Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 517.95

АППРОКСИМАЦИЯ РЕЗОНАНСНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

М. Г. Лепчинский, В. Н. Павленко

Аннотация: Рассматривается ситуация, когда резонансная эллиптическая краевая задача с разрывной нелинейностью является идеализацией распределенной системы с непрерывными по фазовой переменной нелинейностями, имеющих узкие участки в области изменения фазовой переменной, где отследить изменения нелинейных параметров невозможно. Изучается вопрос о близости множеств решений реальной и идеализированной систем.

Ключевые слова: резонансная эллиптическая задача, разрывные нелинейности, аппроксимации, бета-сходимость.

Математические модели в гидродинамике, электрофизике, теории управления могут приводить к эллиптическим краевым задачам с разрывными нелинейностями. Примеры таких постановок прикладных задач можно найти в [1, 2].

Разрывные нелинейности могут возникать как идеализации непрерывных процессов, у которых наблюдаются узкие интервалы в области значений фазовой переменной с быстрым изменением нелинейных параметров процесса. Так как структуру изменения параметра на таких интервалах отследить, как правило, невозможно, заменяют параметры процесса на каждом из рассматриваемых интервалов разрывной нелинейностью. При этом возникает вопрос о близости множеств решений уравнения с идеализированными характеристиками и с исходными параметрами. Данная проблема поставлена в работе М. А. Красносельского и А. В. Покровского [3] и для коэрцитивных эллиптических краевых задач изучалась вариационным методом в [4]. Более общий вопрос о близости множества решений возмущенного уравнения к множеству решений исходной задачи рассматривался в [5] в предположении, что нелинейности монотонны, и в [6] в случае, когда нелинейности удовлетворяют одностороннему условию Липшица.

В данной работе рассматриваются эллиптические краевые задачи в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с ограниченной разрывной нелинейностью, у которых соответствующая краевая задача для линейной части уравнения имеет ненулевые решения (резонансный случай), аппроксимации каратеодориевы и сходятся к нелинейности исходной краевой задачи в метрике $L_1(\Omega \times \mathbb{R})$. Доказывается теорема о существовании последовательности решений приближенных задач, сходящейся в $C_1(\overline{\Omega})$ к решению исходной граничной задачи. При этом для аппроксимирующих задач берутся решения, доставляющие абсолютный минимум соответствующего функционала, сопоставляемого краевой эллиптической задаче при вариационном подходе. Доказательство существования таких решений опирается на результаты, полученные в [7]. Отметим, что в [4] на нелинейность исходного уравнения и на аппроксимирующие нелинейности накладываются более жесткие ограничения, чем в данной работе, а в отличие от [5] и [6] от нелинейности не требуется выполнения одностороннего условия Липшица.

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Пусть Ω — ограниченная область $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ с границей Γ класса $C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$,

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + c(x)u(x)$$

— равномерно эллиптический дифференциальный оператор на $\overline{\Omega}$ с коэффициентами $a_{ij} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ на $\overline{\Omega}$, $c \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ [8].

Рассматривается краевая задача вида

$$Lu(x) = g_0(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$Bu|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где (2) — одно из основных краевых условий: либо Дирихле, если $Bu(x) = u(x)$, либо Неймана с конормальной производной, если

$$Bu(x) = \frac{\partial u}{\partial n_L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\cos(n, x_j),$$

$\cos(n, x_j)$ — направляющие косинусы внешней нормали к границе Γ, либо третье краевое условие, если

$$Bu(x) = \frac{\partial u}{\partial n_L} + \sigma(x)u(x),$$

$\sigma \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ неотрицательна на Γ и не равна тождественно нулю.

Предполагается, что функция $g_0(x,u)$ удовлетворяет условию $(*)$:

$*1)$ функция $g_0 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелева $(\mathrm{mod}\,0)$ [9], т. е. отличается от некоторой борелевой на $\Omega \times \mathbb{R}$ функции лишь на множестве, проекция которого на Ω имеет нулевую меру;

$*2)$ для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g_0(x,\cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода, и $g_0(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$, $g_-(x,u) = \liminf\limits_{s\to u} g_0(x,s)$, $g_+(x,u) = \limsup\limits_{s\to u} g_0(x,s)$;

$*3)$ для почти всех $x \in \Omega$ верна оценка $|g_0(x,u)| < a(x)$ $\forall u \in \mathbb{R}$, где $a \in L_q(\Omega)$, $q > n$.

Определение 1. *Сильным решением* задачи (1), (2) называется функция $u \in W_s^2(\Omega)$, $s > 1$, которая удовлетворяет уравнению (1) для почти всех $x \in \Omega$ и для которой след $Bu(x)$ на границу Γ области Ω равен нулю.

Обозначим через $N(L)$ множество решений однородной краевой задачи

$$Lu = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$Bu|_{\Gamma} = 0. \tag{4}$$

Если подпространство $N(L)$ ненулевое, то задача (1), (2) резонансная. Аппроксимации исходной задачи (1), (2) имеют вид

$$Lu(x) = g_k(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

$$Bu|_\Gamma = 0, \tag{6}$$

где функции $g_k(x,u)$ — каратеодориевы и для них при почти всех $x \in \Omega$ верна оценка

$$|g_k(x,u)| < a(x) \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

и выполняется следующее условие сходимости:

$$\int\limits_\Omega dx \int\limits_{\mathbb{R}} |g_k(x,s) - g_0(x,s)|\, ds \to 0 \quad \text{при } k \to +\infty. \tag{7}$$

Положим $X = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, если (2) — граничное условие Дирихле, и $X = W^1_2(\Omega)$, если (2) — граничное условие Неймана с конормальной производной или третье краевое условие.

С каждой из задач (1), (2) и (5), (6) свяжем функционал, определенный на X:

$$J_l(u) = J(u) - \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g_l(x,s)\, ds, \quad l = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega c(x) u^2(x)\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_\Gamma \sigma(s) u^2(s)\, ds \tag{8}$$

(для задачи Дирихле и задачи Неймана с конормальной производной полагаем $\sigma(s) \equiv 0$).

Дополнительно потребуем неотрицательности функционала $J(u)$ на X, а в резонансном случае еще и выполнения для нелинейности $g_0(x,u)$ следующего условия:

$$\lim_{\substack{u \in N(L),\\ \|u\|_X \to +\infty}} \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g_0(x,s)\, ds = -\infty. \tag{9}$$

Из (7) и (9) немедленно следует, что для произвольного $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\substack{u \in N(L),\\ \|u\| \to +\infty}} \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g_k(x,s)\, ds = -\infty, \tag{10}$$

поскольку для любых $u \in X$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g_k(x,s)\, ds - \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g_0(x,s)\, ds \right| \le \int\limits_\Omega dx \int\limits_{\mathbb{R}} |g_k(x,s) - g_0(x,s)|\, ds. \tag{11}$$

Для аппроксимирующих задач (5), (6) выполнены все условия теоремы 1.3 из [7], поэтому для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует функция $u_k \in X$, на которой достигается абсолютный минимум $J_k(u)$ на X, причем любое такое u_k принадлежит $W^2_q(\Omega)$ и является сильным решением задачи (5), (6).

Определение 2. Говорят, что для уравнения (1) *выполнено* A1-*условие* [7], если найдется не более чем счетное семейство поверхностей

$$\{S_i,\ i \in I\}, \quad S_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid u = \varphi_i(x),\ x \in \Omega\}, \quad \varphi_i \in W^2_{\mathrm{loc},1}(\Omega)$$

таких, что для почти всех $x \in \Omega$ неравенство $g_0(x, u-) > g_0(x, u+)$ влечет существование $i \in I$, для которого $u = \varphi_i(x)$ и

$$(L\varphi_i(x) - g_0(x, \varphi_i(x)+))(L\varphi_i(x) - g_0(x, \varphi_i(x)-)) > 0 \text{ или } L\varphi_i(x) - g_0(x, \varphi_i(x)) = 0.$$

Если предположить, что для уравнения (1) выполнено A1-условие, то в силу теоремы 1.3 из [7] найдется функция $u_0 \in X$, для которой $J_0(u_0) = \inf\limits_X J_0(u)$, причем любое такое u_0 принадлежит $W_q^2(\Omega)$ и является сильным решением задачи (1), (2).

Обозначим через $\mathfrak{M}_0$ множество сильных решений задачи (1), (2), доставляющих абсолютный минимум функционалу J_0, через $\mathfrak{M}_k$ — множество сильных решений задачи (5), (6), доставляющих абсолютный минимум J_k ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Изучается проблема близости $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_k$ при $k \to +\infty$. Основной результат работы — существование у последовательности решений аппроксимирующих задач $\{u_k\}$, построенной выше, подпоследовательности, сходящейся в $C^1(\overline{\Omega})$ к функции $u \in \mathfrak{M}_0$. Формулировке полученных теорем предпошлем понятие β-сходимости.

Определение 3. Пусть $\{A_k\}$ — последовательность множеств в метрическом пространстве (Z, ρ) и $A \subset Z$. Говорят, что последовательность множеств $\{A_k\}$ *β-сходится к множеству A по метрике ρ*, если

$$\sup_{x \in A_k} \inf_{y \in A} \rho(x, y) \to 0 \quad \text{при } k \to +\infty,$$

и пишут $A_k \xrightarrow{\beta} A$.

Теорема 1. *Предположим, что*

1) *для функции $g_0(x, u)$ в уравнении (1) выполнено условие $(*)$;*

2) *каратеодориевы аппроксимации $g_k(x, u)$ нелинейности $g_0(x, u)$ удовлетворяют условию сходимости (7);*

3) *функционал $J(u)$, определенный формулой (8), неотрицателен на X;*

4) *если подпространство $N(L)$ ненулевое, то имеет место равенство (9);*

5) *для уравнения (1) выполнено A1-условие.*

Тогда множества $\mathfrak{M}_l$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) непусты, причем $\mathfrak{M}_k \xrightarrow{\beta} \mathfrak{M}_0$ по метрике пространства $C^1(\overline{\Omega})$ при $k \to +\infty$. В том случае, когда $\mathfrak{M}_0$ состоит из одной точки u_0, любая последовательность $\{u_k\}$, где $u_k \in \mathfrak{M}_k$, сходится к u_0 по метрике $C^1(\overline{\Omega})$.

Рассмотрим случай, когда пространство решений задачи (3), (4) одномерно и для функции $g_0(x, u)$ в уравнении (1) кроме условия $(*)$ выполняются следующие требования:

(i) для почти всех $x \in \Omega$ существуют пределы

$$\bar{g}_{\pm}(x) = \lim_{u \to \pm\infty} \frac{1}{u} \int\limits_0^u g_0(x, s)\, ds;$$

(ii) выполнено двойное неравенство

$$\int\limits_{\psi<0} \bar{g}_+(x)\psi(x)\, dx + \int\limits_{\psi>0} \bar{g}_-(x)\psi(x)\, dx > 0 > \int\limits_{\psi>0} \bar{g}_+(x)\psi(x)\, dx + \int\limits_{\psi<0} \bar{g}_-(x)\psi(x)\, dx, \tag{12}$$

где $\psi(x)$ — базисная функция пространства $N(L)$.

Замечание 1. Требование (i) с учетом условия ($*$) влечет принадлежность функций $\bar{g}_{\pm}(x)$, фигурирующих в условии (i), к пространству $L_q(\Omega)$. Из этого следует существование интегралов в неравенстве (12).

Замечание 2. Ограничения (i) и (ii) обобщают классическое условие Ландесмана — Лазера [10], в котором вместо функций $\bar{g}_{\pm}(x)$ предполагается существование пределов

$$g_{\pm} = \lim_{s \to \pm\infty} g_0(x, s).$$

Например, если функция $g_0(x, u)$ периодическая по фазовой переменной u, то условие (i) выполняется, а пределы $g_0(x, s)$ при $s \to \pm\infty$, вообще говоря, не существуют.

Замечание 3. Условия (i) и (ii) являются достаточными для выполнения равенства (9). Действительно,

$$\lim_{\substack{u \in N(L),\\ \|u\| \to +\infty}} \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u(x)} g_0(x, s)\, ds = \lim_{t \to \infty} \left[t \int\limits_{\Omega} dx\ \psi(x) \cdot \frac{1}{t\psi(x)} \int\limits_{0}^{t\psi(x)} g_0(x, s)\, ds \right] = -\infty$$

по теореме Лебега о переходе к пределу под знак интеграла, поскольку подынтегральная функция по модулю ограничена суммируемой функцией $a(x)|\psi(x)|$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in \Omega$ и поточечно сходится при $t \to +\infty$ к

$$\int\limits_{\psi > 0} \bar{g}_+(x)\psi(x)\, dx + \int\limits_{\psi < 0} \bar{g}_-(x)\psi(x)\, dx < 0,$$

а при $t \to -\infty$ — к

$$\int\limits_{\psi < 0} \bar{g}_+(x)\psi(x)\, dx + \int\limits_{\psi > 0} \bar{g}_-(x)\psi(x)\, dx > 0.$$

С учетом замечания 3 как следствие теоремы 1 получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть в теореме* 1 *вместо условия* 4 *выполнены условия* (i) *и* (ii). *Тогда утверждение теоремы* 1 *остается верным.*

Замечание 4. В силу замечания 3 теорема 2 обобщает основной результат по рассматриваемой проблеме из [11] (теорему 4.3.1). Кроме того, выбор аппроксимаций нелинейности в [11] такой же, как в [4].

Сформулированные теоремы могут быть применены к известной модели отрывных течений несжимаемой жидкости М. А. Гольдштика [1].

В этой модели установившееся плоское течение идеальной несжимаемой жидкости в области Ω с достаточно гладкой границей распадается на две зоны: зону потенциального течения, где завихренность равна нулю, и зону, в которой завихренность ω постоянна и положительна (область отрывных течений). Математическое описание определения движения жидкости в области Ω дается уравнением относительно функции тока $\Psi(x, y)$:

$$\Delta\Psi(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ при } \Psi(x, y) \geq 0, \\ \omega \text{ при } \Psi(x, y) < 0, \end{cases}$$

и граничным условием

$$\Psi|_{\partial\Omega} = \Psi_0(s),$$

где Ψ_0 — непрерывная на $\partial\Omega$ функция, положительная на части S_1 границы $S_1 \neq \partial\Omega$ и равная нулю на ее дополнении $S_2 = \partial\Omega \setminus S_1$.

Стандартным приемом описанная краевая задача сводится к краевой задаче Дирихле с нулевым граничным условием, к которой применяется теорема 1.

Описанную модель рассматривали М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат в монографии [12], где ими было указана связь с реальной задачей захоронения радиоактивных остатков в глубоких ямах на дне океана.

2. Доказательство теоремы 1

Нам потребуется следующая

Лемма 1. *Предположим, что функционал $J(u)$, определенный равенством* (8), *неотрицательный. Тогда существует положительная константа C такая, что $J(v) > C\|v\|_X^2$ $\forall v \in N^{\perp}(L)$, где $N^{\perp}(L)$ — ортогональное дополнение к пространству решений $N(L)$ задачи* (3), (4) *в гильбертовом пространстве X.*

Доказательство этого результата содержится, например, в [7, § 3].

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Непустота множеств $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ установлена выше. Сразу отметим, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $W_q^2(\Omega)$ компактно вкладывается в пространство $C^1(\overline{\Omega})$ (так как по предположению $q > n$). Поэтому в перечисленных множествах лежат непрерывно дифференцируемые функции.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что для произвольной возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ из любой последовательности $\{u_k\}$ такой, что $u_k \in \mathfrak{M}_{n_k}$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $C^1(\overline{\Omega})$ к некоторой точке из $\mathfrak{M}_0$.

Покажем сначала, что последовательность $\{u_k\}$ ограничена в пространстве $C^1(\overline{\Omega})$. Предположим противное, т. е. что последовательность $\{u_k\}$ не ограничена в $C^1(\overline{\Omega})$. Тогда из нее можно выделить подпоследовательность $\{u_{k_l}\}$ такую, что $\|u_{k_l}\|_{C^1} \to +\infty$. Переобозначим эту подпоследовательность через $\{u_k\}$ и рассмотрим $v_k = u_k / \|u_k\|_{C^1}$.

В силу того, что u_k — решение краевой задачи (5), (6), имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} v_{k x_i})_{x_j} = -c(x) v_k(x) - \frac{g_k(x, u_k(x))}{\|u_k(x)\|_{C^1}}.$$

Функции $v_k(x)$ ограничены на Ω единицей. По условию $|g_k(x, u_k(x))| < a(x) \in L_q(\Omega)$, а $\|u_k(x)\|_{C^1} \to +\infty$, поэтому норма правой части последнего тождества ограничена в $L_q(\Omega)$ константой, не зависящей от k. Все это влечет ограниченность в $W_q^2(\Omega)$ последовательности $\{v_k\}$ [13]. Так как $W_q^2(\Omega)$ — рефлексивное пространство, в ограниченной последовательности $\{v_k\}$ обязана содержаться слабо сходящаяся подпоследовательность. Без ущерба для общности будем считать, что сама $\{v_k\}$ слабо сходится к некоторому v. Мы уже отмечали, что в нашем случае $W_q^2(\Omega)$ компактно вложено в $C^1(\overline{\Omega})$, поэтому $v_k \to v$ в $C^1(\overline{\Omega})$, а так как $\|v_k\|_{C^1} = 1$, то и $\|v\|_{C^1} = 1$, т. е. $v(x)$ — ненулевая функция. Заметим, что для v_k, как и для u_k, выполняется граничное условие (2), а значит, оно выполняется и для v, так как $v_k \to v$ в пространстве $C^1(\overline{\Omega})$.

Поскольку $v_k \rightharpoonup v$ в $W_q^2(\Omega)$, то $Lv_k \rightharpoonup Lv$ в $L_q(\Omega)$. Но

$$Lv_k(x) = \frac{g_0(x, u_k(x))}{\|u_k(x)\|_{C^1}},$$

где правая часть вследствие неравенства $|g_0(x,s)| < a(x)$ для п. в. $s \in \mathbb{R}$ и того, что $\|u_k(x)\|_{C^1} \to +\infty$, стремится к нулю в $L_q(\Omega)$. Значит, при предельном переходе $k \to +\infty$ мы получим равенство $Lv(x) = 0$ п. в. на Ω. Выше отмечалось, что v — ненулевая функция, удовлетворяющая краевому условию (2), поэтому v — нетривиальное решение однородной краевой задачи (3), (4).

Если ядро $N(L)$ нулевое, то противоречие получено уже на этом шаге. Далее предполагаем, что $N(L)$ нетривиально.

Теперь представим u_k как $u_{k1} + u_{k2}$, где первое слагаемое из $N(L)$, а второе из ортогонального дополнения к $N(L)$ в смысле $W_2^1(\Omega)$.

Заметим, что последовательность $J_k(u_k)$ ограничена сверху нулем. Действительно, так как u_k — точка минимума функционала J_k, верно неравенство $J_k(u_k) \le J_k(0(x)) = 0$, где $0(x)$ — нулевая на Ω функция. С другой стороны,

$$\begin{aligned} J_k(u_k) &= J(u_k) - \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u_k(x)} g_k(x,s)\,ds = J(u_{k2}) - \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{(u_{k1}+u_{k2})(x)} g_k(x,s)\,ds \\ &= J(u_{k2}) - \int\limits_\Omega dx \left(\int\limits_0^{u_{k1}(x)} g_k(x,s)\,ds + \int\limits_{u_{k1}(x)}^{(u_{k1}+u_{k2})(x)} g_k(x,s)\,ds \right) \\ &\ge J(u_{k2}) - \int\limits_\Omega a(x)|u_{k2}(x)|\,dx - \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u_{k1}(x)} g_k(x,s)\,ds. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что $J(u_{k1} + u_{k2}) = J(u_{k2})$, так как $u_{k1} \in N(L)$, а $J(u) = \frac{1}{2}(Lu, u)$ на $W_q^2(\Omega)$.

Продолжим оценку. Слагаемое

$$J(u_{k2}) - \int\limits_\Omega a(x)|u_{k2}(x)|\,dx$$

ограничено снизу. Действительно, согласно лемме 1 существует положительная константа C такая, что

$$J(u_{k2}) > C\|u_{k2}\|^2_{W_2^1(\Omega)} \ge C \int\limits_\Omega u_{k2}^2(x)\,dx.$$

Поэтому

$$J(u_{k2}) - \int\limits_\Omega a(x)|u_{k2}(x)|\,dx \ge \int\limits_\Omega \big(Cu_{k2}^2(x) - a(x)|u_{k2}(x)|\big)\,dx \ge \int\limits_\Omega \frac{-a^2(x)}{4C}\,dx$$

(в последнем неравенстве воспользовались ограниченностью снизу квадратичной функции с положительным старшим коэффициентом). Так как $a \in L_q(\Omega)$, где $q > n \ge 2$, последний интеграл конечен.

Теперь обратимся к слагаемому

$$-\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u_{k1}(x)} g_k(x,s)\,ds$$

в оценке для $J_k(u_k)$. Это слагаемое отличается от

$$I_k = -\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u_{k1}(x)} g_0(x,s)\,ds$$

на величину, стремящуюся к 0 при $k \to +\infty$. Это следует из оценки (11). Установим, что $I_k \to +\infty$.

Действительно, норма $\|u_{k1}\|_{W_2^1(\Omega)}$ стремится к $+\infty$ с ростом k. В противном случае для некоторой подпоследовательности u_{k_l} норма $u_{k_l 1}$ в пространстве $W_2^1(\Omega)$ была бы ограничена. Вспомним, что $v_k \rightharpoonup v$ в $W_q^2(\Omega)$, но так как по теореме вложения Соболева пространство $W_q^2(\Omega)$ компактно вложено в $W_2^1(\Omega)$, то $v_{k_l} \to v$ в $W_2^1(\Omega)$. В силу ограниченности u_{k1} получаем, что

$$\frac{u_{k_l 2}}{\|u_{k_l}\|_{C^1}} \to v(x) \text{ в } W_2^1(\Omega),$$

как и

$$v_{k_l} = \frac{u_{k_l}}{\|u_{k_l}\|_{C^1}} = \frac{u_{k_l 1} + u_{k_l 2}}{\|u_{k_l}\|_{C^1}}$$

(пользуемся тем, что $\|u_k\|_{C^1} \to +\infty$). Последнее означает, что последовательность элементов $\frac{u_{k_l 2}}{\|u_{k_l}\|_{C^1}}$ ортогонального дополнения $N^{\perp}(L)$ сходится к ненулевому элементу v ядра $N(L)$, чего не может быть, значит, $\|u_{k1}\|_{W_2^1(\Omega)} \to +\infty$.

Этот вывод вместе с включением $u_{k1} \in N(L)$ немедленно влечет за собой то, что $I_k \to +\infty$ в силу условия (9). Окончательно получаем

$$-\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u_{k1}(x)} g_k(x,s)\,ds \to +\infty.$$

Таким образом, члены числовой последовательности $\{J_k(u_k)\}$ могут быть представлены суммой двух слагаемых, одно из которых ограничено снизу, а другое не ограничено сверху, поэтому сама $\{J_k(u_k)\}$ не может быть ограничена сверху, что противоречит ранее установленному неравенству $J_k(u_k) \le 0$. Значит, исходное предположение о том, что последовательность $u_k(x)$ не ограничена в $C^1(\overline{\Omega})$, неверно.

Для последовательности u_k как последовательности решений краевой задачи (5), (6) выполняются равенства

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{kx_i})_{x_j} = -c(x)u_k(x) + g_k(x, u_k(x)), \quad Bu_k|_{\Gamma} = 0.$$

Правая часть предпоследнего равенства ограничена в $L_q(\Omega)$ в силу того, что $u_k(x)$ ограничена в $C^1(\overline{\Omega})$ и $|g(x,s)| < a(x)$ $\forall s \in \mathbb{R}$ ($a \in L_q(\Omega)$). Это влечет ограниченность в $W_q^2(\Omega)$ последовательности $\{u_k\}$ [13]. Пространство $W_q^2(\Omega)$ рефлексивное, поэтому из ограниченной последовательности $\{u_k\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, которую мы будем по-прежнему обозначать через u_k. Пусть $u_k \rightharpoonup \hat{u}$. Как и раньше, мы пользуемся компактностью вложения пространства $W_q^2(\Omega)$ в пространство $C^1(\overline{\Omega})$ и получаем, что $u_k \to \hat{u}$ в $C^1(\overline{\Omega})$, а так как $Bu_k|_\Gamma = 0$, это нам дает $B\hat{u}|_\Gamma = 0$.

Теперь покажем, что

$$J_0(\hat{u}) = \inf_{w \in X} J_0(w) = d_0.$$

Выберем произвольное u_0 из множества $\mathfrak{M}_0$. Обозначим

$$\gamma_k = \int\limits_\Omega dx \int\limits_\mathbb{R} |g_k(x,s) - g_0(x,s)|\, ds.$$

Для любого $u \in W_2^1(\Omega)$ в силу оценки (11) имеем

$$|J_0(u) - J_k(u)| = \left| \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} (g_k(x,s) - g_0(x,s))\, ds \right| \le \gamma_k.$$

Теперь, используя последнее неравенство и определение u_k и u_0 как функций, доставляющих минимум соответствующим функционалам, получаем следующую цепочку неравенств:

$$d_0 - \gamma_k = J_0(u_0) - \gamma_k \le J_0(u_k) - \gamma_k \le J_k(u_k) \le J_k(u_0) \le J_0(u_0) + \gamma_k = d_0 + \gamma_k.$$

Поэтому $J_k(u_k) \to d_0$, так как $\gamma_k \to 0$ при $k \to +\infty$ по условию. Заметим также, что $J_k(u_k) \to J_0(\hat{u})$ в силу соотношений $J_0(u_k) \to J_0(\hat{u})$ (так как функционал J_0 непрерывен на $C^1(\overline{\Omega})$) и $|J_k(u_k) - J_0(u_k)| \le \gamma_k \to 0$. В итоге $J_0(\hat{u}) = d_0 = \inf\limits_{w \in X} J_0(w)$. Как отмечалось выше, последнее влечет, что $\hat{u}$ является сильным решением краевой задачи (1), (2) из $W_q^2(\Omega)$. Если же решение исходной задачи, доставляющее минимум функционалу J_0, единственно, то это влечет сходимость в $C^1(\overline{\Omega})$ первоначальной последовательности $\{u_k\}$ к этому решению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштик М. А.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 6. С. 1310–1313..
2. *Chang K. C.* Free boundary problems and the set-valued mappings // J. Differential Equations. 1983. V. 49, N 1. P. 1–28.
3. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Уравнениях с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248, № 5. С. 1056–1059.
4. *Павленко В. Н., Искаков Р. С.* Непрерывные аппроксимации разрывных нелинейностей полулинейных уравнений эллиптического типа // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 2. С. 224–233.
5. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 3. С. 506–509.
6. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // Тр. Всесоюзн. конф. по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию со дня рождения академика И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. С. 346–347.
7. *Павленко В. Н., Винокур В. В.* Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Математика. 2001. № 5. С. 45–58.
8. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
9. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
10. *Landesman E., Lazer A.* Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance // J. Math. Mech. 1970. V. 19, N 7. P. 609–623.

11. *Потапов Д. К.* Задачи на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностям: Дис. канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2003. 101 с.
12. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973.
13. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Статья поступила 20 августа 2003 г.

Лепчинский Михаил Германович, Павленко Вячеслав Николаевич
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454021 Челябинский гос. университет, кафедра вычислительной математики
mmyth@mail.ru, pavlenko@csu.ru