Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 517.958

СИММЕТРИИ ФАКТОР–СИСТЕМ

Ю. Ю. Багдерина

Аннотация: Рассматривается проблема появления дополнительных групповых свойств у фактор-системы, возникающей при построении инвариантного решения системы уравнений в частных производных. Установлено достаточное условие, при котором фактор-система не имеет других симметрий, кроме фактора нормализатора подалгебры, по которой строится инвариантное решение.

Ключевые слова: инвариантные решения уравнений в частных производных, фактор-система, фактор-алгебра, симметрии определяющих уравнений.

§ 1. Постановка задачи

Свойство системы E дифференциальных уравнений в частных производных быть инвариантной относительно группы Ли преобразований широко применяется при отыскании классов точных решений уравнений E. При построении по подалгебре H инвариантного решения системы E задача сводится к решению фактор-системы E/H, состоящей из уравнений относительно функций, зависящих от меньшего числа независимых переменных. Если фактор-система E/H является системой дифференциальных уравнений, то можно вычислить допускаемую системой E/H группу и использовать ее для интегрирования самой фактор-системы. Часть допускаемых фактор-системой симметрий всегда известна [1].

Теорема 1. *Пусть H — подалгебра алгебры Ли L, допускаемой системой E, $\mathrm{Nor}_L H$ — нормализатор подалгебры H в L. Тогда фактор-система E/H допускает фактор-алгебру $\mathrm{Nor}_L H/H$.*

В большинстве случаев других симметрий, кроме алгебры Ли $\mathrm{Nor}_L H/H$, у фактор-системы нет. Для любой системы E, допускающей алгебру Ли L, справедлива лемма ЛОТ [2].

Лемма 1. *Инвариантное решение фактор-системы E/H, построенное по подалгебре $H' \subset \mathrm{Nor}_L H/H$, будет одновременно инвариантным решением исходной системы E, построенным по некоторой подалгебре $M \subset \mathrm{Nor}_L H$ такой, что H' является фактор-алгеброй M/H.*

Таким образом, в случае, когда допускаемая фактор-системой E/H алгебра Ли не имеет расширений по сравнению с $\mathrm{Nor}_L H/H$, переход к системе E/H и поиск для нее инвариантных решений большого интереса не представляют. Это не дает каких-то новых решений исходной системы E, которые нельзя было бы получить как инвариантные относительно некоторой подалгебры $M \subset L$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код регионального проекта Агидель 05–01–97910).

Новые решения системы E могут появиться, если алгебра Ли, допускаемая фактор-системой E/H, шире, чем $\mathrm{Nor}_L\, H/H$. Таких примеров известно достаточно много: это редуцированные относительно симметрии вращения уравнения Эйлера [3] и уравнения движения неоднородной жидкости [4], некоторые подмодели уравнений газовой динамики [2, 5–7].

Ставится задача: не вычисляя алгебру Ли, допускаемую фактор-системой E/H, т. е. не решая соответствующие определяющие уравнения $D(E/H)$, определить, будет ли эта алгебра Ли шире, чем $\mathrm{Nor}_L\, H/H$.

В работе предложено достаточное условие (теорема 3), при котором наиболее широкая алгебра Ли, допускаемая фактор-системой E/H, совпадает с $\mathrm{Nor}_L\, H/H$. При этом существенно используется свойство симметрии определяющих уравнений $D(E)$ относительно координат допускаемого системой E оператора алгебры Ли L [8]. Все рассмотрения носят локальный характер, а отображения считаются гладкими, как принято в групповом анализе дифференциальных уравнений.

Любой подалгебре $H \subset L$ соответствует подалгебра $\mathscr{H}$, допускаемая определяющими уравнениями $D(E)$. Базис функционально независимых инвариантов подалгебры $\mathscr{H}$ состоит из инвариантов подалгебры H и из функций, которые являются в точности координатами оператора алгебры Ли, допускаемого фактор-системой E/H. Показано, что если построить по подалгебре $\mathscr{H}$ частично инвариантное решение определяющих уравнений $D(E)$, то как частное решение этих уравнений оно не может быть шире $\mathrm{Nor}_L\, H/H$. Сформулированное в теореме 3 условие основано на сравнении инвариантной системы $D(E)/\mathscr{H}_{\mathrm{inv}}$, возникающей при построении этого частично инвариантного решения, и определяющих уравнений $D(E/H)$ относительно координат допускаемого фактор-системой E/H оператора алгебры Ли. Таким образом, задача сводится к подходящей замене переменных в системе $D(E)$ и ее сравнении с системой $D(E/H)$. При этом не требуется решать или приводить в инволюцию систему определяющих уравнений $D(E/H)$.

§ 2. Групповые свойства определяющих уравнений

Пусть система E задана на базовом пространстве $\mathbb{R}^{n+m}(z)$, $z = (x, u)$, зависимых переменных $u = (u^1, \dots , u^m)$ и независимых переменных $x = (x^1, \dots , x^n)$. Координаты $\xi(z) = (\xi^1(z), \dots, \xi^{n+m}(z))$ оператора $X = \xi^i(z)\partial_{z^i}$, допускаемого системой E, находятся как решение системы определяющих уравнений $D(E)$ [1]. Пусть решение $\xi(z)$ уравнений $D(E)$ известно и операторы

$$X_\alpha = \xi^i_\alpha(z)\partial_{z^i}, \quad \alpha = 1, \dots, R, \tag{1}$$

образуют базис наиболее широкой алгебры Ли L, допускаемой системой E.

В силу линейности и однородности определяющих уравнений относительно координат ξ искомого оператора X система $D(E)$ инвариантна относительно действия оператора однородного растяжения $\xi^i\partial_{\xi^i}$ и операторов вида

$$Y_\alpha = \xi^i_\alpha(z)\partial_{\xi^i}, \quad \alpha = 1, \dots, R, \tag{2}$$

порождаемых множеством решений $\{\xi_\alpha(z), \alpha = 1, \dots, R\}$ уравнений $D(E)$ [1]. В работе Л. В. Овсянникова [8] доказано, что кроме этих симметрий система $D(E)$ допускает операторы

$$Z_\alpha = \xi^i_\alpha(z)\partial_{z^i} + \sum_{j=1}^{n+m} \xi^j \frac{\partial \xi^i_\alpha(z)}{\partial z^j}\partial_{\xi^i}, \quad \alpha = 1, \dots, R.$$

Используя формальный оператор

$$\Omega = \xi^j \partial_{z^j},$$

симметрии Z_α можно представить в виде

$$Z_\alpha = X_\alpha + \Omega \xi^i_\alpha(z) \partial_{\xi^i}, \quad \alpha = 1, \dots, R. \tag{3}$$

Алгебра Ли L характеризуется набором структурных констант $C^\gamma_{\alpha\beta}$, с которыми для базисных операторов (1) выполняются коммутационные соотношения

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{R} C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, R.$$

Нетрудно видеть, что для операторов (2), (3), действующих в пространстве $\mathbb{R}^{2(n+m)}(z, \xi)$ зависимых переменных ξ и независимых переменных z, с теми же постоянными $C^\gamma_{\alpha\beta}$ имеют место соотношения

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = 0, \quad [Z_\alpha, Z_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{R} C^\gamma_{\alpha\beta} Z_\gamma, \quad [Z_\alpha, Y_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{R} C^\gamma_{\alpha\beta} Y_\gamma, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, R. \tag{4}$$

Из (4) следует, что операторы (2), (3) образуют базис алгебры Ли $\mathscr{L}$. Для дальнейшего изложения необходима только алгебра $\mathscr{L}$, хотя она и не является наиболее широкой алгеброй Ли, допускаемой определяющими уравнениями $D(E)$.

По определению (см. [1]) если $H = \{X_\alpha, \alpha = 1, \dots, r\}$ — подалгебра алгебры Ли L, то ее нормализатор $\operatorname{Nor}_L H = \{X_\beta, \beta = 1, \dots, s, s \geq r\}$ — наиболее широкая подалгебра в L, для которой H является идеалом, т. е. для операторов $X_\beta \in \operatorname{Nor}_L H$ выполнены соотношения

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma, \quad \alpha = 1, \dots, r, \ \beta = 1, \dots, s. \tag{5}$$

Отметим некоторые свойства операторов (2), (3).

Лемма 2. 1. *Если $H = \{X_\alpha, \alpha = 1, \dots, r\}$ — подалгебра алгебры Ли L, допускаемой системой E, то $\mathscr{H} = \{Y_\alpha, Z_\alpha, \alpha = 1, \dots, r\}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathscr{L}$, допускаемой определяющими уравнениями $D(E)$.*

2. *Если $\operatorname{Nor}_L H = \{X_\beta, \beta = 1, \dots, s\}$ — нормализатор подалгебры H в L, то нормализатором подалгебры $\mathscr{H}$ в $\mathscr{L}$ является $\operatorname{Nor}_{\mathscr{L}} \mathscr{H} = \{Y_\beta, Z_\beta, \beta = 1, \dots, s\}$.*

3. *Если из операторов X_α, образующих базис подалгебры H, r_* линейно не связаны, то из операторов Y_α, Z_α, образующих базис подалгебры $\mathscr{H}$, линейно не связаны $2r_*$ операторов.*

4. *Если соответствующая подалгебре H группа G имеет $n + m - r_*$ функционально независимых инвариантов*

$$I^k = I^k(z), \quad k = 1, \dots, n + m - r_*, \tag{6}$$

то базис функционально независимых инвариантов группы $\mathscr{G}$, соответствующей подалгебре $\mathscr{H}$, состоит из инвариантов (6) группы G и из $n + m - r_*$ функций

$$J^k = \xi^i \frac{\partial I^k(z)}{\partial z^i} = \Omega I^k(z), \quad k = 1, \dots, n + m - r_*. \tag{7}$$

Доказательство. 1. Если H — подалгебра, то из соотношений (4) для операторов $Y_\alpha, Z_\alpha \in \mathscr{H}$ следует, что множество $\mathscr{H}$ замкнуто относительно операции коммутирования, т. е. образует подалгебру.

2. В силу (4), (5) для Y_β, $Z_\beta \in \operatorname{Nor}_{\mathscr{L}} \mathscr{H}$ имеют место соотношения

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = 0, \quad [Y_\alpha, Z_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} C^\gamma_{\alpha\beta} Y_\gamma, \quad [Z_\alpha, Y_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} C^\gamma_{\alpha\beta} Y_\gamma,$$

$$[Z_\alpha, Z_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} C^\gamma_{\alpha\beta} Z_\gamma, \quad \alpha = 1, \ldots, r,\ \beta = 1, \ldots, s,$$

которые перестают выполняться при добавлении к $\operatorname{Nor}_{\mathscr{L}} \mathscr{H}$ какого-либо оператора Y_β или Z_β, соответствующего $X_\beta \notin \operatorname{Nor}_L H$. Поэтому $\operatorname{Nor}_{\mathscr{L}} \mathscr{H}$ является нормализатором, так как это наиболее широкая подалгебра в $\mathscr{L}$, для которой $\mathscr{H}$ — идеал.

3. Ранг матрицы $M_1 = \left\| \xi^i_\alpha(z) \right\|$ из координат операторов $X_\alpha \in H$ равен r_*. Предположим для определенности, что линейно не связаны операторы $X_1, \ldots, X_{r_*}$. Существуют функции $\omega^\beta_\gamma(z)$ такие, что

$$X_\gamma = \sum_{\beta=1}^{r_*} \omega^\beta_\gamma(z) X_\beta, \quad \gamma = r_* + 1, \ldots, r.$$

Подставив в (2), (3) выражение для координат операторов X_γ, получим

$$Y_\gamma = \sum_{\beta=1}^{r_*} \omega^\beta_\gamma(z) Y_\beta, \quad Z_\gamma = \sum_{\beta=1}^{r_*} \left(\omega^\beta_\gamma(z) Z_\beta + \sum_{j=1}^{n+m} \xi^j \frac{\partial \omega^\beta_\gamma(z)}{\partial z^j} Y_\beta \right), \quad \gamma = r_* + 1, \ldots, r. \tag{8}$$

В матрице $M = \left\| \begin{matrix} 0 & M_1 \\ M_1 & M_2 \end{matrix} \right\|$ из координат операторов $Y_\alpha, Z_\alpha \in \mathscr{H}$ в силу ее структуры и соотношений (8) содержится $2r_*$ независимых строк. Поэтому $\operatorname{rank} M = 2r_*$, откуда следует третье утверждение леммы.

4. Из предыдущего утверждения леммы следует, что в $\mathbb{R}^{2(n+m)}(z, \xi)$ группа $\mathscr{G}$ имеет $2(n + m - r_*)$ функционально независимых инвариантов. Функции (6), (7) являются инвариантами группы $\mathscr{G}$, так как критерий инвариантности для них выполнен:

$$Y_\alpha I^k(z) = 0,\ Y_\alpha J^k(z, \xi) = \xi^i_\alpha(z) \frac{\partial I^k(z)}{\partial z^i} = X_\alpha I^k(z) = 0,\ Z_\alpha I^k(z) = X_\alpha I^k(z) = 0,$$

$$Z_\alpha J^k(z, \xi) = \xi^i X_\alpha \left(\frac{\partial I^k(z)}{\partial z^i} \right) + \frac{\partial I^k(z)}{\partial z^i} \Omega \xi^i_\alpha(z) = \Omega(X_\alpha I^k(z)) = 0,\ \alpha = 1, \ldots, r. \tag{9}$$

Для инвариантов (6) группы G ранг матрицы Якоби $N_1 = \partial I / \partial z$ равен $n+m-r_*$. Ранг матрицы Якоби

$$N = \frac{\partial(I, J)}{\partial(z, \xi)} = \left\| \begin{matrix} N_1 & 0 \\ N_2 & N_1 \end{matrix} \right\|$$

в силу ее структуры равен $2(n + m - r_*)$, и, значит, инварианты (6), (7) группы $\mathscr{G}$ функционально независимы. Лемма доказана.

Фактор-система E/H задана в пространстве $\mathbb{R}^{n+m-r_*}(I)$ переменных $I = (I^1, \ldots,\ I^{n+m-r_*})$, из которых m могут быть выбраны в качестве зависимых и $n - r_*$ — в качестве независимых переменных. Координаты оператора $\overline{X} = J^k(I)\partial_{I^k}$, допускаемого фактор-системой E/H, находятся как решение системы определяющих уравнений $D(E/H)$. Система $D(E/H)$ задана в пространстве $\mathbb{R}^{2(n+m-r_*)}(I, J)$ независимых переменных I и искомых функций J — координат оператора $\overline{X}$.

Переход от оператора $X = \xi^i \partial_{z^i}$, действующего на переменные z, к оператору $\overline{X} = J^k \partial_{I^k}$, действующему на переменные I, осуществляется по обычным формулам [1]

$$\overline{X} = XI^k(z)\partial_{I^k} = \xi^i \frac{\partial I^k(z)}{\partial z^i}\partial_{I^k}.$$

Таким образом, инварианты (7) группы $\mathscr{G}$, соответствующей подалгебре $\mathscr{H}$, совпадают с выражением

$$J^k = \xi^i \frac{\partial I^k(z)}{\partial z^i}$$

для координат оператора $\overline{X} = J^k \partial_{I^k}$, допускаемого фактор-системой E/H.

Достаточное условие того, что фактор-система E/H не имеет дополнительных симметрий, помимо фактор-алгебры $\mathrm{Nor}_L\, H/H$, основано на сравнении определяющих уравнений $D(E/H)$ для оператора $\overline{X}$ и исходных определяющих уравнений $D(E)$, редуцированных по подалгебре $\mathscr{H}$.

Из инвариантов (6), (7) группы $\mathscr{G}$ только $n + m - r_*$ зависят от ξ. Поэтому по подалгебре $\mathscr{H}$ можно построить регулярное частично инвариантное решение уравнений $D(E)$ с дефектом инвариантности r_*. Часть функций имеет инвариантное представление

$$J^k(z, \xi) = \mathscr{J}^k(I), \quad k = 1, \ldots, n + m - r_*, \tag{10}$$

«лишние» r_* функций остаются произвольными и зависят от $n+m$ переменных I, y:

$$V^l(z, \xi) = \mathscr{V}^l(I, y), \quad l = 1, \ldots, r_*. \tag{11}$$

Здесь $y^l(z)$, $V^l(z, \xi)$, $l = 1, \ldots, r_*$, — произвольные функции, удовлетворяющие условию невырожденности замены переменных

$$\det \left\| \frac{\partial(I, y)}{\partial z} \right\| \neq 0, \quad \det \left\| \frac{\partial(J, V)}{\partial \xi} \right\| \neq 0.$$

Подстановка представления (10), (11) для функций ξ в систему $D(E)$ приводит к фактор-системе $D(E)/\mathscr{H}$. Используя только алгебраические действия, ее можно разделить на инвариантную подсистему IS уравнений относительно функций $\mathscr{J}(I)$ и подсистему Π, содержащую уравнения относительно $\mathscr{J}(I)$ и $\mathscr{V}(I, y)$. Приведение подсистемы Π в инволюцию порождает условия совместности — уравнения относительно $\mathscr{J}(I)$, которые добавляются к уравнениям IS. В результате получается представление фактор-системы $D(E)/\mathscr{H}$ в виде объединения пассивной системы P уравнений относительно «лишних» функций $\mathscr{V}(I, y)$ и инвариантной системы $D(E)/\mathscr{H}_{\mathrm{inv}}$, связывающей функции $\mathscr{J}$ и переменные I.

Функции $V(z, \xi)$ всегда можно, как и $J(z, \xi)$, определить линейно и однородно по ξ. Тогда искомые функции ξ и их производные будут выражаться из (10), (11) линейно и однородно относительно функций $\mathscr{J}$, $\mathscr{V}$ и их производных и уравнения фактор-системы $D(E)/\mathscr{H}$ будут линейны и однородны относительно $\mathscr{J}$, $\mathscr{V}$.

§ 3. Групповые свойства фактор-систем

При доказательстве основной теоремы используется свойство симметрии фактор-системы, которая возникает при построении частично инвариантного решения некоторой системы E. Справедливо утверждение, являющееся аналогом теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть H — подалгебра алгебры Ли L, допускаемой системой E, $\mathrm{Nor}_L\, H$ — нормализатор подалгебры H в L. Тогда инвариантная система E/H_{inv}, получающаяся при построении по подалгебре H частично инвариантного решения системы E, допускает фактор-алгебру $\mathrm{Nor}_L\, H/H$.*

Доказательство. При построении по подалгебре H частично инвариантного решения системы E от переменных x, u переходят к независимым переменным I, y и зависимым переменным J, V, где $I = (I^1, \dots, I^\rho)$, $J = (J^1, \dots, J^{m-\delta})$ — инварианты группы G, соответствующей подалгебре H, функции $y = (y^{\rho+1}, \dots, y^n)$, $V = (V^{m-\delta+1}, \dots, V^m)$ удовлетворяют условию

$$\det \left\| \frac{\partial(I, y, J, V)}{\partial(x, u)} \right\| \neq 0.$$

Кроме того, добавляется условие

$$J^k_{y^i} = 0, \quad k = 1, \dots, m-\delta,\ i = \rho+1, \dots, n, \tag{12}$$

того, что функции J в отличие от «лишних» функций V зависят только от переменных I. Фактор-система E/H содержит подсистему Π уравнений относительно «лишних» функций $V(I, y)$. Процесс приведения ее в инволюцию заключается в вычислении дифференциальных следствий некоторого порядка $p \geq 1$ уравнений подсистемы Π и исключении старших производных. Используя представление системы E с помощью дифференциальных инвариантов допускаемой группы, аналогично тому, как это доказано в [1, § 19] для системы алгебраических уравнений, нетрудно показать, что система $[E]$ допускает алгебру Ли L. Система $[E]$ состоит из уравнений E и их дифференциальных следствий 1-го, … , p-го порядка. Переписывая систему $[E]$ в новых переменных и налагая условие (12), получаем представление фактор-системы E/H в виде объединения инвариантной системы E/H_{inv}, связывающей функции J и переменные I, и пассивной системы P относительно функций $V(I, y)$.

Из уравнений (5) для $X_\alpha \in H$, $X_\beta \in \mathrm{Nor}_L\, H$ следуют соотношения

$$X_\alpha(X_\beta f) = X_\beta(X_\alpha f) + \sum_{\gamma=1}^{r} C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma f, \quad \alpha = 1, \dots, r,\ \beta = 1, \dots, s,\ s \geq r.$$

Подставляя в них вместо f инварианты I^j, J^k группы G, получаем в правых частях этих равенств нуль, т. е. функции $X_\beta I^j$, $X_\beta J^k$ являются инвариантами группы G. Следовательно, в новых переменных операторы $X_\beta \in \mathrm{Nor}_L\, H$ имеют вид

$$\overline{X}_\beta = \tau^j_\beta(I, J)\partial_{I^j} + \theta^k_\beta(I, J)\partial_{J^k} + \zeta^i_\beta(I, y, J, V)\partial_{y^i} + \Omega^l_\beta(I, y, J, V)\partial_{V^l}, \quad \beta = 1, \dots, s, \tag{13}$$

причем $\tau^j_\alpha(I, J) = 0$, $\theta^k_\alpha(I, J) = 0$, $\alpha = 1, \dots, r$.

Координата оператора $\overline{X}_\beta$, продолженного на производную $J^k_{y^i}$, равна

$$\sum_{q=1}^{m-\delta} J^q_{y^i} \theta^k_{\beta J^q} - \sum_{j=1}^{\rho} J^k_{I^j} \sum_{q=1}^{m-\delta} J^q_{y^i} \tau^j_{\beta J^q} - \sum_{t=\rho+1}^{n} J^k_{y^t} \frac{d\zeta^t_\beta}{dy^i},$$

т. е. операторы (13) оставляют инвариантными уравнения (12) и, значит, допускаются системой $E/H \sim E/H_{\rm inv} \cup P$. С учетом (12) координаты продолжения операторов (13) на производные функций J^k по I^j не содержат функций V и их производных. Кроме того, так как система $E/H_{\rm inv}$ интегрируется независимо от P, критерий инвариантности системы $E/H_{\rm inv}$ относительно действия операторов (13) выполняется на многообразии, заданном уравнениями системы $E/H_{\rm inv}$. Ограничив действие операторов (13) на переменные I, J, получим, что инвариантная система $E/H_{\rm inv}$ допускает операторы $\overline{X}_\beta = \tau^j_\beta(I,J)\partial_{I^j} + \theta^k_\beta(I,J)\partial_{J^k}$, $\beta = r+1,\dots,s$, принадлежащие фактор-алгебре $\mathrm{Nor}_L\, H/H$. Теорема доказана.

Выполнение следующего условия гарантирует отсутствие у фактор-системы E/H других симметрий, кроме фактор-алгебры $\mathrm{Nor}_L\, H/H$.

Теорема 3. *Пусть L — алгебра Ли операторов, допускаемая системой E, и $H = \{X_\alpha, \alpha = 1,\dots,r\}$ — подалгебра L, по которой строится инвариантное решение системы E. Если инвариантная система $D(E)/\mathscr{H}_{\rm inv}$, полученная при построении по подалгебре $\mathscr{H} = \{Y_\alpha, Z_\alpha, \alpha = 1,\dots,r\}$ частично инвариантного решения определяющих уравнений $D(E)$, содержит только определяющие уравнения $D(E/H)$ для координат оператора, допускаемого фактор-системой E/H, то наиболее широкая алгебра Ли операторов, допускаемая фактор-системой E/H, совпадает с фактор-алгеброй $\mathrm{Nor}_L\, H/H$.*

Доказательство. Выполнение условия теоремы означает, что решения определяющих уравнений $D(E/H)$ и инвариантной системы $D(E)/\mathscr{H}_{\rm inv}$ совпадают. Поэтому достаточно показать, что все решения системы $D(E)/\mathscr{H}_{\rm inv}$ определяются координатами операторов фактор-алгебры $\mathrm{Nor}_L\, H/H$.

Согласно лемме 2 базис алгебры Ли $\mathrm{Nor}_{\mathscr{L}}\, \mathscr{H}$ состоит из операторов Y_β, Z_β, соответствующих $X_\beta \in \mathrm{Nor}_L\, H$, $\beta = 1,\dots,s$. Операторы $\overline{X}_\beta \in \mathrm{Nor}_L\, H/H$ имеют вид

$$\overline{X}_\beta = X_\beta I^k \partial_{I^k} = J^k_\beta(I)\partial_{I^k}, \quad \beta = r+1,\dots,s.$$

По теореме 2 из операторов (2), (3), допускаемых системой $D(E)$, инвариантная система $D(E)/\mathscr{H}_{\rm inv}$ допускает операторы $\overline{Y}_\beta, \overline{Z}_\beta \in \mathrm{Nor}_{\mathscr{L}}\, \mathscr{H}/\mathscr{H}$, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \overline{Z}_\beta &= X_\beta I^k(z)\partial_{I^k} + \Omega\big(X_\beta I^k\big)\partial_{\mathscr{J}^k} = J^k_\beta(I)\partial_{I^k} + \overline{\Omega} J^k_\beta(I)\partial_{\mathscr{J}^k},\\ \overline{Y}_\beta &= X_\beta I^k(z)\partial_{\mathscr{J}^k} = J^k_\beta(I)\partial_{\mathscr{J}^k}, \quad \beta = r+1,\dots,s. \end{aligned} \tag{14}$$

Их координаты вычисляются по формулам, аналогичным (9). Для составляющей оператора Ω, действующей на переменные I, используется обозначение $\overline{\Omega} = \mathscr{J}^k\partial_{I^k}$.

Поскольку $D(E)$ — это система линейных уравнений, множество ее решений $\{\xi_\alpha(z), \alpha = 1,\dots,R\}$ выражено в координатах допускаемых операторов (2). Система $D(E)/\mathscr{H}_{\rm inv}$ также линейна, и, значит, все ее решения определяются координатами операторов вида (14). Частично инвариантное решение, построенное по подалгебре $\mathscr{H}$, является частным решением системы $D(E)$. Поэтому инвариантная система $D(E)/\mathscr{H}_{\rm inv}$ не может допускать других операторов вида (14), кроме $\overline{Y}_\beta \in \mathrm{Nor}_{\mathscr{L}}\, \mathscr{H}/\mathscr{H}$, которые и определяют ее решение. Те же координаты имеют операторы $\overline{X}_\beta \in \mathrm{Nor}_L\, H/H$. Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0. \tag{15}$$

Базис допускаемой уравнением (15) алгебры Ли L состоит из операторов

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_4 = 3t\partial_t + x\partial_x - 2u\partial_u.$$

Координаты допускаемого оператора

$$X = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \varphi(t,x,u)\partial_u$$

являются решением системы определяющих уравнений $D(E)$:

$$\begin{gathered} \tau_t - 3\xi_x = 0, \quad \tau_x = 0, \quad \tau_u = 0, \\ \xi_u = 0, \quad \varphi_{uu} = 0, \quad \varphi_{xu} - \xi_{xx} = 0, \\ 3\varphi_{xxu} - \xi_{xxx} + \varphi + 2u\xi_x - \xi_t = 0, \\ \varphi_{xxx} + u\varphi_x + \varphi_t = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Построим по подалгебре $H = \{X_1 + X_3\}$ инвариантное решение уравнения (15). Здесь $\mathrm{Nor}_L\, H = \{X_1 + X_3, X_2\}$, инвариантами являются

$$z = x - t^2/2, \quad v = u - t. \tag{17}$$

Подставив в (15) представление решения $u = v(z) + t$, получим фактор-систему E/H, состоящую из уравнения

$$v''' + vv' + 1 = 0 \tag{18}$$

относительно функции $v(z)$. Координаты допускаемого уравнением (18) оператора

$$\overline{X} = \zeta(z,v)\partial_z + \psi(z,v)\partial_v$$

находятся из системы определяющих уравнений $D(E/H)$:

$$\begin{gathered} \zeta_v = 0, \quad \psi_{vv} = 0, \quad \psi_{zv} - \zeta_{zz} = 0, \\ 3\psi_{zzv} - \zeta_{zzz} + \psi + 2v\zeta_z = 0, \\ \psi_{zzz} + v\psi_z - \psi_v + 3\zeta_z = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Построим по подалгебре $\mathscr{H} = \{Y_1 + Y_3, Z_1 + Z_3\}$, где

$$Y_1 + Y_3 = \partial_\tau + t\partial_\xi + \partial_\varphi, \quad Z_1 + Z_3 = \partial_t + t\partial_x + \partial_u + \tau\partial_\xi,$$

частично инвариантное решение определяющих уравнений (16). В соответствии с леммой 2 в данном случае базис функционально независимых инвариантов состоит из функций (17) и вычисляемых по формуле (7) инвариантов

$$\zeta = \xi - t\tau, \quad \psi = \varphi - \tau.$$

В качестве «лишней» функции можно выбрать τ. Подстановка в определяющие уравнения (16) представления решения

$$\tau = \tau(t,z,v), \quad \xi = \zeta(z,v) + t\tau(t,z,v), \quad \varphi = \psi(z,v) + \tau(t,z,v)$$

приводит к фактор-системе $D(E)/\mathscr{H}$:

$$\begin{gathered} \tau_t - 4\tau_z - \tau_v - 3\zeta_z = 0, \quad \tau_z = 0, \quad \tau_v = 0, \\ \zeta_v + t\tau_v = 0, \quad \psi_{vv} + \tau_{vv} = 0, \quad \psi_{zv} + \tau_{zv} - \zeta_{zz} - t\tau_{zz} = 0, \\ 3\psi_{zzv} + 3\tau_{zzv} - \zeta_{zzz} - t\tau_{zzz} + \psi + 2v(\zeta_z + t\tau_z) + t^2\tau_z + t(3\zeta_z - \tau_t + \tau_v) + \zeta_v = 0, \\ \psi_{zzz} + \tau_{zzz} + v(\psi_z + \tau_z) + \tau_t - \psi_v - \tau_v = 0. \end{gathered}$$

Из первых трех уравнений получаем систему уравнений

$$\tau_t - 3\zeta_z = 0, \quad \tau_z = 0, \quad \tau_v = 0$$

относительно функции $\tau(t,z,v)$. Исключая τ с помощью этих соотношений из оставшихся уравнений фактор-системы $D(E)/\mathscr{H}$, получаем инвариантную подсистему IS относительно функций $\zeta(z,v)$, $\psi(z,v)$, которая в точности совпадает с определяющими уравнениями (19). Таким образом, уравнение (18) допускает только фактор-алгебру $\mathrm{Nor}_L\, H/H = \{X_2\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

2. *Овсянников Л. В.* Об иерархии инвариантных подмоделей дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 1998. Т. 361, № 6. С. 740–742.

3. *Капитанский Л. В.* Групповой анализ уравнений Навье — Стокса и Эйлера при наличии вращательной симметрии и новые точные решения этих уравнений // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 4. С. 901–904.

4. *Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначёв В. В., Родионов А. А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.

5. *Мелешко С. В.* Групповая классификация уравнений двумерных движений газа // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 56–62.

6. *Мустаев А. Ф., Хабиров С. В.* Винтовые движения газа, инвариантные относительно равномерного движения системы отсчета // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, № 5. С. 854–861.

7. *Мамонтов Е. В.* Групповые свойства 2-подмоделей класса E уравнений газовой динамики // Прикл. механика и теор. физика. 2001. Т. 42, № 1. С. 33–39.

8. *Овсянников Л. В.* Групповое свойство определяющих уравнений // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1971. Вып. 7. С. 5–11.

Статья поступила 19 июля 2004 г.

Багдерина Юлия Юрьевна
Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112, Уфа 450077
yulya@mail.rb.ru