Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 519.214.8

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ С РАЗНОРАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СКАЧКАМИ, ИМЕЮЩИМИ БЕСКОНЕЧНУЮ ДИСПЕРСИЮ

А. А. Боровков

Аннотация: Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины с распределениями $F_1, F_2, \dots$ в схеме серий (распределения F_i могут зависеть от некоторого параметра),

$$\mathbf{E}\xi_i = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad \overline{S}_n = \max_{k \le n} S_k.$$

Получены оценки сверху и снизу для вероятностей $\mathbf{P}(S_n > x)$ и $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ в предположении, что «усредненное» распределение $F = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F_i$ мажорируется или минорируется правильно меняющимися функциями. Эти оценки оказываются достаточно точными для нахождения и самой асимптотики рассматриваемых вероятностей. Кроме того, изучена асимптотика вероятности того, что траектория $\{S_k\}$ пересечет удаленную границу $\{g(k)\}$, т. е. асимптотику $\mathbf{P}\big(\max_{k \le n}(S_k - g(k)) > 0\big)$. При этом случай $n = \infty$ не исключается. Найдены также оценки для распределения времени первого прохождения границы.

Ключевые слова: случайные блуждания, большие уклонения, разнораспределенные скачки, схема серий, бесконечная дисперсия.

§ 1. Оценки сверху и снизу для распределений сумм и максимумов сумм случайных величин

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют распределения $F_1, F_2, \dots$ соответственно. Распределения F_j могут зависеть также от некоторого параметра. Как и в классической схеме серий, этот параметр можно обозначить через n, так что $F_j = F_{j,n}$ зависят от j и n. В случае, когда последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ не ограничена, бывает естественным (как, например, при изучении переходных явлений) рассматривать и другие параметры. В дальнейшем индекс n, указывающий на то, что рассматривается схема серий, мы будем для краткости опускать.

Пусть

$$\mathbf{E}\xi_j = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad \overline{S}_n = \max_{k \le n} S_k.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00902) и гранта Президента РФ (код проекта НШ–2139.2003.1).

В случае, когда ξ_i одинаково распределены, асимптотика вероятности $\mathbf{P}(S_n > x)$ в виде $\mathbf{P}(S_n > x) \sim nV(x)$ при определенных (не всегда окончательных) условиях на уклонения x и распределения $F_i = F$ найдена в [1–7].

В работах [8–12] была изучена асимптотика $\mathbf{P}\big(\max_{k\le n}(S_k - ak) > x\big)$ при $a > 0$, $n \le \infty$.

Для разнораспределенных ξ_i в работе [13] получены оценки сверху для $\mathbf{P}(S_n > x)$ в терминах «усеченных» моментов. Они могут быть использованы для отыскания асимптотики $\mathbf{P}(S_n > x)$, но не во всей возможной зоне уклонений.

Ниже мы, следуя подходам, изложенным в [6, 7], найдем оценки и изучим асимптотику вероятностей $\mathbf{P}(S_n > x)$ и $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ для разнораспределенных ξ_i в схеме серий.

1.1. Оценки сверху для распределения максимумов сумм. Для того чтобы получить требуемые оценки, нам, как и в [6, 7], понадобятся условия правильного изменения распределений. При этом обнаруживается замечательный факт, состоящий в том, что эти условия можно накладывать на *усредненные хвосты*

$$\begin{aligned} F((-\infty,-t)) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_j((-\infty,-t)), \\ \overline{F}(t) \equiv F([t,\infty)) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_j([t,\infty)), \quad t > 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

(в форме, равномерной по параметру схемы серий). Так как мы изучаем в этом параграфе распределения S_n и $\overline{S}_n$, можно рассматривать лишь конечный набор случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, а параметр схемы серий отождествить с n.

Условия, приводимые ниже, можно назвать условиями *равномерной усредненной правильной изменяемости*. Правильно меняющаяся функция $G(t) = t^{-\alpha}L(t)$, где L — медленно меняющаяся функция, обладает следующими двумя свойствами (по существу, это свойства функции L):

• $\frac{v^\alpha G(tv)}{G(t)} \longrightarrow 1$ при $t \to \infty$ равномерно по v из любого фиксированного отрезка, отделенного от 0;

• для любого фиксированного $\delta > 0$ выполняется

$$\frac{v^\alpha G(tv)}{G(t)} < (1+\delta)\max(v^\delta, v^{-\delta})$$

при всех достаточно больших t и tv.

Следующие условия на мажоранты хвостов распределения F являются равномерными версиями приведенных условий.

Будем говорить, что *усредненное распределение*

$$F = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F_j$$

удовлетворяет условиям $[<,<]_{\mathrm{U}}$ ($[<,=]_{\mathrm{U}}$), если

$$F((-\infty,-t)) \le W(t), \quad \overline{F}(t) \le V(t). \tag{1.2}$$

$$(F((-\infty,-t)) \le W(t), \quad \overline{F}(t) = V(t)),$$

где $V(t)$, $W(t)$ могут зависеть от параметра схемы серий n и будут обладать свойствами правильно меняющихся функций в смысле условий $[\mathrm{U}_1]$, $[\mathrm{U}_2]$, приведенных ниже.

$[\mathrm{U}_1]$. *Для заданного $\delta > 0$ найдется T_δ такое, что при $\alpha \in [1,2)$, не зависящем от n,*

$$\sup_{\substack{t \ge T_\delta, n,\\ v \in [1/2,2]}} \left| \frac{v^\alpha V(vt)}{V(t)} - 1 \right| < \delta. \tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, что условие $[\mathrm{U}_1]$ сохранится в том же виде, если вместо отрезка $[1/2, 2]$ для значений v рассмотреть произвольный фиксированный (не зависящий от n) отрезок $[c_1, c_2]$, $0 < c_1 < c_2 < \infty$. При этом, правда, T_δ будет зависеть от c_1, c_2. Эти постоянные можно зафиксировать такими, какими они потребуются в доказательстве.

Второе условие связано с равномерными неравенствами.

$[\mathrm{U}_2]$. *Для заданного $\delta > 0$ найдется T_δ такое, что при всех t и v таких, что $t \ge T_\delta$, $tv \ge T_\delta$, и при всех n выполняется*

$$\frac{v^\alpha V(vt)}{V(t)} \le (1+\delta)\max(v^\delta, v^{-\delta}). \tag{1.4}$$

Из этого неравенства вытекает, очевидно, аналогичное обратное неравенство с правой частью $(1-\delta)\min(v^\delta, v^{-\delta})$.

Обозначим через $[\mathrm{U}]$ условие, состоящее в выполнении обоих условий $[\mathrm{U}_1]$, $[\mathrm{U}_2]$.

Условия $[\mathrm{U}]$ на хвосты W имеют точно такую же форму при замене в них α на β.

Будем говорить, что *усредненное распределение F удовлетворяет условиям* $[\mathrm{U}]$, если мажоранты V и W удовлетворяют $[\mathrm{U}]$. В этой работе мы везде будем предполагать, что $\alpha \in [1,2)$, $\beta \in (1,2)$ фиксированы.

Замечание 1.1. При изучении больших уклонений $\overline{S}_n$ и S_n в случае, когда $n \to \infty$, условие $[\mathrm{U}]$ можно заменить ослабленным условием

$[\mathrm{U}^\infty]$. *Для заданного $\delta > 0$ найдутся N_δ, T_δ такие, что справедливо* (1.4) *при всех $n \ge N_\delta$, $t \ge T_\delta$, $tv \ge T_\delta$ и выполнено* (1.3), *где* sup *взят по области $n \ge N_\delta$, $t \ge T_\delta$, $v \in [1/2, 2]$.*

Простым достаточным условием существования правых правильно меняющихся мажорант для усредненных распределений является ограниченность при $\alpha \ge 1$ и некотором $T_0 > 0$ усредненных моментов

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\big(\xi_j^\alpha; \xi_j \ge T_0\big) < c_\alpha < \infty.$$

В этом случае очевидно, что при $t \ge T_0$

$$\overline{F}(t) \le V(t) = c_\alpha t^{-\alpha}$$

и в условиях $[\mathrm{U}]$ можно положить $T_\delta = T_0$ при любом $\delta > 0$. Аналогично обстоит дело с левыми хвостами.

Если условиям $[<,<]_{\mathrm{U}}$ удовлетворяет *каждое* из распределений F_j равномерно по n и j при одних и тех же α и β (т. е. под знаком sup в (1.3) надо добавить еще $j \le n$; м.м.ф. L_j в представлениях $V_j(t) = t^{-\alpha} L_j(t)$ могут быть различны, $V_j(t)$ — мажоранты для $\overline{F}_j(t) = F_j([t,\infty)))$, то эти условия будут выполнены и для усредненного распределения F. Рассмотрим, например, условие $[\mathrm{U}_2]$ на хвосты V_j. Если при каждом j для $v \ge 1$, $t \ge T_\delta$

$$V_j(vt) \le V_j(t)(1+\delta)v^{-\alpha+\delta},$$

то, очевидно, то же неравенство верно и для сумм:

$$V(vt) \le V(t)(1+\delta)v^{-\alpha+\delta}.$$

Если же каждое распределение F_j удовлетворяет $[<,<]_{\mathrm{U}}$ и при этом $\alpha = \alpha_j$ зависит от j, $1 < \alpha_* \le \alpha_j \le \alpha^* < 2$, то остается не ясным, выполнены ли в этом случае условия $[<,<]_{\mathrm{U}}$ для усредненного распределения F. Однако оказывается, что выполнение $[<,<]_{\mathrm{U}}$ для каждого F_j (равномерно по j, n) также позволяет получить нужные нам оценки.

В связи с этим мы будем различать два вида условий $[<,<]_{\mathrm{U}}$:

a) *условия* $[<,<]_{\mathrm{U}}$ *в среднем*, когда выполнены соотношения (1.3), (1.4);

b) *индивидуальные условия* $[<,<]_{\mathrm{U}}$, когда соотношения (1.3), (1.4) выполнены равномерно по n и j для каждого V_j, при этом показатель α в (1.3), (1.4) должен быть заменен на α_j, $1 < \alpha_* \le \min\limits_{j \le n} \alpha_j \le \max\limits_{j \le n} \alpha_j \le \alpha^* < 2$, где α_*, α^* фиксированы.

Такие же свойства предполагаются относительно мажорант W_j хвостов $F_j((-\infty,t])$ при $1 < \beta_* \le \min\limits_{j \le n} \beta_j \le \max\limits_{j \le n} \beta_j \le \beta^* < 2$ и фиксированных β_*, β^*.

В дополнение к условиям $[<,<]_{\mathrm{U}}$ (в том или ином их виде) нам для получения требуемых асимптотик в нужной нам простой форме понадобятся некоторые дополнительные условия, которые не допускали бы слишком быстрого «истончения» (вырождения) хвостов $F((-\infty,-t])$ и $\overline{F}(t)$ (или $W(t)$, $V(t)$) в условиях схемы серий при $n \to \infty$ (скажем, слишком быстрой сходимости к нулю $\frac{V(t_2)}{V(t_1)} \to 0$ или $\frac{W(t_2)}{W(t_1)} \to 0$ при каких-нибудь *фиксированных* $t_2 > t_1$ и $n \to \infty$). В случае слишком быстрого «истончения» существенную роль при оценке вероятностей $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ могут играть центральные части распределений F, а не их хвосты.

Нам понадобятся следующие числовые характеристики:

$$J_j^V(t) = \int_0^t u V_j(u)\,du, \quad J_j^W(t) = \int_0^t \int_u^\infty W_j(v)\,dv = \int_0^\infty \min(u,t) W_j(u)\,du,$$

$$J^V(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n J_j^V(t), \quad J^W(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n J_j^W(t), \quad J(t) = J^V(t) + J^W(t).$$

Ясно, что функцию $J(t)$ можно определить также и в терминах соответствующих интегралов от функций V и W.

Условие, обеспечивающее не слишком быстрое «истончение» хвостов (или их невырождение), при $n \to \infty$ имеет следующий вид.

[J]. *При каком-нибудь* $\delta < \min(\beta - 1, 2 - \alpha)$ *и при всех достаточно больших* x *и при* n *таких, что* $nV(x) < 1$, *выполняется*

$$V(x) \ge cJ(T_\delta)x^{-2}, \quad c > 0, \tag{1.5}$$

где T_δ *из условий* [U].

В индивидуальной версии условия [J] *числа* α *и* β *надо заменить соответственно числами* α^* *и* β^*.

Здесь и далее буквой c с индексами или без мы обозначаем различные постоянные, не всегда одни и те же, если они находятся в разных формулах.

Так как величина $J(T_\delta)$ ограничена, то, очевидно, (1.5) всегда выполнено, если $V(x) \geq cx^{-2}$ в области $nV(x) < 1$ (напомним, что $V(x)$ зависит от n).

Другим достаточным условием выполнения (1.5) является неравенство

$$V(T_\delta) \geq c_1 J(T_\delta), \tag{1.6}$$

где T_δ соответствует $\delta < \min(\beta-1, 2-\alpha)$. (Напомним, что T_δ описывает область изменения t, в которой с точностью, характеризуемой δ, выполняются свойства правильного изменения.) Действительно, в этом случае при $x \to \infty$

$$V(x) = V(T_\delta)\frac{V(x)}{V(T_\delta)} \geq c_1 J(T_\delta)\left(\frac{x}{T_\delta}\right)^{-\alpha+\delta};$$

$$x^2 V(x) J^{-1}(T_\delta) \geq c_1 T_\delta^{\alpha-\delta} x^{2-\alpha+\delta} \to \infty.$$

Рассмотрим следующий

Пример 1.1. Пусть ζ_i независимы и одинаково и симметрично распределены с мажорантами V_ζ для правых хвостов. Положим

$$\xi_i = \begin{cases} \zeta_i & \text{с вероятностью } \delta(n), \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-\delta(n), \end{cases}$$

где $\delta(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Здесь $V(t) = \delta(n)V_\zeta(t)$, условия $[<,<]_{\mathrm{U}}$ выполнены,

$$J(T_\delta) = c\delta(n) \to 0, \quad V(T_\delta) = \delta(n)V_\zeta(T_\delta) = \frac{J(T_\delta)}{c}V_\zeta(T_\delta) = c_1 J(T_\delta)$$

и выполнено достаточное условие (1.6). Таким образом, если «истончение» происходит за счет концентрации массы в нуле, то это не мешает выполнению нужных нам условий [U] и [J].

Если же

$$\xi_i = \begin{cases} \zeta_i & \text{с вероятностью } \delta(n), \\ \zeta_i I(|\zeta_i| < 1) & \text{с вероятностью } 1-\delta(n), \end{cases}$$

то положение будет иным. Пусть для простоты $T_\delta = 1$ при подходящем δ; $\delta(n) = n^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, $V_\zeta(x) = Lx^{-\alpha}$ при $x > 1$. Условие (1.6), очевидно, не выполнено, так как $V(1) \to 0$, $J(1) > c > 0$ при $n \to \infty$. Условие (1.5) будет выполнено, если

$$\delta(n)V_\zeta(x) \geq cx^{-2},$$

или, что то же, если

$$n^\gamma x^{\alpha-2} < c.$$

Это неравенство будет вытекать из неравенства $nV(x) = n^{1-\gamma}Lx^{-\alpha} < 1$, только если $\frac{\alpha\gamma}{1-\gamma} < 2-\alpha$ или, что то же, $\gamma \leq \frac{2-\alpha}{2}$. Если же $\gamma > \frac{2-\alpha}{2}$, то условие [J] не выполнено и основной вклад в вероятность больших уклонений $\overline{S}_n$ и S_n может вносить центральная часть распределений ξ_i (или ζ_i), а не их хвосты.

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение. Напомним, что под условием $[<,<]_{\mathrm{U}}$ на распределение F мы понимаем наличие мажорант V и W на хвосты F_i, удовлетворяющих условиям [U]. Положим

$$B_i = \{\xi_i \leq y\}, \quad B = \bigcap_{i=1}^n B_i, \quad P = \mathbf{P}(\overline{S}_n > x, B), \quad \Pi(x) = nV(x). \tag{1.7}$$

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathbf{E}\xi_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, *и усредненное распределение* F *удовлетворяет условиям* $[<,<]_{\mathrm{U}}$, [J] *при* $\alpha \in [1,2)$, $\beta \in (1,2)$; $r = \frac{x}{y} \geq 1$ *фиксировано.*

1. *Если* $W(t) \leq c_1 V(t)$, $c_1 > 0$, *при всех достаточно больших* t, *то при всех* n

$$P \leq c\Pi(x)^r, \tag{1.8}$$

$$\sup_{n,x:\Pi(x)\leq v} \frac{\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)}{\Pi(x)} \leq 1 + \gamma(v), \tag{1.9}$$

$\gamma(v) \downarrow 0$ *при* $v \downarrow 0$.

2. *Если* $W(t) \geq c_1 V(t)$, $c_1 > 0$, *при всех достаточно больших* t, *то приведенные выше неравенства сохранятся при всех* n *и* x *таких, что*

$$nW\left(\frac{x}{\ln x}\right) < c_2 < \infty. \tag{1.10}$$

3. *Утверждения пп.* 1, 2 *теоремы сохранятся, если в них вместо условий* $[<,<]_{\mathrm{U}}$ *на усредненное распределение* F *предположить, что каждое из распределений* F_j, $j{=}1, \ldots, n$, *равномерно по* j *и* n *удовлетворяет условиям* $[<,<]_{\mathrm{U}}$ *при* $\alpha = \alpha_j$, $\beta = \beta_j$, *где*

$$1 < \alpha_* = \min_{j\leq n} \alpha_j \leq \max_{j\leq n} \alpha_j = \alpha^* < 2,$$

$$1 < \beta_* = \min_{j\leq n} \beta_j \leq \max_{j\leq n} \beta_j = \beta^* < 2.$$

Положим

$$\widehat{V}(t) = \max(V(t), W(t)), \quad \widehat{\Pi} = n\widehat{V}(x), \quad \underline{S}_n = \min_{k\leq n} S_k.$$

Если в условиях $[<,<]_{\mathrm{U}}$ обе мажоранты заменить на $\widehat{V}(t)$, то из (1.9) вытекает

Следствие 1.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда*

$$\sup_{n,x:\widehat{\Pi}\leq v} \frac{\max(\mathbf{P}(\overline{S}_n > x), \mathbf{P}(\underline{S}_n < -x))}{\widehat{\Pi}(x)} \leq 1 + \gamma(v), \tag{1.11}$$

где $\gamma(v) \downarrow 0$ *при* $v \downarrow 0$.

Положим $\widehat{S}_n = \max_{k\leq n} |S_k|$, $G(t) = V(t) + W(t)$. Из теоремы 1.1 получаем также

Следствие 1.2. *Если выполнены условия теоремы* 1.1, *то*

$$\sup_{n,x:\widehat{\Pi}\leq v} \frac{\mathbf{P}(\widehat{S}_n > x)}{nG(x)} \leq 1 + \gamma(v). \tag{1.12}$$

Замечание 1.2. Утверждение теоремы 1.1 и ее следствий можно сформулировать также в несколько иных терминах. Условия равномерности [U] делают естественным введение классов $\mathscr{F}$ распределений, которые этим условиям удовлетворяют. Класс $\mathscr{F}$ будет характеризоваться функцией T_δ в условиях [U], а также постоянной c в условии [J]. В этих терминах утверждение теоремы 1.1 состоит в том, что основные неравенства (1.8), (1.9) теоремы 1.1 выполняются равномерно по всем распределениям $\{F_i\}$ из класса $\mathscr{F}$; при этом функция $\gamma(\cdot)$ в (1.9), (1.11) определяется лишь характеристиками класса $\mathscr{F}$.

Отметим, что условие [J] можно было бы и не вводить в рассмотрение. Но тогда количество $J(T_\delta)$ при каком-нибудь δ таком, что $\alpha\pm\delta \in (1,2)$, $\beta\pm\delta \in (1,2)$ (T_δ из условий [U]), появилось бы в оценках для P и $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ и усложнило бы формулировки.

Отметим также, что мажоранты V, W в условии [J] можно отождествить на отрезке $[0, T_\delta]$ с $\overline{F}(t)$ и $F((-\infty, -t])$ соответственно.

Замечание 1.3. Если изучаются вероятности больших уклонений S_n и $\overline{S}_n$ при $n \to \infty$, то нужно пользоваться ослабленной версией [U$^\infty$] условий [U], описанной в замечании 1.1. При этом (1.8) будет справедливо при всех достаточно больших n, а вместо (1.9) следует написать

$$\sup_{x:\Pi(x)\le\delta} \frac{\mathbf{P}(S_n > x)}{\Pi(x)} \le 1 + \gamma(v, n),$$

где $\gamma(v,n) \to 0$ при $v \to 0$, $n \to \infty$. Это же относится и к следствиям 1.1, 1.2.

В работе [13] получены оценки сверху для распределения S_n в терминах «усеченных» моментов и без условий на существование правильно меняющихся мажорант (такие мажоранты при наличии моментов всегда существуют, но порядок убывания не будет правильным). Это делает оценки в [13] в известном смысле более общими, но и значительно более громоздкими. Получить из них оценки для S_n вида (1.9), (1.12) не удается.

Доказательство теоремы 1.1 во многом следует доказательству теоремы 3.1 в [6]. Надо лишь все рассуждения модифицировать на случай схемы серий при выполнении условий [U]. При этом мы будем подробно останавливаться только на тех местах, в которых разнораспределенность ξ_j вносит существенные изменения. В основе доказательства лежит следующее основное неравенство. Положим

$$R_j(\mu, y) = \int_{-\infty}^{y} e^{\mu t}\, dF_j(t).$$

Лемма 1.1. *При любых $\mu \ge 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0$*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x, B) \le e^{-\mu x} \max_{k\le n} \prod_{j=1}^{k} R_j(\mu, y), \tag{1.13}$$

где событие B определено в (1.7).

Отметим, что условие $\mathbf{E}\xi_j = 0$ здесь не предполагается.

Доказательство. Предположим на время, что

$$\varphi_i(\mu) = \mathbf{E}e^{\mu\xi_i} < \infty \tag{1.14}$$

при некотором $\mu > 0$. Покажем, что тогда при всех $n \ge 1$, $x \ge 0$, $\mu \ge 0$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le e^{-\mu x} \max_{k\le n} \prod_{i=1}^{k} \varphi_i(\mu). \tag{1.15}$$

(Это неравенство можно записать также в виде

$$\mathbf{P}(\max_{k\le n} S_k > x) \le e^{-\mu x} \max_{k\le n} \mathbf{E}e^{\mu S_k}.)$$

Положим $\eta(x) = \min\{k : S_k \geq x\}$. Тогда

$$\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(\mu) = \mathbf{E}e^{\mu S_n} \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(e^{\mu S_n}; \eta(x) = k) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(e^{\mu(x+S_n-S_k)}; \eta(x) = k)$$

$$= e^{\mu x} \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=k+1}^{n} \varphi_i(\mu) \mathbf{P}(\eta(x) = k) \geq e^{\mu x} \min_{k\leq n} \prod_{i=k+1}^{n} \varphi_i(\mu) \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\eta(x){=}k)$$

$$= e^{\mu x} \mathbf{P}(\overline{S}_n \geq x) \min_{k\leq n} \prod_{i=k+1}^{n} \varphi_i(\mu).$$

Так как

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(\mu)}{\min\limits_{k\leq n} \prod\limits_{i=k+1}^{n} \varphi_i(\mu)} \leq \max_{k\leq n} \prod_{i=1}^{k} \varphi_i(\mu),$$

неравенство (1.15) доказано.

Если условие Крамера (1.14) не выполнено, то мы воспользуемся «срезками» $\xi_i^{(y)}$ случайных величин ξ_i на уровне y с распределением

$$\mathbf{P}(\xi_i^{(y)} \in A) = \frac{F_i(A)}{F_i((-\infty, y])}, \quad A \subset (-\infty, y].$$

Положив $S_n^{(y)} = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j^{(y)}$, $\overline{S}_n^{(y)} = \max\limits_{k\leq n} S_k^{(y)}$ и применив к $\overline{S}_n^{(y)}$ неравенство (1.15), получим

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x, B) = \prod_{j=1}^{n} F_j((-\infty, y]) \mathbf{P}\big(\overline{S}_n^{(y)} > x\big) \leq e^{-\mu x} \max_{k\leq n} \prod_{j=1}^{k} R_j(\mu, y).$$

Лемма доказана.

Таким образом, лемма 1.1 сводит задачу к оценке

$$\max_{k\leq n} \prod_{j=1}^{k} R_j(\mu, y).$$

Так как $\ln(1 + v) \leq v$, то

$$R_j(\mu, y) = e^{\ln[1+(R_j(\mu,y)-1)]} \leq e^{R_j(\mu,y)-1},$$

$$\prod_{j=1}^{k} R_j(\mu, y) \leq e^{\sum\limits_{j=1}^{k} (R_j(\mu,y)-1)}. \tag{1.16}$$

Оценим правую часть этого неравенства при $k = n$, положив

$$R(\mu, y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} R_j(\mu, y), \quad F = \frac{1}{n} \sum F_j.$$

Имеем

$$R(\mu, y) = \int\limits_{-\infty}^{y} e^{\mu t}\, F(dt) = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{0}, \quad I_2 = \int\limits_{0}^{M}, \quad I_3 = \int\limits_{M}^{y}, \quad M = \frac{2\alpha}{\mu}.$$

Оценки интегралов I_1, I_2 происходят аналогично тому, как это делается в теореме 3.1 в [6], но с использованием условий [U]. Находим

$$I_1 = F((-\infty, 0)) + \mu \int\limits_{-\infty}^{0} t\, F(dt) + \mu \int\limits_{-\infty}^{0} (1 - e^{\mu t}) F((-\infty, t))\, dt,$$

где последний интеграл не превосходит

$$\mu \int\limits_{0}^{\infty} W(t)(1 - e^{-\mu t})\, dt = \mu^2 \int\limits_{0}^{\infty} \widetilde{W}(t) e^{-\mu t}\, dt, \quad \widetilde{W}(t) = \int\limits_{t}^{\infty} W(u)\, du.$$

В силу условий [U] и теоремы о мажорируемой сходимости получаем, что равномерно по n при $t \to \infty$

$$\widetilde{W}(t) = t \int\limits_{1}^{\infty} W(tv)\, dv \sim tW(t) \int\limits_{1}^{\infty} v^{-\beta}\, dv = \frac{tW(t)}{\beta - 1}.$$

Пусть $\delta < \beta - 1$. Тогда для T_δ из условия [U$_2$] такого, что

$$\widetilde{W}(t) \le (1 + \delta) \frac{tW(t)}{\beta - 1} \quad \text{при } t \ge T_\delta,$$

справедливо неравенство

$$\mu^2 \int\limits_{0}^{\infty} \widetilde{W}(t) e^{-\mu t}\, dt \le \mu^2 \int\limits_{0}^{T_\delta} \widetilde{W}(t)\, dt + \frac{(1 + \delta)\mu^2}{\beta - 1} \int\limits_{T_\delta}^{\infty} tW(t) e^{-\mu t}\, dt,$$

где в силу условий [U] при $\mu \to 0$

$$\mu^2 \int\limits_{T_\delta}^{\infty} \frac{tW(t)}{(\beta - 1)} e^{-\mu t}\, dt = \frac{W(1/\mu)}{\beta - 1} \int\limits_{\mu T_\delta}^{\infty} \frac{uW(u/\mu)}{W(1/\mu)} e^{-u}\, du$$

$$\sim \frac{W(1/\mu)}{\beta - 1} \int\limits_{0}^{\infty} u^{1-\beta} e^{-u}\, du = \frac{W(1/\mu)}{\beta - 1} \Gamma(2 - \beta).$$

Таким образом, при $\mu \to 0$

$$I_1 \le F((-\infty, 0)) + \mu \int\limits_{-\infty}^{0} t\, F(dt) + J^W(T_\delta)\mu^2 + \frac{W(1/\mu)}{\beta - 1} \Gamma(2 - \beta)(1 + o(1)),$$

где

$$J^W(t) = \int\limits_{0}^{t} \left(\int\limits_{u}^{\infty} W(v)\, dv \right) du = \int\limits_{0}^{\infty} \min(u, t) W(u)\, du.$$

Далее, при $M = \frac{2\alpha}{\mu}$

$$I_2 = \int\limits_0^M e^{\mu t}\, dF(t) \le \overline{F}(0) + \mu \int\limits_0^\infty t\, F(dt) + \int\limits_0^M (e^{\mu t} - 1 - \mu t)\, F(dt),$$

где аналогично предыдущему находим, что последний интеграл не превосходит

$$\frac{\mu^2(e^{2\alpha}-1)V^*(M)}{2\alpha}, \quad V^*(t) = \int\limits_0^t uV(u)\, du.$$

При δ таком, что $\alpha + \delta < 2$,

$$t^{-2}V^*(t) \equiv t^{-2}\int\limits_0^t uV(u)\, du \le t^{-2}\int\limits_0^{T_\delta} uV(u)\, du + \int\limits_{\frac{T_\delta}{t}}^1 vV(tv)\, dv$$

$$\le J^V(T_\delta)t^{-2} + (1+\delta)V(t)\int\limits_0^1 v^{1-\alpha-\delta}\, dv,$$

где $J^V(t) = \int\limits_0^t uV(u)\, du$. Поэтому

$$I_2 \le \overline{F}(0) + \mu \int\limits_0^\infty t\, dF(t) + J^V(T_\delta) + cV\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

$$I_1 + I_2 \le 1 + J(T_\delta)\mu^2 + cG\left(\frac{1}{\mu}\right), \tag{1.17}$$

где $J(t) = J^V(t) + J^W(t)$, $G(t) = V(t) + W(t)$.

Перейдем теперь к оценке интеграла

$$I_3 \le -\int\limits_M^y e^{\mu t}\, dV(t) \le V(M)e^{2\alpha} + \mu\int\limits_M^y V(t)e^{\mu t}\, dt.$$

Так как $V(M)e^{2\alpha} \le cV\left(\frac{1}{\mu}\right)$, для нас основной интерес будет представлять интеграл

$$\mathscr{I} \equiv \mu\int\limits_M^y V(t)e^{\mu t}\, dt = e^{\mu y}V(y)\int\limits_0^{(y-M)\mu} V\left(y - \frac{u}{\mu}\right)V^{-1}(y)e^{-u}\, du, \tag{1.18}$$

где подынтегральная функция

$$R(u) = V\left(y - \frac{u}{\mu}\right)V^{-1}(y)e^{-u}$$

экспоненциально убывает, точнее, удовлетворяет неравенству

$$R(u) \le e^{-u/4}. \tag{1.19}$$

Это следует из того, что для $u \le (y-M)\mu$, $\Delta < \alpha$, где Δ мы выберем позже, при $\mu \to 0$ выполняется

$$v \equiv y - \frac{u}{\mu} \ge M \to \infty, \quad \mu v \ge 2\alpha, \quad v - \frac{\Delta}{\mu} \ge \frac{M\mu - \Delta}{\mu} \ge \frac{2\alpha - \Delta}{\mu} \ge \frac{\alpha}{\mu} \to \infty;$$

$$\begin{aligned}\frac{R(u+\Delta)}{R(u)} &= \frac{V(v-\Delta/\mu)}{V(v)} e^{-\Delta} \le \left(1 - \frac{\Delta}{\mu v}\right)^{-\alpha} \left(1 + \delta\left(v, \frac{\Delta}{\mu v}\right)\right) e^{-\Delta} \\ &\le \left(1 - \frac{\Delta}{2\alpha}\right)^{-\alpha} \left(1 + \delta\left(v, \frac{\Delta}{\mu v}\right)\right) e^{-\Delta} \le e^{\frac{\Delta}{2} - \Delta + c\Delta^2} \left(1 + \delta\left(v, \frac{\Delta}{\mu v}\right)\right) \qquad (1.20)\end{aligned}$$

при некотором $c < \infty$, где в силу условий [U]

$$\sup_{|\gamma| \le 1/2} |\delta(v, \gamma)| = \delta(v) \to 0 \quad \text{при } v \to \infty.$$

Выберем Δ настолько малым, а затем v настолько большим, что $e^{-\frac{\Delta}{2} + c\Delta^2}(1 + \delta(v)) \le e^{-\frac{\Delta}{4}}$. Тогда из (1.20) следует $\frac{R(u+\Delta)}{R(u)} < e^{-\Delta/4}$ при всех $u \le (y-M)\mu$, что влечет за собой (1.19).

Из (1.19) и теоремы о мажорируемой сходимости вытекает, что

$$\mathscr{I} \sim e^{\mu y} V(y)$$

равномерно по n, так что существует функция $\varepsilon(\lambda) \to 0$ при $\lambda = \mu y \to \infty$ такая, что

$$\mathscr{I} \le e^{\mu y} V(y)(1 + \varepsilon(\lambda)). \qquad (1.21)$$

В итоге получаем

$$n(R(\mu, y) - 1) \le nJ(T_\delta)\mu^2 + cnG\left(\frac{1}{\mu}\right) + e^{\mu y} nV(y)(1 + \varepsilon(\lambda)), \qquad (1.22)$$

$\varepsilon(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Так как при $k \le n$ выполняется

$$\sum_{j=1}^{k} J_j^V(t) \le nJ^V(t), \quad \sum_{j=1}^{k} J_j^W(t) \le nJ^W(t),$$

$$\sum_{j=1}^{k} V_j(t) \le nV(t), \quad \sum_{j=1}^{k} W_j(t) \le nW(t),$$

такое же неравенство (с той же правой частью, что и в (1.22)) справедливо для $\sum\limits_{j=1}^{k} (R_j(\mu, y) - 1)$ и для $\max\limits_{k \le n} \sum\limits_{j=1}^{k} (R_j(\mu, y) - 1)$. Стало быть (см. (1.16)),

$$\begin{aligned}\max_{k \le n} \prod_{j=1}^{k} R_j(\mu, y) &\le e^{\max\limits_{k \le n} \sum\limits_{j=1}^{k} (R_j(\mu, y) - 1)} \\ &\le \exp\left\{ nJ(T_\delta)\mu^2 + cnG\left(\frac{1}{\mu}\right) + \frac{1}{\mu} + nV(y) e^{\mu y}(1 + \varepsilon(\lambda)) \right\}. \qquad (1.23)\end{aligned}$$

Положим, как и в теореме 3.1 в [6],

$$\mu = \frac{1}{y} \ln \frac{r}{\Pi(y)}, \quad \Pi(y) = nV(y).$$

Так как $\Pi(y)e^{\mu y} = r$ и в силу условий [U]

$$nV\left(\frac{1}{\mu}\right) \le c_1 V\left(\frac{y}{|\ln \Pi(y)|}\right) \le c_1 \Pi(y)|\ln \Pi(y)|^{\alpha+\delta} \to 0 \tag{1.24}$$

при $\Pi(y) \to 0$, то

$$\ln P \le -r \ln \frac{r}{\Pi(y)} + r + \varepsilon_1(\Pi(y)) + cnW\left(\frac{y}{|\ln \Pi(y)|}\right) + nJ(T_\delta)y^{-2}\ln^2 \frac{r}{\Pi(y)}, \tag{1.25}$$

где $\varepsilon_1(v) \to 0$ при $v \to 0$.

Если $\Pi(y) \to 0$, то $\Pi(y)\ln^2 \Pi(y)$ тоже сходится к нулю. Поэтому последнее слагаемое в правой части (1.25) будет сходиться к нулю при $\Pi(y) \to 0$, если

$$J(T_\delta)y^{-2}V^{-1}(y) < c, \tag{1.26}$$

где, напомним, T_δ из условий [U] соответствует δ такому, что $\beta - \delta > 1$, $\alpha + \delta < 2$.

Итак, последнее слагаемое в (1.25) ограничено, если выполнено (1.26) и $\Pi(x) \le 1$. Оно сходится к нулю, если выполнено (1.26) и $\Pi(x) \to 0$. Это значит, что последнее слагаемое правой части (1.25) можно при выполнении условия [J] включить в слагаемое $\varepsilon_1(\Pi(y))$. Мы получили для $\ln P$ неравенство

$$\ln P \le -r \ln \frac{r}{\Pi(y)} + r + \varepsilon_1(\Pi(y)) + cnW\left(\frac{y}{|\ln \Pi(y)|}\right), \tag{1.27}$$

где $\varepsilon_1(v) \to 0$ при $v \to 0$.

Если выполнено $W(t) \le c_1 V(t)$, то в силу (1.27) последнее слагаемое в правой части (1.27) можно включить в $\varepsilon_1(\Pi(y))$ и в итоге мы получим (1.8).

Если выполнено обратное неравенство и (1.10), то

$$nW\left(\frac{y}{|\ln \Pi(y)|}\right) \le nW\left(\frac{y}{|\ln V(y)|}\right) \le cnW\left(\frac{y}{\ln y}\right) \le c_1$$

и мы вновь получаем (1.8).

Докажем теперь (1.9). Имеем

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le \mathbf{P}(\overline{B}) + P \le \Pi(y) + c[\Pi(y)]^r = \Pi(y)(1 + c[\Pi(y)]^{r-1}).$$

Положим $y = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{|\ln \varepsilon|}}\right)^{-1}$. Тогда $y \sim x$, $r - 1 = \frac{1}{\sqrt{|\ln \varepsilon|}} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Далее, в силу условий [U]

$$\Pi(y) = \Pi(x)\frac{V(y)}{V(x)} = \Pi(x)(1 + \delta(\varepsilon)), \quad \delta(\varepsilon) \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Следовательно, при $\Pi(x) \le \varepsilon$

$$[\Pi(x)]^{r-1} \le \exp\left\{\frac{\ln \varepsilon}{\sqrt{|\ln \varepsilon|}}\right\} = \exp\big\{ -\sqrt{|\ln \varepsilon|}\big\} \to 0,$$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \le \Pi(x)(1 + \gamma(\varepsilon)), \quad \gamma(\varepsilon) \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Это доказывает (1.9).

Теорема доказана.

1.2. Оценки снизу для распределения сумм S_n. Положим аналогично предыдущему $\overline{F}_i(t) = \mathbf{P}(\xi_i > t)$ и установим аналоги оценок снизу в теоремах 6.1, 6.2 из [6].

Обозначим
$$S_n^{(j)} = S_n - \xi_j.$$

Теорема 1.2. *Пусть $K(n) > 0$ — произвольная последовательность,*
$$Q_n^{(j)}(t) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n^{(j)}}{K(n)} \le -t\right).$$
Тогда при $y = x + tK(n)$ выполняется
$$\mathbf{P}(S_n > x) \ge \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_j(y)\big(1 - Q_n^{(j)}(t)\big) - \frac{1}{2}(n\overline{F}(y))^2, \quad \overline{F}(y) = F((y,\infty)).$$

Доказательство. Положим
$$G_n = \{S_n > x\}, \quad B_j = \{\xi_j \le y\}.$$
Тогда
$$\mathbf{P}(S_n > x) \ge \mathbf{P}\left(G_n; \bigcup_{j=1}^{n} \overline{B}_j\right) \ge \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(G_n\overline{B}_j) - \sum_{i<j} \mathbf{P}(G_n\overline{B}_i\overline{B}_j)$$
$$\ge \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(G_n\overline{B}_j) - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{F}_j(y)\right)^2.$$
При $y = x + tK(n)$ находим
$$\mathbf{P}(G_n\overline{B}_j) = \int_y^\infty F_j(du)\mathbf{P}\big(S_n^{(j)} > x-u\big) \ge \mathbf{P}\big(S_n^{(j)} > x-y\big)\overline{F}_j(y) = \overline{F}_j(y)\big(1-Q_n^{(j)}(t)\big).$$
Теорема доказана.

Положим
$$\widehat{V}(t) = \max(V(t), W(t)), \quad \hat{\sigma}(n) = \widehat{V}^{(-1)}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1, $y = x + t\hat{\sigma}(n)$. Тогда при $t \to \infty$*
$$\mathbf{P}(S_n > x) \ge n\overline{F}(y)(1 + o(1)). \tag{1.28}$$
Если дополнительно $x \gg \hat{\sigma}(n)$, то
$$\mathbf{P}(S_n > x) \ge nV(x)(1 + o(1)). \tag{1.29}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.2. Положим в ней $K(n) = \hat{\sigma}(n)$, $y = x + tK(n)$. Тогда
$$Q_n^{(j)}(t) = \mathbf{P}\big(S_n^{(j)} \le -\hat{x}\big), \quad \hat{x} = t\hat{\sigma}(n), \quad S_n^{(j)} = S_n - \xi_j.$$

Ввиду условия $[\mathrm{U}_1]$ при любом фиксированном t

$$n\widehat{V}(\hat{x}) = n\widehat{V}(t\hat{\sigma}(n)) \sim t^{-\check{\alpha}}, \quad \check{\alpha} = \min(\alpha, \beta).$$

Здесь правая часть сходится к 0 при $t \to \infty$ и, стало быть, при достаточно больших t применима теорема 1.1, в силу которой

$$Q_n^{(j)}(t) \le cn\widehat{V}(\hat{x}) \le c_1 t^{-\check{\alpha}} \to 0.$$

Так как, кроме того, $n\overline{F}(y) \to 0$ при $t \to \infty$, получаем (1.28).

Неравенство (1.29) очевидным образом следует из (1.28), поскольку при $t \to \infty$, $t{=}o\big(\frac{x}{\hat{\sigma}(n)}\big)$ и выполнении условий теоремы $x \sim y$, $\overline{F}(y) \le V(y) \sim V(x)$.

Теорема доказана.

Пример 1.2. Пусть $\xi_i = c_i\zeta_i$, где ζ_i независимы и имеют одно и то же распределение F_ζ, $\mathbf{E}\zeta_i = 0$, $F_\zeta([t,\infty)) \le V_\zeta(t) = Lt^{-\alpha}$, $\alpha \in (1,2)$, $F_\zeta((-\infty,-t]) \le V_\zeta(t)$ для $t \ge T_1$ при некотором T_1. Тогда $V_i(t) = V_\zeta\big(\frac{t}{c_i}\big)$, $W_i(t) \le V_\zeta\big(\frac{t}{c_i}\big)$ при $t \ge c_i T_1$.

Если $c_* = \min\limits_{i\le n} c_i \ge c_- > 0$, $c^* = \max\limits_{i\le n} c_i < c_+ < \infty$, где $c_\pm$ от n не зависят, то, очевидно, условия [U] и [J] выполнены.

Пусть теперь $c_i \downarrow 0$ при $i \to \infty$. Тогда $\xi_i \underset{p}{\to} 0$. Условия [U], очевидно, выполнены (для $t \ge c_i T_1 \to 0$ при $i \to \infty$ функции V_i и W_i являются чисто степенными).

Далее, полагая для простоты $T_1 = 1$, $c_i \le 1$, получим

$$J_i^V(1) = \int\limits_0^1 uV_i(u)\,du = c_i^2 \int\limits_0^{t/c_i} vV_\zeta(v)\,dv \le c_i^2\left(\frac{1}{2} + L\int\limits_1^{t/c_i} v^{1-\alpha}\,dv\right) \le \frac{c_i^2}{2} + \frac{Lc_i^\alpha}{2-\alpha} \le bc_i^\alpha$$

при $b = \frac{1}{2} + \frac{L}{2-\alpha}$. Поэтому при $t \ge 1$

$$V_i(t) = Lt^{-\alpha}c_i^\alpha \ge \frac{L}{b}J_i^V(1)t^{-2},$$

что доказывает неравенство (1.5) условия [J]. Таким образом, условия [U], [J] выполнены, и для последовательности $\xi_i = c_i\zeta_i$ справедливы утверждения теорем 1.1, 1.3 и их следствий.

Если $c_i \uparrow \infty$ при $i \to \infty$, то условия [U], [J], вообще говоря, не выполнены. Однако задачу в этом случае можно в известной мере свести к предыдущей. Введем новые независимые случайные величины

$$\xi_i^* = \frac{\xi_{n-i+1}}{c_n} = \frac{\zeta_{n-i+1}c_{n-i+1}}{c_n}, \quad i = 1,\dots,n,$$

так что $\xi_1^* = \zeta_n \underset{d}{=} \zeta_1$, $\xi_2^* = \zeta_{n-1}\frac{c_{n-1}}{c_n}, \dots$, и мы вновь имеем представление вида $\xi_i^* = c_i^*\zeta_i$ с убывающими коэффициентами $c_i^* = \frac{c_{n-i}}{c_n}$, но уже «в схеме серий», так как c_i^* зависят от n. При этом

$$S_n^* = \sum_{i=1}^n \xi_i^* = \frac{S_n}{c_n},$$

$$\mathbf{P}(S_n > x) = \mathbf{P}\big(S_n^* > x^*\big) \quad \text{при } x^* = \frac{x}{c_n}.$$

§ 2. Асимптотика вероятности пересечения произвольной удаленной границы

Применительно к прямолинейным горизонтальным границам и к распределению S_n нужную нам асимптотику можно получить из оценок предыдущего параграфа.

Из теорем 1.1, 1.3 вытекает

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbf{E}\xi_j = 0$ *и усредненное распределение* F *удовлетворяет условиям* $[<,=]_{\mathrm{U}}$, [J].

1. *Если* $W(t) < cV(t)$, $x \gg \sigma(n) = V^{(-1)}\left(\frac{1}{n}\right)$ $(nV(x) \to 0)$, *то*

$$\mathbf{P}(S_n > x) = nV(x)(1 + o(1)), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) = nV(x)(1 + o(1)). \tag{2.2}$$

2. *Если* $W(t) > cV(t)$, $c > 0$, *при всех достаточно больших* t, *то соотношения* (2.1), (2.2) *сохранятся для* n *и* x *таких, что*

$$nW\left(\frac{x}{\ln x}\right) < c.$$

Утверждению теоремы можно придать равномерный характер такой же, как в теореме 1.1. Если $n \to \infty$, то вместо [U] надо использовать условие $[\mathrm{U}^\infty]$ (см. замечание 1.1).

Утверждение теоремы 2.1 можно обобщить на случай произвольных границ.

Для сокращения записи введем в рассмотрение, как и в [7], следующие условия.

[Q] *Выполнено хотя бы одно из двух условий:*

$[\mathrm{Q}_1]$ $W(x) \le cV(x)$, $nV(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$;

$[\mathrm{Q}_2]$ $n\widehat{V}\left(\frac{x}{\ln x}\right) < c$,

где, как и прежде, $\widehat{V}(t) = \max(V(t), W(t))$.

Условие [Q] для усредненных распределений предполагалось выполненным в пп. 1, 2 теоремы 2.1.

Рассмотрим теперь произвольную границу $\{g(k)\}$ и предположим, что

$$\min_{k \le n} g(k) = cx, \quad c > 0, \tag{2.3}$$

где c от n (или другого параметра, характеризующего схему серий) не зависит. Класс границ, удовлетворяющих (2.3), обозначим через $\mathscr{G}_{x,n}$. Мы будем изучать асимптотику вероятности $\mathbf{P}(G_n)$ события

$$G_n = \{\max_{k \le n}(S_k - g(k)) > 0\}.$$

В случае произвольных границ одних условий на усредненные распределения оказывается недостаточным и нам потребуются также «индивидуальные» условия $[<,=]_{\mathrm{U}}$.

Теорема 2.2. *Пусть распределения* F_j *равномерно по* j *и* n *удовлетворяют условиям* $[<,=]_{\mathrm{U}}$ *(при одних и тех же* α *и* β*). Пусть, кроме того, усредненное распределение* F *удовлетворяет условиям* [Q], [J]. *Тогда*

$$\mathbf{P}(G_n) = \left[\sum_{j=1}^{n} V_j(g_*(j))\right](1 + o(1)) + O(n^2V(x)\widehat{V}(x)), \tag{2.4}$$

где $g_*(j) = \min\limits_{k \geq j} g(k)$, *оценки* $o(\cdot)$ *и* $O(\cdot)$ *равномерны в классе границ* $\mathscr{G}_{x,n}$ *и классе* $\mathscr{F}$ *распределений* $\{F_j\}$, *удовлетворяющих условиям* [U], [Q], [J].

Из соотношения (2.4) следует, что при выполнении условия [Q] и при

$$\max_{k \leq n} g(k) < c^* x \tag{2.5}$$

выполняется

$$\mathbf{P}(G_n) \sim \sum_{j=1}^{n} V_j(g_*(j)). \tag{2.6}$$

Доказательство теоремы 2.2 вполне аналогично доказательству теоремы 2.4 в [7]. Положим, как и прежде,

$$B_j = \{\xi_j \leq y\}, \quad B = \bigcap_{j=1}^{n} B_j, \quad P = \mathbf{P}(\overline{S}_n > x; B)$$

и будем считать, не ограничивая общности, что в (2.3) $c = 1$. Так как усредненные распределения также удовлетворяют условиям $[<, =]_{\mathrm{U}}$, в силу теоремы 1.1

$$\mathbf{P}(G_n B) \leq P \leq c(nV(x))^r.$$

Следовательно, при $r = 2$

$$\mathbf{P}(G_n) = \mathbf{P}(G_n \overline{B}) + O((nV(x))^2).$$

Поэтому, как и в [7], мы получаем

$$\mathbf{P}(G_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(G_n, \xi_j > y) + O((nV(x))^2).$$

Анализ слагаемых $\mathbf{P}(G_n, \xi_j > y)$ в новых условиях также повторяет рассмотрения в [7] с небольшими очевидными изменениями, которые состоят в следующем. Обозначим $V^{(j)}(x) = \sum\limits_{k=1}^{j} V_k(x)$. Тогда вместо (96) в [7] мы будем иметь соотношение

$$\mathbf{P}(G_n, \xi_j > y) = \mathbf{P}(G_n, \xi_j > y, \overline{S}_{j-1} \leq x) + O(V^{(j)}(x) V_j(x)).$$

При том же определении количеств

$$M_{j,n} = \max_{0 \leq k \leq n-j} (S_{k+j} - g(k+j)) + g_*(j) - S_j,$$

что и в (97) в [7], мы будем вместо (98) в [7] иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G_n, \xi_j > y) = \mathbf{P}\left(S_j + M_{j,n} > g_*(j), \xi_j > y, Z_{j,n} \leq \frac{x}{2}\right) \\ + \mathbf{P}\left(S_j + M_{j,n} > g_*(j), \xi_j > y, Z_{j,n} > \frac{x}{2}\right) + O(V_j(x) V^{(j)}(x)), \end{aligned}$$

где

$$\underline{S}_n = \min_{k \leq n} S_k \leq Z_{j,n} \equiv S_{j-1} + M_{j,n} \underset{d}{\leq} \overline{S}_{n-1}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\xi_j > y, Z_{j,n} > \frac{x}{2}\right) = O(V_j(x) nV(x))$$

и аналогично [7] получаем равенство

$$\mathbf{P}(G_n, \xi_j > y) = \mathbf{P}\left(\xi_j + Z_{j,n} > g_*(j), Z_{j,n} \le \frac{x}{2}\right) + O(V_j(x)nV(x)), \qquad (2.7)$$

в котором главную часть в правой части (2.7) можно записать в виде (ср. с (102)–(105) в [7])

$$\mathbf{E}\left[V_j(g_*(j) - Z_{j,n}); Z_{j,n} \le \frac{x}{2}\right] = V_j(g_*(j))(1 + o(1)) + O(V_j(x)n\widehat{V}(x)),$$

где в силу теорем предыдущего параграфа все оценки $o(\cdot)$ и $O(\cdot)$, полученные здесь и выше, являются равномерными по классу границ $\mathscr{G}_{x,n}$ и классу $\mathscr{F}$ распределений $\{F_j\}$, удовлетворяющих условиям [U], [Q], [J] (см. замечание 1.1). Собирая полученные оценки, приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

§ 3. Асимптотика вероятности пересечения произвольной удаленной границы на неограниченном интервале времени. Оценки для времени первого прохождения

В этом параграфе мы будем рассматривать границы $\{g(k)\}$ вида

$$g(k) = x + g_k, \quad k = 1, 2, \dots, \qquad (3.1)$$

где последовательность $\{g_k\}$ определена на всей оси и заключена между двумя линейными функциями:

$$c_1ak - p_1x \le g_k \le c_2ak + p_2x, \quad p_1 < 1, \quad 0 < c_1 \le c_2 < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, \qquad (3.2)$$

постоянные c_i и p_i, $i = 1, 2$, от параметра схемы серий не зависят, а параметр $a \le a_0 = \mathrm{const}$ может сходиться к 0. Напомним, что мы рассматриваем схему серий как относительно распределений $\{F_j\}$, так и границы $\{g(k)\}$, так что последовательность $\{g_k\}$ и параметр a зависят, вообще говоря, от параметра схемы серий. В частности, если параметром схемы серий является n, то в нашем случае $a = a(n)$, а постоянные c_i и p_i в (3.2) от n не зависят. Параметр схемы серий может быть и иным; им может быть, например, параметр $a \to 0$, который в задаче об изучении переходных явлений для распределения $\overline{S}_n$ при $\mathbf{E}\xi_k < 0$ отождествляется со значением $-\mathbf{E}\xi_k = a \to 0$.

Если

$$g_n \le bx, \qquad (3.3)$$

то в теореме 2.2 главный член в правой части (2.4) будет минорироваться функцией $cnV(x)$ и будет при условии [Q] доминирующим. Поэтому в описанных выше условиях из теоремы 2.2 следует, что

$$\mathbf{P}(\max_{k\le n}(S_k - g_k) > x) \sim \sum_{j=1}^{n} V_j(x + g_{j,n}) \qquad (3.4)$$

при $g_{j,n} = \min\limits_{n\ge k\ge j} g_k$.

Но неравенство (3.3) вместе с (3.2) означает, что

$$c_1an \le (b + p_1)x.$$

Это есть дополнительное (наряду с условием [Q]) ограничение сверху на n. Остается открытым вопрос: что будет происходить при $n > \frac{(b+p_1)x}{c_1 a}$ и, в частности, при $n = \infty$? При этом результаты должны быть равномерными по $a \to 0$. В связи со сказанным в дальнейшем нам удобно будет считать, что задана бесконечная последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$, а параметр схемы серий отождествлять с a. Так что теперь если значение n неограниченно возрастает, то его следует считать функцией от a: $n = n(a) \to \infty$ при $a \to 0$.

Для того чтобы ответить на поставленные выше вопросы, нам потребуются оценки для времени первого прохождения границы $\{g(k)\}$. Здесь нам понадобятся некоторые дополнительные условия однородной мажорируемости на хвосты $\{V_j\}$. Пусть

$$V_{(1)}(x) = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} V_j(x), \quad W_{(1)}(x) = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} W_j(x), \quad n_1 = \frac{x}{a}, \tag{3.5}$$

где мы считаем для простоты, что $\frac{x}{a}$ — целое число. Упомянутое условие однородности имеет вид

[H]. *При* $n_k = 2^{k-1} n_1$ *и всех* $k = 1, 2, \dots$, $t > 0$

$$c_{(1)} V_{(1)}(t) \le \frac{1}{n_k}\sum_{j=n_k}^{2n_k} V_j(t) \le c_{(2)} V_{(1)}(t),$$

$$c_{(1)} W_{(1)}(t) \le \frac{1}{n_k}\sum_{j=n_k}^{2n_k} W_j(t) \le c_{(2)} W_{(1)}(t).$$

Пусть

$$\begin{gathered}\overline{S}_n(a) = \max_{k\le n}(S_k - ak), \quad \eta(x,a) = \min\{k : S_k - ak > x\},\\ \eta(x,a) = \infty \quad \text{на событии } \{\overline{S}_\infty(a) \le x\},\\ B_j(v) = \{\xi_j \le y + vaj\}, \quad v > 0, \quad B(v) = \bigcap_{j=1}^{n} B_j(v).\end{gathered} \tag{3.6}$$

Следующая теорема будет посвящена оценкам вероятностей $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x; B(v))$, $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$ и $\mathbf{P}\left(\infty > \eta(x,a) > \frac{xt}{a}\right)$. При $n \le n_1 = \left[\frac{x}{a}\right]$ эти оценки легко получить из теоремы 1.1, так как

$$\{\overline{S}_n > 2x\} \subset \{\overline{S}_n(a) > x\} \subset \{\overline{S}_n > x\}.$$

Поэтому мы будем считать в дальнейшем, что $n \ge n_1$.

Теорема 3.1. 1. *Пусть усредненное распределение* $F_{(1)} = \frac{1}{n_1}\sum\limits_{j=1}^{n_1} F_j$ *при* $n_1 = \left[\frac{x}{a}\right]$ *удовлетворяет условиям* $[<,<]_{\mathrm{U}}$, [Q], [J] (*при замене в двух последних* n *на* n_1). *Пусть, далее, выполнено условие* [H]. *Тогда при* $v \le \frac{1}{4r}$, $r = \frac{x}{y}$ *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x; B(v)) \le c[n_1 V_{(1)}(x)]^{r_0}, \tag{3.7}$$

где $r_0 = \frac{r}{1+vr} \ge \frac{4r}{5}$, $r > \frac{5}{4}$.

Если $a \ge a_0 = \mathrm{const} > 0$, *то, не ограничивая общности, можно считать, что выполнено условие* $[\mathrm{Q}_1]$ *при замене в нем* n *на* n_1.

Неравенство (3.7) *при замене в его правой части* $V_{(1)}(x)$ *на*

$$\widehat{V}_{(1)}(x) = \max(V_{(1)}(x), W_{(1)(x)})$$

сохранится при любых значениях a *без предположения о выполнении* [Q].

2. *При выполнении условий п.* 1

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \le cn_1 V_{(1)}(x), \tag{3.8}$$

и при ограниченных или растущих достаточно медленно значениях t

$$\mathbf{P}\left(\infty > \eta(x,a) > \frac{xt}{a}\right) \le cn_1 V_{(1)}(x) t^{1-\alpha}. \tag{3.9}$$

Если $t \to \infty$ *вместе с* x *произвольным образом, то неравенство* (3.9) *останется справедливым, если показатель* $1-\alpha$ *заменить на* $1-\alpha+\varepsilon$ *при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$.

Применительно к неравенствам (3.8), (3.9) *остаются справедливыми утверждения, приведенные в п.* 1 *после неравенства* (3.7).

Все приведенные неравенства равномерны по a *и по классам распределений* $\{F_j\}$ *и границ* $\{g(k)\}$, *удовлетворяющих названным в п.* 1 *условиям равномерности. Другими словами, постоянные* c *в* (3.7)–(3.9) *зависят лишь от параметров, характеризующих классы* $\{F_j\}$ *и* $\{g(k)\}$.

Доказательство. При

$$n_0 = 0, \quad n_k = 2^{k-1} n_1 = \frac{x 2^{k-1}}{a}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

имеем

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x; B(v)) \le \sum_{k=0}^{\infty} p_k, \quad p_k = \mathbf{P}(\eta(x,a) \in (n_k, n_{k+1}]; B(v)). \tag{3.10}$$

Отметим предварительно, что условия [U], [Q], [J] теоремы 1.1 на интервалах времени $[0, n_k]$, $[n_k, 2n_k]$ при $n_k = n_1 2^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, в силу условий [H] будут выполнены. Рассмотрим, например, условия [J] на интервале $[0, n_k]$, т. е. при $n = n_k$. В силу [H] и условия [J] на $[0, n_1]$ имеем

$$J^V(T_\delta) = \int_0^{T_\delta} uV(u)\,du \le c_1 \int_0^{T_\delta} uV_{(1)}(u)\,du \le c_2 V_{(1)}(T_\delta) \le c_3 V(T_\delta).$$

Аналогичное неравенство справедливо для J^W. Это доказывает, что выполнено [J] на $[0, n_k]$.

Положим $x_k = an_k = x2^{k-1}$, $y_k = y + avn_k = y + xv2^{k-1}$. При любом k таком, что $n_k \le n$, справедливо

$$B(v) \subset \bigcap_{j=1}^{n_k} \{\xi_j \le y + van_k\} = \bigcap_{j=1}^{n_k} \{\xi_j \le y + xv2^{k-1}\} \equiv B^{(k)},$$

и, стало быть, по теореме 1.1 при $n_1 V_{(1)}(x) = \frac{x}{a} V_{(1)}(x) \le 1$

$$p_0 = \mathbf{P}(\overline{S}_{n_1}(a) > x, B(v)) \le \mathbf{P}(\overline{S}_{n_1} > x, B^{(1)}) \le c(n_1 V_{(1)}(x))^{r_0},$$

$$r_0 = \frac{x_1}{y_1}, \quad \text{где } x_1 = x, \quad y_1 = y + vx = y(1+vr), \quad \text{так что } r_0 = \frac{r}{1+vr}.$$

Аналогично при $k \geq 1$ (выполнение условия [Q] для $n_k = n_1 2^{k-1}$, $x_k = x2^{k-1}$ следует из выполнения этого условия для n_1, $x_1 = x$ и условия [H])

$$\begin{aligned} p_k &= \mathbf{P}(\eta(x) \in (n_k, n_{k+1}], B(v)) \\ &\leq \mathbf{P}\left(S_{n_k} > \frac{an_k}{2}, B^{(k)}\right) + \mathbf{P}\left(S_{n_k} \leq \frac{an_k}{2}\right)\mathbf{P}\left(\overline{S}_{n_k} > x + \frac{an_k}{2}; \bigcap_{j=1}^{n_k}\{\xi_j \leq y_{k+1}\}\right) \\ &= \mathbf{P}(S_{n_k} > x2^{k-2}; B^{(k)}) + \mathbf{P}\left(\overline{S}_{n_k} > x(1+2^{k-2}); \bigcap_{j=1}^{n_k}\{\xi_j \leq y_{k+1}\}\right) \\ &\leq c_1[n_k V_{(1)}(x2^{k-2})]^{r_k} + c_2[n_k V_{(1)}(x(1+2^{k-2}))]^{r'_k}, \quad (3.11) \end{aligned}$$

где

$$r_k = \frac{x2^{k-2}}{y_k} = \frac{x2^{k-2}}{1+vr2^{k-1}} = \frac{r2^{k-2}}{1+vr2^{k-1}} \uparrow \frac{1}{2v},$$

$$r'_k = \frac{x(1+2^{k-2})}{y_{k+1}} = \frac{r(2^{k-2}+1)}{1+vr2^k} \uparrow \frac{1}{4v}$$

при $k \to \infty$, $v \leq \frac{1}{4r}$. При этом $r_k \geq r_0 = \frac{r}{1+vr}$, $r'_k \geq r'_1 = \frac{3r}{2(1+2vr)} \geq r$ при $k \geq 1$, $v \leq \frac{1}{4r}$. Так что $\min(r_k, r'_k) = r_0 = \frac{r}{1+vr} \geq \frac{4r}{5}$ при $v \leq \frac{1}{4r}$. В итоге получаем, что при $\varepsilon < \alpha - 1$, $v \leq \frac{1}{4r}$ и всех k

$$p_k \leq c\left[\frac{x2^k}{a}V_{(1)}(x2^k)\right]^{r_0} \leq c_1\left[\frac{x}{a}V_{(1)}(x)2^{k(1-\alpha+\varepsilon}\right]^{r_0}.$$

Поэтому при $n = n_k$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x; B(v)) = \sum_{j=0}^{k-1} p_j \leq \sum_{j=0}^{\infty} p_j \leq c_2\left[\frac{xV_{(1)}(x)}{a}\right]^{r_0}, \quad r_0 > 1 \text{ при } r > \frac{5}{4}.$$

Это доказывает неравенство (3.7).

Покажем теперь, что при $a \geq a_0 > 0$, не ограничивая общности, можно считать выполненным условие $W(t) < cV(t)$. Действительно, введем в рассмотрение случайные величины

$${}^{(h)}\xi_j = \max(-h, \xi_j) + a_h, \quad a_h = \mathbf{E}(\xi_j + h; \xi_j \leq -h) < 0,$$

являющиеся центрированными «срезками» ξ_j на уровне $-h$, $h > 0$, и снабдим обозначения $\overline{S}_n(a)$, соответствующие величинам ${}^{(h)}\xi_j$, верхним левым индексом (h). Тогда очевидно, что

$$\overline{S}_n(a) \leq {}^{(h)}\overline{S}_n(a + a_h),$$

где $a_h \to 0$ при $h \to \infty$, и все условия вида $[<,<]_{\mathrm{U}}$, $W(t) < cV(t)$ для ${}^{(h)}\xi_j$ выполнены. Это дает нам требуемую оценку для $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$ при «чуть уменьшенном» значении a.

Последнее утверждение п. 1 теоремы очевидным образом вытекает из приведенных выше рассуждений и теоремы 1.1.

Доказательство п. 2 теоремы следует тому же пути. Совершенно аналогично предыдущему находим при $n > x/a$, $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta(x,a) \in (n_k, n_{k+1}]) &\leq \mathbf{P}\left(S_{n_k} > \frac{an_k}{2}\right) + \mathbf{P}\left(S_{n_k} \leq \frac{an_k}{2}\right)\mathbf{P}\left(\overline{S}_{n_k} > x + \frac{an_k}{2}\right) \\ &\leq \mathbf{P}(S_{n_k} > x2^{k-2}) + \mathbf{P}(\overline{S}_{n_k} > x(1+2^{k-2})) \leq cn_k V(x2^k); \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(\infty > \eta(x) > n_k) = \mathbf{P}\left(\infty > \eta(x,a) > \frac{x2^{k-1}}{a}\right) \le c_1 \frac{x2^{k-1}}{a} V_{(1)}(x2^k).$$

При любом фиксированном t это дает

$$\mathbf{P}\left(\infty > \eta(x,a) > \frac{xt}{a}\right) \le c_2 t^{1-\alpha} \frac{xV_{(1)}(x)}{a}.$$

Если $t \to \infty$, то в силу свойств правильно меняющихся функций в приведенном неравенстве $t^{1-\alpha}$ можно заменить на $t^{1-\alpha+\varepsilon}$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$.

Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия п.* 1 *теоремы* 3.1, *за исключением условия* [Q]. *Тогда справедливы неравенства* (3.8), (3.9) *при замене в правых частях* $V_{(1)}$ *на* $\widehat{V}_{(1)}$.

Утверждение очевидным образом вытекает из (3.8), (3.9), если воспользоваться единой мажорантой $\widehat{V}_{(1)} = \max(V_{(1)}, W_{(1)})$ для обоих хвостов. Условия [Q] при этом всегда будут выполнены (условие о малости $n_1 V_{(1)}(x)$ можно не оговаривать, так как в противном случае рассматриваемые неравенства теряют смысл).

Положим

$$\eta_g(x) = \min\{k : S_k - g_k > x\}.$$

Следствие 3.2. *Пусть выполнены условия п.* 1 *теоремы* 3.1 *и условия* (3.1), (3.2). *Тогда при ограниченных или достаточно медленно растущих значениях* t

$$\mathbf{P}\left(\infty > \eta_g(x) > \frac{xt}{a}\right) \le \frac{cxV_{(1)}(x)t^{1-\alpha}}{a}. \tag{3.12}$$

Если $t \to \infty$ *произвольным образом, то неравенство* (3.12) *остается справедливым, если показатель* $1-\alpha$ *в нем заменить на* $1-\alpha+\varepsilon$ *при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Следствие вытекает из теоремы 3.1 и неравенства (см. (3.2))

$$\mathbf{P}\left(\infty > \eta_g(x) > \frac{xt}{a}\right) \le \mathbf{P}\left(\infty > \eta(x(1-p_1), c_1 a) > \frac{xt}{a}\right).$$

Остается заметить, что правая часть в (3.9) изменяется на асимптотически постоянный множитель при замене в ней x и a соответственно на $x(1-p_1)$ и $c_1 a$.

Положим

$$\widehat{V}_{(1)} = \max(V_{(1)}(x), W_{(1)}), \quad g_k^* = \min_{j \ge k} g_j = g_{k,\infty}$$

и заметим, что $g_k^* \uparrow$, $g_k^* \le g_{k,n} \le g_k$, и что (3.2) влечет

$$c_1 ak - p_1 x \le g_k^* \le c_2 ak + p_2 x. \tag{3.13}$$

Из теоремы 2.2 и следствия 3.1 мы получим следующее утверждение, в котором параметр схемы серий отождествлен с a.

Теорема 3.2. *Пусть распределения F_j равномерно по j и n удовлетворяют условиям $[<,=]_{\mathrm{U}}$ при одних и тех же α и β. Пусть, кроме того, выполнены условия* (3.1), (3.2) *и* [H], [Q] *для усредненного распределения $F_{(1)}$ (при $n = n_1 = \left[\frac{x}{a}\right]$). Пусть, далее,*

$$\frac{x}{a}\widehat{V}_{(1)}(x) \le \delta(x) \to 0 \quad \textit{при} \ \ x \to \infty. \tag{3.14}$$

Тогда

$$\mathbf{P}(\sup_{k\ge 0}(S_k - g_k) > x) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} V_j\big(x + g_j^*\big)\right](1 + o(1)), \tag{3.15}$$

где оценка $o(1)$ равномерна по $a \le a_0 = \mathrm{const}$ и по классам распределений $\{F_j\}$ и границ $\{g(k)\}$, удовлетворяющим условиям теоремы.

Доказательство. Для простоты будем считать, что $\frac{x}{a}$ целое. Положим

$$n = \frac{xt}{a} \equiv n_1 t, \quad N = \frac{xT}{a} \equiv n_1 T.$$

Из условия (3.2) вытекает, что для любого $t \ge 1$ и

$$T = \frac{c_2 t + p_1 + p_2}{c_1} > t$$

при $j \le n$ выполняется

$$g_{j,N} = g_{j,\infty} = g_j^*. \tag{3.16}$$

Далее, при любом фиксированном T имеем

$$\mathbf{P}(\sup_{k\ge 0}(S_k - g_k) > x) = \mathbf{P}(\eta_g(x) \le N) + \mathbf{P}(\infty > \eta_g(x) > N), \tag{3.17}$$

где по теореме 2.2 для первого слагаемого в правой части (3.17) справедливо приближение (2.4), в силу которого (см. также (3.16) и [H])

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\eta_g(x) \le N) \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n} V_j(x + g_j^*) + \sum_{j=n+1}^{N} V_j(x + g_{j,N})\right](1 + o(1)) + O(N^2 V_{(1)}(x)\widehat{V}_{(1)}(x)), \end{aligned} \tag{3.18}$$

где остаточный член $O(\cdot)$ по условию (3.14) есть $o\left(\frac{x}{a}V_{(1)}(x)\right)$. Так как $g_{j,N} \ge g_j^*$, в силу следствия 3.2 из (3.17), (3.18) получаем

$$\mathbf{P}(\sup_{k\ge 0}(S_k - g_k) > x) \le \left[\sum_{j=1}^{\infty} V_j(x + g_j^*)\right](1 + o(1)) + o\left(\frac{x}{a}V_{(1)}(x)\right) + \frac{cxV_{(1)}(x)T^{1-\alpha}}{a}. \tag{3.19}$$

С другой стороны,

$$\mathbf{P}(\sup_{k\ge 0}(S_k - g_k) > x) \ge \left[\sum_{j=1}^{n} V_j(x + g_j^*)\right](1 + o(1)) + o\left(\frac{x}{a}V_{(1)}(x)\right). \tag{3.20}$$

Поэтому, чтобы доказать (3.15), нам достаточно убедиться, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} V_j\big(x + g_j^*\big) > c\frac{x}{a}V_{(1)}(x), \tag{3.21}$$

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} V_j\big(x+g_j^*\big) < c\frac{xt^{1-\alpha}}{a}V_{(1)}(x), \tag{3.22}$$

т. е. сумма в левой части (3.22) выбором t может быть сделана сколь угодно малой по сравнению с левой частью (3.21) равномерно по названным классам границ и распределений. Так как два последних слагаемых в правой части (3.19) выбором t (или, что то же, T) также могут быть сделаны сколь угодно малыми по отношению к $\sum\limits_{j=1}^{\infty} V_j\big(x+g_j^*\big)$, то из (3.19), (3.20) будет следовать (3.15).

Докажем соотношение (3.21). Оно следует из свойств последовательности g_j^* и неравенств

$$\sum_{j=1}^{\infty} V_j\big(x+g_j^*\big) > \sum_{j=1}^{n_1} V_j\big(x+g_{n_1}^*\big) \geq \sum_{j=1}^{n_1} V_j(x(c_2+p_2)) \geq \frac{cx}{a}V_{(1)}(x).$$

Докажем теперь (3.22). В силу (3.13) и [H]

$$\begin{aligned}\sum_{j=n+1}^{\infty} V_j\big(x+g_j^*\big) &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} V_j(x(1-p_1)+c_1aj)\\ &= \sum_{n+1}^{2n} + \sum_{j+2n+1}^{4n} + \dots \leq \frac{c_{(2)}xt}{a}\sum_{k=0}^{\infty} 2^k V_{(1)}(x(1-p_1)+2^k c_1tx).\end{aligned}$$

Но по условиям [U] функция $V_{(1)}(x)$ ведет себя как правильно меняющаяся функция, так что

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k V_{(1)}(x(1-p_1)+2^k c_1tx) \sim cV_{(1)}(x(1-p_1+c_1t))$$

(чтобы получить более формальное доказательство этого соотношения, надо рассмотреть при $n_1 = \frac{x}{a}$ сумму рядов

$$\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=0}^{\infty} 2^k V_j(x(1-p_1)+2^k c_1tx)$$

и воспользоваться при каждом j условиями [U]).

Из этих соотношений находим

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} V_j\big(x+g_j^*\big) \leq \frac{cxtV_{(1)}(x)}{a(1-p+ct)^{\alpha}}.$$

Это доказывает (3.22).

Требуемые утверждения, а вместе с ними и теорема 3.2 доказаны.

Если условия однородности хвостов и границ несколько усилить, то можно получить более простую запись правой части в (3.15). Введем в рассмотрение условие

[H_Δ] *Пусть выполнено* [H] *и для любого фиксированного* $\Delta > 0$ *и* $n_\Delta = \left[\frac{x\Delta}{a}\right] = [n_1\Delta]$ *существуют мажоранты* V_j, W_j *такие, что при* $x \to \infty$ *равномерно по* k *и* $a \leq a_0$ *выполнены соотношения*

$$\frac{1}{n_\Delta}\sum_{j=kn_\Delta+1}^{(k+1)n_\Delta} V_j(x) \sim V_{(1)}(x), \tag{3.23}$$

$$\frac{1}{n_\Delta}\sum_{j=kn_\Delta+1}^{(k+1)n_\Delta} W_j(x) \le cW_{(1)}(x), \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{n_\Delta}(g_{(k+1)n_\Delta} - g_{kn_\Delta}) \sim ga. \tag{3.25}$$

Следствие 3.3. *Предположим, что усредненное распределение*

$$F_{(1)} = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} F_j$$

удовлетворяют условиям $[<,=]_{\mathrm{U}}$, [J] *и* [Q] *при* $n = n_1$. *Пусть, кроме того, выполнено условие* $[\mathrm{H}_\Delta]$ *и для определенности* $g_1 = o(x)$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(\sup_{k\ge 0}(S_k - g_k) > x) \sim \frac{xV_{(1)}(x)}{ga(\alpha-1)} \sim \frac{1}{ga}\int_x^\infty V_{(1)}(u)\,du). \tag{3.26}$$

Отметим, что если g_k возрастают быстрее, чем линейным образом, то условие (3.2) будет не выполнено и асимптотика левой части в (3.26) может быть иной.

Доказательство следствия 3.3. Заметим предварительно, что соотношения (3.25) и $g_1 = o(x)$ выполнены также и для последовательности $\{g_j^*\}$. Далее, в силу (3.24), (3.25) при $x \to \infty$ имеем

$$\sum_{j=1}^\infty V_j\big(x+g_j^*\big) = \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=kn_\Delta+1}^{(k+1)n_\Delta} V_j\big(x+g_j^*\big) \le \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=kn_\Delta+1}^{(k+1)n_\Delta} V_j\big(x+g_1^*+n_\Delta kga\big)$$

$$\sim n_\Delta \sum_{k=0}^\infty V_{(1)}\big(x+g_1^*+n_\Delta kga\big) = \frac{x\Delta}{a}\sum_{k=0}^\infty V_{(1)}(x(1+o(1)+\Delta kg))$$

$$\sim \frac{xV_{(1)}(x)}{a}\sum_{k=0}^\infty (1+o(1)+\Delta kg)^{-\alpha}\Delta$$

$$= \frac{xV_{(1)}(x)}{ga}\int_0^\infty (1+v)^{-\alpha}\,dv(1+\varepsilon(\Delta)) = \frac{xV_{(1)}(x)}{ga(\alpha-1)}(1+\varepsilon(\Delta)), \tag{3.27}$$

где $\varepsilon(\Delta) \to 0$ при $\Delta \to 0$. Аналогичное асимптотическое неравенство справедливо в обратную сторону. Поскольку левая часть в (3.27) от Δ не зависит, то

$$\sum_{j=1}^\infty V_j(x+g_j^*) \sim \frac{xV_{(1)}(x)}{ga(\alpha-1)}. \tag{3.28}$$

Так как условия теоремы 3.2 здесь выполнены, из (3.28) и (3.15) вытекает (3.26).

Следствие доказано.

Из следствия 3.3 получим

Следствие 3.4. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *одинаково распределены и выполнены условия* $[<,=]_{\mathrm{U}}$ *и условия* [J], [Q] *при* $n = n_1 = \frac{x}{a}$. *Пусть, кроме того,* $\frac{x}{a}\widehat{V}(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_\infty(a) > x) \sim \frac{xV(x)}{a(\alpha-1)}.$$

Ясно, что утверждениям следствий 3.3, 3.4 можно придать равномерный характер — так же, как в теореме 3.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Heyde C. C.* On large deviation probabilities in the case of attraction to a non-normal stable law // Sankhyä. Ser. A. 1968. V. 30. P. 253–258.
2. *Heyde C. C.* On the maximum of sums of random variables and the supremum functional for stable processes // J. Appl. Probab. 1969. V. 6. P. 419–429.
3. *Годованчук В. В.* Вероятности больших уклонений для сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения устойчивого закона // Теория вероятностей и ее применения. 1978. Т. 23, № 3. С. 624–630.
4. *Пинелис И. Ф.* Об асимптотической эквивалентности вероятностей больших уклонений суммы и максимума независимых случайных величин // Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние. 1985. Т. 5. С. 144–173.
5. *Нагаев С. В.* Об асимптотическом поведении вероятностей односторонних больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения. 1981. Т. 26, № 2. С. 369–372.
6. *Боровков А. А.* Оценки для распределения сумм и максимумов сумм случайных величин при невыполнении условия Крамера // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 997–1038.
7. *Borovkov A. A., Boxma O. J.* Refined asymptotics for large deviations of sums and maxima of sequential sums of random variables with heavy tails // Siberian Adv. Math. 2003. V. 13, N 1. P. 1–31.
8. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1972.
9. *Cohen J. W.* Some results on regular variation for distributions in queueing and fluctuation theory // J. Appl. Probab. 1973. V. 10. P. 343–353.
10. *Pakes A. G.* On the tails of waiting time distributions // J. Appl. Probab. 1975. V. 12. P. 555–564.
11. *Veraverbeke N.* Asymptotic behaviour of Wiener–Hopf factors of a random walk // Stochastic Process. Appl. 1977. V. 5. P. 27–37.
12. *Коршунов Д. А.* Вероятности больших уклонений максимумов сумм независимых слагаемых с отрицательным средним и субэкспоненциальным распределением // Теория вероятностей и ее применения. 2001. Т. 46, № 2. С. 387–397.
13. *Фук Д. Х., Нагаев С. В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1971. Т. 16, № 4. С. 660–675.

Статья поступила 21 сентября 2004 г.

Боровков Александр Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
borovkov@math.nsc.ru