$$

Понятно, что β, во-первых, сохраняет орбиту gA, во-вторых, является или не является автоморфизмом вместе с α и, в-третьих, является автоморфизмом тогда и только тогда, когда $w_1' - w_2' = 0$. Действительно, $(x_1, x_2)\beta = (x_1 - c.w\bar{x}_1, x_2)$, где $w = w_1' - w_2'$. Далее считаем, что $\alpha = \beta$.

Пусть $u = u_1 + \bar{x}_1 u_2$, где $u_1 \in P_2$ — многочлен только от $\bar{x}_2$. Рассмотрим автоморфизм σ такой, что $(x_1, x_2)\sigma = (x_1 - c.\bar{x}_1 u_2, x_2 - c.\bar{x}_2 u_2)$. Очевидно, $g\sigma = (x_1 + c.u)\sigma = x_1 - c.\bar{x}_1 u_2 + c.u = x_1 + c.u_1$. Заметим, что вместо g можно брать произвольный элемент орбиты gA, в частности $g\sigma$. Это позволяет считать, что u зависит только от $\bar{x}_2$.

Перепишем (3), учитывая эти замечания и полагая $v = 0$, $\lambda = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(t \in K)$:

$$w\bar{x}_1 + u - |\mu| u^\mu \equiv -uw\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bmod (\bar{x}_1 + t\bar{x}_2). \tag{4}$$

При этом в сравнении (4) многочлен w один и тот же при любых $t \in K$.

Для фиксированного t можно перейти к новым неизвестным $y = \bar{x}_1 + t\bar{x}_2$, $z = x_2$ и сравнение (4) рассмотреть как равенство многочленов из $K[z] \cong K[y,z]/(y)$.

Если $u = 0$, то $w \equiv 0 \bmod (y)$.

Пусть $u \neq 0$, $t \neq 0$ и $w \not\equiv 0 \bmod (y)$. Пусть $a = \deg u$ и b равно степени образа многочлена w в $K[z]$. Тогда образ в $K[z]$ левой части сравнения (4) имеет степень, не превосходящую $\max\,\{b+1, a\}$, а степень образа правой части равна $a + b + 2$. Эти числа строго различны; противоречие. Поэтому $w \equiv$

$0 \bmod (\bar{x}_1 + t\bar{x}_2)$ для всех ненулевых $t \in K$. Поле K бесконечно, тем самым $w = 0$, что и требовалось.

Из предложений 2 и 4 получается

Следствие. *Пусть K — бесконечное поле, F_2 — свободная метабелева алгебра Ли ранга 2 над полем K, A — группа автоморфизмов алгебры F_2, $g \in F_2$ — ненулевой элемент. Если эндоморфизм α сохраняет орбиту gA, то $\alpha \in A$.*

Авторы признательны Е. И. Тимошенко за постановку задачи и полезные замечания. Особая благодарность В. Шпильрайну за внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shpilrain V.* Recognizing automorphisms of free groups // Arch. Math. 1994. N 62. P. 385–392.
2. *Shpilrain V.* Generalized primitive elements of a free group // Arch. Math. 1998. N 71. P. 270–278.
3. *Ivanov S.* On endomorphisms of a free group that preserve primitivity // Arch. Math. 1999. N 72. P. 92–100.
4. *Lee D.* Primitivity preserving endomorphisms of free groups // Comm. Algebra. 2002. V. 30, N 4. P. 1921–1947.
5. *Lee D.* Endomorphisms of free groups that preserve automorphic orbits // J. Algebra. 2002. V. 248, N 1. P. 230–236.
6. *Gupta C. K., Timoshenko E. I.* Automorphic end endomorphic reducibility and primitive endomorphisms of free metabelian groups // Comm. Algebra. 1997. V. 25, N 10. P. 3057–3070.
7. *Золотых А. А., Михалев А. А.* Эндоморфизмы свободных алгебр Ли, сохраняющие примитивность элементов, являются автоморфизмами // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 6. С. 149–150.
8. *Mikhalev A. A., Zolotikh A. A.* Automorphisms and primitive elements of free Lie superalgebras // Comm. Algebra. 1994. V. 22. P. 5889–5901.
9. *Artamonov V. A.* The categories of free metabelian groups and Lie algebras // Comm. Math. Univ. Carolinae. 1977. V. 18, N 1. P. 143–159.
10. *Артамонов В. А.* Проективные метабелевы группы и алгебры Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978. № 42. С. 226–236.
11. *Чирков И. В., Шевелин М. А.* Тестовые наборы в свободных метабелевых алгебрах Ли // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1401–1407.

Статья поступила 23 января 2004 г.

Чирков Игорь Викторович
Омский гос. университет, кафедра информационных систем,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
chirkov@math.omsu.omskreg.ru

Шевелин Михаил Александрович
Омский гос. университет, кафедра алгебры, пр. Мира, 55-А, Омск 644077
shevelin@math.omsu.omskreg.ru