Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 512.54

К ГИПОТЕЗЕ О ПОЛУПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРАХ

В. А. Белоногов

Аннотация: Два характера конечной группы G называются полупропорциональными, если они не пропорциональны и G есть объединение двух непересекающихся нормальных подмножеств таких, что ограничения данных характеров на каждом из этих подмножеств пропорциональны. В настоящей статье получены некоторые результаты о строении произвольной конечной группы, содержащей пару полупропорциональных неприводимых характеров, в частности, утверждения о порядке группы и о ядрах полупропорциональных характеров. Рассматривается также следующая гипотеза: полупропорциональные неприводимые характеры конечной группы имеют равные степени. Доказана справедливость этой гипотезы для 2-разложимых групп, а также тот факт, что из справедливости гипотезы для двух групп следует ее справедливость для их прямого произведения.

Ключевые слова: конечные группы, неприводимые характеры, гипотеза о полупропорциональных характерах, D-блоки.

Введение

Пусть G — конечная группа. Характеры φ и ψ группы G назовем *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого нормального подмножества M из G $\varphi|_M$ пропорционально $\psi|_M$ и $\varphi|_{G\setminus M}$ пропорционально $\psi|_{G\setminus M}$. В настоящей статье рассматривается следующая

Гипотеза 1 (гипотеза о полупропорциональных характерах). *Если φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры конечной группы, то $\varphi(1) = \psi(1)$.*

Первоначально эта гипотеза была выдвинута в [1] в следующей формулировке.

Гипотеза 2 (гипотеза о малых D-блоках). *Если $\{\varphi, \psi\}$ — малый D-блок группы G для некоторого нормального подмножества D из G, то $\varphi(1) = \psi(1)$.*

Понятие D-блока было введено в [1] (см. также гл. 3 в [2]). D-блок группы G есть некоторое множество ее неприводимых характеров (определение напоминается в § 1), а при D, равном множеству всех p'-элементов из G, где p — простое число, понятие D-блока совпадает с классическим понятием p-блока. D-блок мощности 2 группы G называется ее малым D-блоком. Равносильность гипотез 1 и 2 видна из предложения 1.1 (см. ниже).

Подтверждения гипотез 1 и 2 получены для следующих групп:

для спорадических простых групп в [3];

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00463) и РФФИ-БРФФИ (код проекта 04–01–81001).

© 2005 Белоногов В. А.

для групп $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{PGL}_2(q)$, $\mathrm{GL}_2(q)$ в [4];
для групп $\mathrm{PGL}_3(q)$, $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{PGU}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$ в [5];
для групп $\mathrm{L}_3(q)$, $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$ в [6];
для симметрических и некоторых знакопеременных групп в [7].

В указанных работах получено полное описание всех малых D-блоков в перечисленных группах с указанием соответствующих нормальных подмножеств D. Для групп лиева типа выявилась интересная зависимость наличия малых D-блоков и, следовательно, пар полупропорциональных неприводимых характеров от четности характеристики поля определения группы. В квазипростых группах $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{L}_3(q)$, $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$ и $\mathrm{SU}_3(q)$ такие пары отсутствуют при всех четных q и присутствуют при всех нечетных q, за исключением групп $\mathrm{L}_2(5)$ ($\simeq \mathrm{L}_2(4)$), $\mathrm{L}_2(7)$ ($\simeq \mathrm{L}_3(2)$) и $\mathrm{L}_2(9)$ ($\simeq A_6 \simeq \mathrm{PSp}_4(2)'$). Среди спорадических простых групп таких пар не имеют только группы M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_2, J_3, Suz, He и Co_1.

Общих же утверждений о малых D-блоках почти нет. В настоящей статье получены некоторые результаты о строении произвольной конечной группы, имеющей пару полупропорциональных неприводимых характеров, и о свойствах таких пар. В качестве следствий указаны некоторые новые подтверждения гипотез 1 и 2.

Обозначения, используемые в этой статье, стандартны (см., например, [3, 8]). В частности, $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G; $\mathrm{Irr}(G \mid N)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G, ядра которых содержат нормальную подгруппу N из G; $(\alpha, \beta)_G$ — скалярное произведение классовых функций α и β группы G; $\alpha|_K$ — ограничение классовой функции α группы G на ее подмножестве K; G_ξ — стабилизатор в G классовой функции ξ ее нормальной подгруппы, а $(G : G_\xi)$ — некоторая система вычетов G по G_ξ; g^G — класс сопряженных элементов группы G, содержащий элемент $g \in G$; $\dot\cup$ — знак объединения непересекающихся множеств; $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ — множества всех комплексных, рациональных, целых и натуральных чисел соответственно; $\widehat{\mathbb{Z}}$ — множество всех целых алгебраических чисел из $\mathbb{C}$. Если p — простое число, то G_p — множество всех p-элементов группы G. Если m и n — целые числа, то (m, n) — их наибольший общий делитель, а запись $m \mid n$ означает, что m делит n.

G всегда обозначает конечную группу.

§ 1. Предварительные результаты

Напомним некоторые определения и результаты из [1] и [2].

Пусть G — конечная группа, D — ее нормальное подмножество и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. *$D$-срезкой* классовой функции ψ группы G называется классовая функция $\psi|_D^0$, совпадающая с ψ на D и исчезающая (обращающаяся в нуль) на $G \setminus D$. Говорят, что D и Φ *взаимодействуют*, если D-срезка $\varphi|_D^0$ любого характера φ из Φ является линейной комбинацией (с комплексными коэффициентами) характеров из Φ. (Недавняя работа [9] позволяет по-новому взглянуть на взаимодействия, а именно, как на некоторую экстремальную ситуацию в таблице характеров группы.) *D-блок* группы G — это минимальное (по включению) непустое подмножество из $\mathrm{Irr}(G)$, взаимодействующее с D. При рассмотрении D-блоков можно, не ограничивая общности рассуждений, предполагать, что $1 \in D$, так как D-блок является одновременно и $(G \setminus D)$-блоком.

Чтобы определить все D-блоки мощности 1 группы, достаточно беглого взгляда на ее таблицу характеров; $\{\varphi\}$ есть D-блок группы G, если и только если φ исчезает на D или на $G \setminus D$. Нам потребуются следующие результаты о D-блоках мощности 2.

Предложение 1.1. *Пусть G — конечная группа, φ и ψ — ее различные неприводимые характеры и D — нормальное подмножество в G. Равносильны условия:*

(1) $\{\varphi, \psi\}$ — D-блок группы G;

(2) $\psi|_D = a\varphi|_D$, и $\psi|_{G\setminus D} = b\varphi|_{G\setminus D}$ для некоторых $a, b \in \mathbb{C}$;

(3) $\psi|_D = a\varphi|_D$, и $\psi|_{G\setminus D} = b\varphi|_{G\setminus D}$, где $\{a, b\} = \left\{\frac{\psi(1)}{\varphi(1)}, -\frac{\varphi(1)}{\psi(1)}\right\}$.

Это — теорема 8З3 в [2]. Отсюда непосредственно вытекает

Следствие. *Пусть G — конечная группа, а φ и ψ — ее неприводимые характеры. Равносильны условия:*

(1) φ и ψ полупропорциональны;

(2) $\varphi \neq \psi$, и $\{\varphi, \psi\}$ есть D-блок группы G для некоторого нормального подмножества D из G.

Предложение 1.2. *Пусть φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы G. Положим*

$$G_+ := \left\{g \in G \mid \psi(g) = \frac{\psi(1)}{\varphi(1)}\varphi(g) \neq 0\right\},$$

$$G_- := \left\{g \in G \mid \psi(g) = -\frac{\varphi(1)}{\psi(1)}\varphi(g) \neq 0\right\},$$

$$G_0 := \{g \in G \mid \psi(g) = \varphi(g) = 0\}.$$

Справедливы следующие утверждения.

1) $G = G_+ \dot\cup G_- \dot\cup G_0$, причем G_+ и G_- непустые.

2) Если D — нормальное подмножество в G, то $\{\varphi, \psi\}$ является D-блоком группы G, если и только если $D = G_+ \cup S$ или $D = G_- \cup S$, где S — объединение некоторого (возможно, пустого) множества классов сопряженных элементов группы G, входящих в G_0.

3) G_+, G_- и G_0 (если $G_0 \neq \varnothing$) — объединения смежных классов по подгруппе $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$.

4) Пусть $T \in \{G_+, G_-, G_0\}$, $g \in T$ и k — целое число, взаимно простое с порядком элемента g. Тогда $g^k \in T$ (в частности, $T = T^{-1}$).

5) Если какое-либо из множеств G_+ и G_- есть класс сопряженных элементов, то $\varphi(1) = \psi(1) = 1$.

6) Если $\varphi(1) = 1$, то $\varphi(1) = \psi(1)$ и $\psi = \xi\varphi$, где ξ — характер G с ядром индекса 2 в G.

Пункты 1)–5) установлены в теореме 8З6 из [2] в терминах D-блоков (следует учесть предыдущее следствие). Первое утверждение п. 6) следует из п. 1), поскольку неприводимый характер имеет степень 1, если и только если он не имеет нулевых значений (2A11 и 2A28 в [2]). Второе утверждение этого пункта следует из 8З7 в [2].

§ 2. О порядке группы

Начиная с этого параграфа и по § 4 считается выполненным следующее предположение A. Лишь в формулировках теорем это будет указано явно.

Предположение A. *Пусть φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы G. Примем обозначения G_+, G_- и G_0 из предложения* 1.2 *и положим*

$$t := (\varphi(1), \psi(1)), \quad \varphi_0 := \frac{\varphi(1)}{t}, \quad \psi_0 := \frac{\psi(1)}{t}.$$

Заметим, что $1 \in G_+$ и $\{\varphi, \psi\}$ является D-блоком для любого нормального подмножества D группы G такого, что $G_+ \subseteq D \subseteq G_+ \cup G_0$. Вводимые в следующей лемме обозначения m_g для $g \in G$ будут использоваться и далее в рамках предположения A.

Лемма 2.1 (основная лемма).

$$\frac{\varphi(d)}{\varphi_0} = \frac{\psi(d)}{\psi_0} =: m_d \in \widehat{\mathbb{Z}} \quad \text{для любого } d \in G_+ \cup G_0,$$

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_0} = -\frac{\psi(x)}{\varphi_0} =: m_x \in \widehat{\mathbb{Z}} \quad \text{для любого } x \in G_- \cup G_0.$$

Доказательство. Первые равенства в записанных соотношениях следуют из предложения 1.1, в п. (2) которого при $D = G_+ \cup G_0$ должно быть $a = \frac{\psi(1)}{\varphi(1)}$ и $b = -\frac{\varphi(1)}{\psi(1)}$. Далее, так как $(\varphi_0, \psi_0) = 1$, то существуют целые числа u и v такие, что $u\varphi_0 + v\psi_0 = 1$. При $d \in G_+ \cup G_0$ имеем

$$\frac{\varphi(d)}{\varphi_0} = (u\varphi_0 + v\psi_0)\frac{\varphi(d)}{\varphi_0} = u\varphi(d) + v\frac{\psi_0}{\varphi_0}\varphi(d) = u\varphi(d) + v\psi(d) \in \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Аналогично при $x \in G_- \cup G_0$

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_0} = (u\varphi_0 + v\psi_0)\frac{\varphi(x)}{\psi_0} = u\frac{\varphi_0}{\psi_0}\varphi(x) + v\varphi(x) = -u\psi(x) + v\varphi(x) \in \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Лемма 2.1 доказана.

Из этой леммы непосредственно вытекает

Следствие. *Если группа G имеет элемент g такой, что $\varphi(g)$ или $\psi(g)$ является обратимым элементом в $\widehat{\mathbb{Z}}$ (например, если $|\varphi(g)| = 1$ или $|\psi(g)| = 1$), то $\varphi_0 = 1$ или $\psi_0 = 1$ (т. е. одно из чисел $\varphi(1)$ и $\psi(1)$ делит другое).*

Заметим, что из леммы 2.1 непосредственно вытекают также равенства

$$\frac{1}{\varphi_0}\varphi\big|^0_{G_+} = \frac{1}{\psi_0}\psi\big|^0_{G_+} = \frac{1}{\varphi_0^2 + \psi_0^2}(\varphi_0\varphi + \psi_0\psi),$$

$$\frac{1}{\psi_0}\varphi\big|^0_{G_-} = -\frac{1}{\varphi_0}\psi\big|^0_{G_-} = \frac{1}{\varphi_0^2 + \psi_0^2}(\psi_0\varphi - \varphi_0\psi).$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнено предположение* A. *Тогда*
1) $|G| = (\varphi_0^2 + \psi_0^2)m$, *где* $m = \sum\limits_{d \in G_+} |m_d|^2 = \sum\limits_{x \in G_-} |m_x|^2 \in \mathbb{N}$;

2) $|G|$ *четен.*

Доказательство. 1) Положим

$$A = \sum_{d \in G_+} |\varphi(d)|^2 \quad \text{и} \quad B = \sum_{x \in G_-} |\varphi(x)|^2.$$

Очевидно,

$$|G| = |G|(\varphi, \varphi)_G = A + B. \tag{2.1}$$

Далее, по лемме 2.1

$$0 = |G|(\varphi, \psi)_G = \sum_{d \in G_+} \varphi(d)\overline{\psi(d)} + \sum_{x \in G_-} \varphi(x)\overline{\psi(x)}$$

$$= \frac{\psi_0}{\varphi_0} \sum_{d \in G_+} |\varphi(d)|^2 - \frac{\varphi_0}{\psi_0} \sum_{x \in G_-} |\psi(x)|^2 = \frac{\psi_0}{\varphi_0} A - \frac{\varphi_0}{\psi_0} B,$$

откуда

$$\frac{1}{\varphi_0^2} A = \frac{1}{\psi_0^2} B, \tag{2.2}$$

т. е.

$$\sum_{d \in G_+} |m_d|^2 = \sum_{x \in G_-} |m_x|^2. \tag{2.3}$$

Это часть утверждения 1) теоремы.

Обозначим через m левую часть равенства (2.3). Тогда m есть левая часть равенства (2.2) и, следовательно, по (2.2) $A = \varphi_0^2 m$ и $B = \psi_0^2 m$. Отсюда и из (2.1) следует, что $|G| = \bigl(\varphi_0^2 + \psi_0^2\bigr)m$.

Остается показать, что $m \in \mathbb{N}$. По лемме 2.1 $m = \sum\limits_{d \in G_+} |m_d|^2 \in \widehat{\mathbb{Z}}$. Но по доказанному выше $m = \frac{|G|}{\varphi_0^2 + \psi_0^2} \in \mathbb{Q}$. Следовательно, $m \in \widehat{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ (по утверждению 2A6 в [2]) и, значит, $m \in \mathbb{N}$.

2) Предположим, что $|G|$ нечетен. Тогда нечетны $\varphi(1)$ и $\psi(1)$ (так как они делят $|G|$ согласно утверждению 2A7(3) из [2]), а следовательно, нечетны φ_0 и ψ_0. Но тогда $\varphi_0^2 + \psi_0^2$ четно. По п. 1) это влечет четность $|G|$ в противоречие с предположением.

Теорема 2.1 доказана.

Заметим, что $\varphi_0\psi_0 \mid m$, так как $\bigl(\varphi_0\psi_0, \varphi_0^2 + \psi_0^2\bigr) = 1$.

Следствие. *Для примарных групп гипотеза* 1 *верна.*

Доказательство. Пусть G — p-группа, удовлетворяющая предположению A. Если $\varphi(1) < \psi(1)$, то $\varphi_0 = 1$, а $\psi_0 = p^a$, где $a \in \mathbb{N}$. Но тогда число $\varphi_0^2 + \psi_0^2 = 1 + p^{2a}$ не может делить $|G|$, а это противоречит теореме 2.1.

Следствие доказано.

Теорема 2.2. *Пусть выполнено предположение* A *и p — простой делитель порядка G. Тогда*

либо $p \mid \bigl(\varphi_0^2 + \psi_0^2\bigr)t$ (равносильно, $p \mid \varphi(1)^2 + \psi(1)^2$),

либо все p-элементы из G содержатся в G_+.

Доказательство. Сначала мы выведем некоторые формулы для значений φ и ψ на произвольном p-элементе из G, а затем, приняв предположение, что $G_p \nsubseteq G_+$ (равносильное тому, что некоторый неединичный p-элемент из G содержится в $G_- \cup G_0$), докажем, что $p \mid \bigl(\varphi_0^2 + \psi_0^2\bigr)t$.

Пусть a — элемент порядка p^n группы G, где $n \in \mathbb{N}$, и ε — первообразный корень степени p^n в $\mathbb{C}$. Согласно утверждению 2A11 из [2] существует представление $\mathscr{F}$ группы G с характером φ такое, что

$$\mathscr{F}(a) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\varphi(1)}), \quad \text{где } \varepsilon_i^{p^n} = 1. \tag{2.4}$$

Для каждого $i \in \{0,1,\dots,p^n-1\}$ обозначим через k_i число элементов последовательности $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{\varphi(1)}$, равных ε^i ($k_i \geq 0$). Тогда

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{p^n-1} k_i, \tag{2.5}$$

$$\varphi(a) = \sum_{i=0}^{p^n-1} k_i\varepsilon^i. \tag{2.6}$$

Проведя подобные рассуждения для ψ на месте φ, мы заключаем, что при некоторых целых неотрицательных числах l_i справедливы равенства

$$\psi(1) = \sum_{i=0}^{p^n-1} l_i, \tag{2.7}$$

$$\psi(a) = \sum_{i=0}^{p^n-1} l_i\varepsilon^i. \tag{2.8}$$

Числа $\varphi(a)$ и $\psi(a)$ лежат в поле $\mathbb{Q}(\varepsilon)$. Согласно утверждению 2A14 из [2]

$$\mathbb{Q}(\varepsilon) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}\varepsilon \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}\varepsilon^{f-1}, \quad \text{где } f := \phi(p^n) \tag{2.9}$$

(ϕ — функция Эйлера). Если $n = 1$, то $1+\varepsilon+\dots+\varepsilon^{p-1} = \frac{\varepsilon^p-1}{\varepsilon-1} = 0$, откуда $\varepsilon^{p-1} = -(1+\varepsilon+\dots+\varepsilon^{p-2})$. Аналогично при любом n получаем

$$\varepsilon^f = \varepsilon^{p^{n-1}(p-1)} = -\sum_{m=0}^{p-2} \varepsilon^{mp^{n-1}}$$

и

$$\varepsilon^{f+j} = -\sum_{m=0}^{p-2} \varepsilon^{mp^{n-1}+j} \quad \text{при любом } j \in \{0,1,\dots,p^{n-1}-1\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \sum_{i=0}^{p^n-1} k_i\varepsilon^i = \sum_{i=0}^{f-1} k_i\varepsilon^i + \sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} k_{f+j}\varepsilon^{f+j} \\ &= \sum_{i=0}^{f-1} k_i\varepsilon^i - \sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} k_{f+j}\sum_{m=0}^{p-2}\varepsilon^{mp^{n-1}+j} \ \left(= \sum_{i=0}^{f-1}\left(k_i - \sum_{m=0}^{p-2} k_{i+f-mp^{n-1}}\right)\varepsilon^i\right).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Аналогично получаем

$$\psi(a) = \sum_{i=0}^{f-1} l_i\varepsilon^i - \sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} l_{f+j}\sum_{m=0}^{p-2}\varepsilon^{mp^{n-1}+j}. \tag{2.11}$$

Предположим теперь, что $a \in G_- \cup G_0$. Тогда согласно лемме 2.1 справедливо равенство $\psi(a) = -\frac{\varphi_0}{\psi_0}\varphi(a)$, которое ввиду (2.10) и (2.11) можно записать так:

$$\sum_{i=0}^{f-1} l_i\varepsilon^i - \sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} l_{f+j}\sum_{m=0}^{p-2}\varepsilon^{mp^{n-1}+j} = -\frac{\varphi_0}{\psi_0}\left(\sum_{i=0}^{f-1} k_i\varepsilon^i - \sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} k_{f+j}\sum_{m=0}^{p-2}\varepsilon^{mp^{n-1}+j}\right). \tag{2.12}$$

Все показатели степеней ε, встречающихся в этом равенстве, не превосходят $f-1$. Но из условия (2.9), очевидно, следует, что при любых рациональных $q_1,\dots,q_s$, $r_1,\dots,r_t$ равенство вида $\sum\limits_{i=1}^{s} q_i\varepsilon^{u(i)} = \sum\limits_{j=1}^{t} r_j\varepsilon^{v(j)}$, где все $u(i)$ и $v(j)$ принадлежат $\{0,1,\dots,f-1\}$, влечет равенство $\sum\limits_{i=1}^{s} q_i = \sum\limits_{j=1}^{t} r_j$. Поэтому равенство (2.12) влечет равенство

$$\sum_{i=0}^{f-1} l_i - (p-1)\sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} l_{f+j} = -\frac{\varphi_0}{\psi_0}\left(\sum_{i=0}^{f-1} k_i - (p-1)\sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} k_{f+j}\right).$$

Отсюда, учитывая равенства (2.5) и (2.7), получаем

$$\psi(1) - p\sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} l_{f+j} = -\frac{\varphi_0}{\psi_0}\left(\varphi(1) - p\sum_{j=0}^{p^{n-1}-1} k_{f+j}\right),$$

что можно переписать в виде

$$\psi(1) - p\psi_1 = -\frac{\varphi_0}{\psi_0}(\varphi(1) - p\varphi_1),$$

обозначив через ψ_1 и φ_1 соответствующие суммы (целые неотрицательные). Поэтому $\psi_0\psi(1) + \varphi_0\varphi(1) = p(\psi_0\psi_1 + \varphi_0\varphi_1)$, т. е.

$$(\varphi_0^2 + \psi_0^2)t = p(\varphi_0\varphi_1 + \psi_0\psi_1). \tag{2.13}$$

Отсюда следует, что $p \mid \big(\varphi_0^2 + \psi_0^2\big)t$.

Таким образом, предположив, что $G_- \cup G_0$ содержит некоторый p-элемент a, мы доказали, что $p \mid \big(\varphi_0^2 + \psi_0^2\big)t$.

Теорема 2.2 доказана.

Следствие. 1) *Если $p \in \pi(\varphi_0\psi_0) \setminus \pi(t)$, то $G_p \subseteq G_+$.*
2) *Если $G_2 \nsubseteq G_+$, то $\varphi(1) - \psi(1)$ четно.*
3) *Если $G_3 \nsubseteq G_+$, то $3 \mid t$.*
4) *Если $\varphi(1) = \psi(1)$ и $p \nmid 2\varphi(1)$, то $G_p \subseteq G_+$.*

Доказательство. 1) Следует из теоремы 2.2, так как $\varphi_0\psi_0$ взаимно просто с $\varphi_0^2 + \psi_0^2$.

2) Если $G_2 \nsubseteq G_+$, то по теореме 2.2 число 2 делит $\big(\varphi_0^2 + \psi_0^2\big)t = \frac{\varphi(1)^2 + \psi(1)^2}{t}$, т. е. $2 \mid \varphi(1)^2 - \psi(1)^2$ и, значит, $2 \mid \varphi(1) - \psi(1)$.

3) Если $G_3 \nsubseteq G_+$, то $3 \mid \big(\varphi_0^2 + \psi_0^2\big)t$ по теореме 2.2. Если $3 \nmid t$, то $3 \mid \varphi_0^2 + \psi_0^2$. Пусть $\varphi_0 \equiv k (\operatorname{mod} 3)$ и $\psi_0 \equiv l (\operatorname{mod} 3)$, $\{k, l\} \subseteq \{1,2,0\}$. Так как $(\varphi_0, \psi_0) = 1$, то по крайней мере одно из чисел k, l отлично от 0. Пусть $k \in \{1,2\}$, $l \in \{1,2,0\}$. Должно быть $3 \mid k^2 + l^2$, но это не так: числа $1^2 + 1^2 = 2$, $1^2 + 2^2 = 5$, $1^2 + 0^2 = 1$, $2^2 + 2^2 = 8$, $2^2 + 0^2 = 4$ не делятся на 3. Следовательно, $3 \mid t$.

4) Это непосредственно следует из теоремы 2.2, так как при $\varphi(1) = \psi(1)$ условие $p \nmid 2\varphi(1)$ равносильно условию $p \nmid (\varphi_0^2 + \psi_0^2)t$.

Следствие доказано.

Утверждение теоремы 2.2 можно несколько усилить следующим образом.

Теорема 2.2$'$. *Пусть выполнено предположение* A. *Тогда для любого* $p \in \pi(G)$ *верно по крайней мере одно из следующих утверждений:*

1) $G_p \subseteq G_+$;

2) *существуют целые числа* φ_1 *и* ψ_1 *такие, что*

$$\big(\varphi_0^2+\psi_0^2\big)t = p(\varphi_0\varphi_1+\psi_0\psi_1), \quad 0 \le \varphi_1 \le \varphi(1),\ 0 \le \psi_1 \le \psi(1)$$

(в частности, $p \mid \big(\varphi_0^2+\psi_0^2\big)t$*).*

Кроме того, если $p \nmid t$ *и числа* φ_1 *и* ψ_1 *удовлетворяют соотношениям п.* 2), *то выполнено точно одно из следующих условий:*

а) $\varphi_0 \le$ *(и делит)* $p\psi_1-\psi(1) \le (p-1)\psi(1)$ $(\psi_1 \ne 0)$ *и* $\psi_0 \le$ *(и делит)* $\varphi(1)-p\varphi_1 \le \varphi(1)$;

б) $\psi_0 \le$ *(и делит)* $p\varphi_1-\varphi(1) \le (p-1)\varphi(1)$ $(\varphi_1 \ne 0)$ *и* $\varphi_0 \le$ *(и делит)* $\psi(1)-p\psi_1 \le \psi(1)$.

Доказательство. Пусть $p \in \pi(G)$. Если не выполнено утверждение 1), то, как замечено в доказательстве теоремы 2.2 (см. (2.13)), верно равенство п. 2), где $\varphi_1 = \sum\limits_{j=0}^{p^{n-1}-1} k_{f+j} \le \varphi(1)$ и $\psi_1 = \sum\limits_{j=0}^{p^{n-1}-1} l_{f+j} \le \psi(1)$, и, значит, верно утверждение 2).

Предположим теперь, что $p \nmid t$ и числа φ_1 и ψ_1 удовлетворяют соотношениям п. 2). Тогда

$$\varphi_0(\varphi(1)-p\varphi_1) = \psi_0(p\psi_1-\psi(1)), \tag{2.14}$$

причем числа $\varphi(1)-p\varphi_1$ и $\psi(1)-p\psi_1$ отличны от нуля и, следовательно, точно одно из них положительно.

Пусть $\varphi(1)-p\varphi_1 > 0$. Тогда $\psi_0 \mid \varphi(1)-p\varphi_1$ и $\psi_0 \le \varphi(1)$. Далее, ввиду (2.14) $\psi(1)-p\psi_1 < 0$ и тогда $\varphi_0 \mid p\psi_1-\psi(1)$ и $\varphi_0 \le p\psi_1-\psi(1) \le p\psi(1)-\psi(1) = (p-1)\psi(1)$. В этом случае верно условие а).

Если же $\psi(1)-p\psi_1 > 0$, то подобно предыдущему рассуждению получаем условие б).

Теорема 2.2$'$ доказана.

Из теоремы 2.2$'$ непосредственно вытекает

Следствие. *Если* $G_p \nsubseteq G_+$, $p \nmid t$ *и* $\varphi_0 \le \psi_0$, *то* $\frac{\psi_0}{\varphi_0} \le (p-1)t$.

Замечания.

1. В условии 2) теоремы 2.2$'$ при $\varphi_1 = 0$ будет $\psi_0 \mid t$, а при $\psi_1 = 0$ будет $\varphi_0 \mid t$.

2. Если в условии 2) теоремы 2.2$'$ будет $\varphi_1 = \varphi(1)$, то будет $\varphi_0(\varphi_0 t - p\varphi_0 t) = \psi_0(p\psi_1 - \psi_0 t)$, т. е. $\varphi_0^2(p-1)t = \psi_0(\psi_0 t - p\psi_1)$, откуда

$$\psi_0 \mid (p-1)t$$

и $\varphi_0^2 \mid \psi_0 t - p\psi_1$, т. е. $\varphi_0^2 \le \psi_0 t - p\psi_1 \le \psi_0 t$ и

$$\varphi_0 \le \sqrt{\psi_0 t} \le \sqrt{p-1}t.$$

§ 3. Первое приближение к гипотезе 1

Здесь мы получим некоторое (хотя и незначительное) приближение к гипотезе 1, а именно, что степени $\varphi(1)$ и $\psi(1)$ полупропорциональных неприводимых характеров φ и ψ имеют нееединичный общий делитель, за исключением тривиального случая, когда $\varphi(1) = \psi(1) = 1$.

Лемма 3.1. *Пусть $H \leq G$. Тогда выполнено точно одно из следующих условий:*

1) $H \subseteq G_+ \cup G_0$, и существует характер θ группы H такой, что $\varphi|_H = \varphi_0\theta$ и $\psi|_H = \psi_0\theta$;

2) $H \nsubseteq G_+ \cup G_0$, и характеры $\varphi|_H$ и $\psi|_H$ полупропорциональны.

Доказательство. Предположим, что $H \subseteq G_+ \cup G_0$. Для характеров $\varphi|_H$ и $\psi|_H$ группы H имеем

$$\varphi|_H = \sum_{\xi \in \mathrm{Irr}(H)} a_\xi \xi, \quad \psi|_H = \sum_{\xi \in \mathrm{Irr}(H)} b_\xi \xi,$$

где $a_\xi, b_\xi \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Так как $H \subseteq G_+ \cup G_0$, то по лемме 2.1 $\psi_0\varphi|_H = \varphi_0\psi|_H$, т. е.

$$\sum_{\xi \in \mathrm{Irr}(H)} \psi_0 a_\xi \xi = \sum_{\xi \in \mathrm{Irr}(H)} \varphi_0 b_\xi \xi.$$

Следовательно, для всех $\xi \in \mathrm{Irr}(H)$ $\psi_0 a_\xi = \varphi_0 b_\xi$, и $\frac{a_\xi}{\varphi_0} = \frac{b_\xi}{\psi_0} =: c_\xi \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (так как $(\varphi_0, \psi_0) = 1$). Но теперь, положив

$$\theta := \sum_{\xi \in \mathrm{Irr}(H)} c_\xi \xi,$$

имеем $\varphi|_H = \varphi_0\theta$ и $\psi|_H = \psi_0\theta$, т. е. выполнено условие 1).

Предположим теперь, что $H \nsubseteq G_+ \cup G_0$. Так как тогда $H \cap G_- \neq \varnothing$, то характеры $\varphi|_H$ и $\psi|_H$ не могут быть пропорциональными и, следовательно, ввиду леммы 2.1 они полупропорциональны.

Лемма 3.1 доказана.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено предположение* А. *Тогда если $\varphi(1) \neq \psi(1)$, то $t \neq 1$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\psi) = 1$. Предположим, что $\varphi(1) \neq \psi(1)$ и $t = 1$. Тогда согласно лемме 2.1

$$\frac{\varphi(d)}{\varphi(1)} = \frac{\psi(d)}{\psi(1)} \in \widehat{\mathbb{Z}}$$

для всех $d \in G_+$. Отсюда по утверждению 2A31 из [2] следует, что для любого $d \in G_+$ справедливы равенства

$$|\varphi(d)| = \varphi(1) \quad \text{и} \quad |\psi(d)| = \psi(1), \tag{3.1}$$

из которых ввиду утверждения 2A30 из [2] вытекает, что

$$[d, G] \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\psi) = 1,$$

т. е. $d \in Z(G)$. Следовательно, $G_+ \subseteq Z(G)$. Предположим, что существует элемент $z \in Z(G) \setminus G_+$. Тогда, учитывая, что $|\varphi(z)| = \varphi(1)$ и $|\psi(z)| = \psi(1)$ ([3, теорема 2A9(4)] при $g = g^{-1}$), ввиду леммы 2.1 имеем

$$\frac{\varphi(1)}{\psi(1)} = \left|\frac{\varphi(z)}{\psi(1)}\right| = \left|\frac{\psi(z)}{\varphi(1)}\right| = \frac{\psi(1)}{\varphi(1)},$$

откуда $\varphi(1) = \psi(1)$ в противоречие с предположением. Значит,

$$G_+ = Z(G). \tag{3.2}$$

Из (3.2) и леммы 3.1 получаем, что $\varphi|_{Z(G)} = \varphi_0\theta$, где θ — характер группы $Z(G)$. Поскольку $t = 1$, то θ — линейный (и тем самым неприводимый) характер. Но тогда (так как $Z(G) \trianglelefteq G$) по теореме 11.29 из [8]

$$\varphi_0 \mid |G : Z(G)|. \tag{3.3}$$

По п. 6) предложения 1.2 $\varphi_0 \neq 1$. Пусть p — простой делитель φ_0. Тогда p не делит $\varphi_0^2 + \psi_0^2$ и по теореме 2.2 $G_p \subseteq G_+ = Z(G)$. Отсюда $Z(G)$ содержит силовскую p-подгруппу из G и, значит, $p \nmid |G : Z(G)|$, в противоречие с (3.3). Таким образом, утверждение $t = 1$ ложно.

Теорема 3.1 доказана.

§ 4. О ядрах характеров φ и ψ

Пусть $K := \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$. Тогда, как следует из п. 3) предложения 1.2, группа G/K имеет пару полупропорциональных неприводимых характеров $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$, где $\widetilde{\varphi}(gK) = \varphi(g)$ и $\widetilde{\psi}(gK) = \psi(g)$ при $g \in G$. Поэтому для изучения фактор-группы G/K мы можем принять условие $K = 1$.

Лемма 4.1. $G_+ \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = G_+ \cap \mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\psi)$.

Доказательство. Из леммы 2.1 непосредственно следует, что

$$G_+ \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = G_+ \cap \mathrm{Ker}(\psi)$$

и если $x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\psi) \cap (G_- \cup G_0)$, то

$$\frac{\psi(1)}{\varphi_0} = \frac{\psi(x)}{\varphi_0} = -\frac{\varphi(x)}{\psi_0} = \frac{\varphi(1)}{\psi_0},$$

что противоречиво.

Лемма 4.1 доказана.

Из этой леммы следует, что при $K = 1$ и $N \in \{\mathrm{Ker}(\varphi), \mathrm{Ker}(\psi)\}$ выполняется равенство $N \cap G_+ = 1$. Следующая теорема 4.1 показывает, что при $\varphi(1) \neq \psi(1)$ в группе G существует не более одной неединичной нормальной подгруппы N с этим свойством. Для доказательства потребуется следующая

Лемма 4.2. *Если $H \leq G$ и $H \cap G_+ = 1$, то $\varphi_0\varphi|_H + \psi_0\psi|_H = c\rho_H$, где ρ_H — регулярный характер группы H и $c = \frac{(\varphi_0^2+\psi_0^2)t}{|H|} \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. По лемме 2.1 характер $\varphi_0\varphi|_H + \psi_0\psi|_H$ исчезает на $H \setminus \{1\}$ и, следовательно, кратен регулярному характеру

$$\rho_H = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(H)} \chi(1)\chi$$

группы H:

$$\varphi_0\varphi|_H + \psi_0\psi|_H = c\rho_H, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Из этого равенства получаем $\big(\varphi_0^2 + \psi_0^2\big)t = c|H|$ (сравнив значения левой и правой частей на единичном элементе), а также $\varphi_0(\varphi|_H, 1_H)_H + \psi_0(\psi|_H, 1_H)_H = c(\rho_H, 1_H)_H = c$ и, следовательно, $c \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $c = \big(\varphi_0^2 + \psi_0^2\big)t/|H| \in \mathbb{N}$, и лемма 4.2 доказана.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено предположение* А. *Допустим, что* $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\psi) = 1$ *и* G *имеет неединичную нормальную подгруппу* N *такую, что* $N \cap G_+ = 1$. *Тогда верны следующие утверждения.*

1) *Все неединичные элементы из* N *сопряжены в* G *и, в частности,* N — *элементарная абелева минимальная нормальная подгруппа в* G.

2) N *совпадает с* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *или с* $\mathrm{Ker}(\psi)$.

3) $|N| = \varphi_0^2 + \psi_0^2$, *причем либо* $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$, $\varphi_0 = 1$ *и* $\psi_0 \mid t$, *либо* $N = \mathrm{Ker}(\psi)$, $\psi_0 = 1$ *и* $\varphi_0 \mid t$.

4) *Если* $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq 1 \neq \mathrm{Ker}(\psi)$, *то* $|\mathrm{Ker}(\varphi)| = |\mathrm{Ker}(\psi)| = 2$ *и* $\varphi(1) = \psi(1)$.

Доказательство. 1) По лемме 4.2 (при $H = N$)

$$\varphi_0\varphi|_N + \psi_0\psi|_N = c\rho_N, \quad \text{где} \quad c = \frac{(\varphi_0^2 + \psi_0^2)t}{|N|} \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Далее, по теореме Клиффорда (теорема 2Б9 в [2]) имеем

$$\varphi|_N = n_\varphi \sum_{g \in (G:G_\xi)} \xi^g \quad \text{и} \quad \psi|_N = n_\psi \sum_{g \in (G:G_\theta)} \theta^g,$$

где $\{n_\varphi, n_\psi\} \subseteq \mathbb{N}$ и $\{\xi, \theta\} \subseteq \mathrm{Irr}(N)$. Отсюда и из (4.1) следует (так как $\rho_N = \sum\limits_{\gamma \in \mathrm{Irr}(N)} \gamma(1)\gamma$), что каждый неприводимый характер подгруппы N сопряжен в G с ξ или с θ. Поэтому

$$\text{один из характеров } \xi \text{ и } \theta \text{ совпадает с } 1_N \tag{4.2}$$

и

$$\text{все характеры из } \mathrm{Irr}(N) \setminus \{1_N\} \text{ сопряжены в } G. \tag{4.3}$$

Из (4.3) по (6.33) из [8] следует (так как $\mu^g(h^g) = \mu(h)$ для всех $\mu \in \mathrm{Irr}(G)$, $h \in N$ и $g \in G$), что все неединичные элементы из N сопряжены в G.

2) Из утверждения (4.2), полученного при доказательстве п. 1), следует, что $N \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$ или $N \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$. Пусть, например, $N \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$. Поскольку по лемме 4.1 $G_+ \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = 1$ (т. е. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ удовлетворяет условию теоремы 4.1 на месте N), то по уже доказанному п. 1) этой теоремы $\mathrm{Ker}(\varphi)$ — минимальная нормальная подгруппа в G и, следовательно, $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Аналогично доказывается, что из $N \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$ следует $N = \mathrm{Ker}(\psi)$,

3) По п. 2) N совпадает с $\mathrm{Ker}(\varphi)$ или с $\mathrm{Ker}(\psi)$. Предположим, что $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Тогда по теореме Клиффорда

$$\varphi|_N = \varphi(1)1_N \quad \text{и} \quad \psi|_N = n_\psi \sum_{g \in (G:G_\theta)} \theta^g, \text{ где } n_\psi \in \mathbb{N} \text{ и } \theta \in \mathrm{Irr}(N),$$

причем $\theta \neq 1_N$, так как $N \nsubseteq \mathrm{Ker}(\psi)$. Теперь, подсчитав кратности характера 1_N в левой и правой частях равенства (4.1), получим $\varphi_0\varphi(1) = \frac{(\varphi_0^2+\psi_0^2)t}{|N|}$, откуда $|N| = \frac{\varphi_0^2+\psi_0^2}{\varphi_0^2}$, а так как φ_0 и ψ_0 взаимно просты, то

$$\varphi_0 = 1 \text{ и } |N| = \varphi_0^2 + \psi_0^2.$$

Далее, по лемме 2.1 для любого $x \in N \setminus \{1\}$ имеем

$$\psi(x) = -\frac{\varphi_0}{\psi_0}\varphi(x) = -\frac{\varphi_0^2 t}{\psi_0},$$

откуда следует, что $\psi_0 \mid t$.

Аналогично при $N = \mathrm{Ker}(\psi)$ получим $\psi_0 = 1$, $|N| = \varphi_0^2 + \psi_0^2$ и $\varphi_0 \mid t$. Утверждение 3) доказано.

4) Если подгруппы $\mathrm{Ker}(\varphi)$ и $\mathrm{Ker}(\psi)$ обе не единичны, то каждая из них может выступать в роли N (см. абзац перед леммой 4.2). Но тогда по 3) будет $\varphi_0 = 1$, $\psi_0 = 1$, т. е. $\varphi(1) = \psi(1)$, и $|\mathrm{Ker}(\varphi)| = |\mathrm{Ker}(\psi)| = 2$.

Теорема 4.1 доказана.

Отметим, что последнее утверждение теоремы 4.1 подтверждает гипотезу 1 в случае, когда ядра полупропорциональных неприводимых характеров φ и ψ группы G не инцидентны.

Следствие. *Пусть выполнено условие теоремы* 4.1 *и* $\varphi(1) < \psi(1)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$ *и* $\mathrm{Ker}(\psi) = 1$ (*в частности,* $\varphi_0 = 1$, $\psi_0 \mid t$ *и* $|N| = 1 + \psi_0^2$ — *степень некоторого простого числа* p);

б) *группа* G *не нильпотентна;*

в) $\psi_0^2 \mid \chi(1)$ *для любого* $\chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \mathrm{Irr}(G \mid N)$;

г) $\mathrm{Irr}(G \mid N) = \mathrm{Irr}\big(1_N^G\big)$;

д) $\mathrm{Irr}(G) = \mathrm{Irr}\big(1_N^G\big) \dot\cup \mathrm{Irr}(\xi^G)$, *где* $\xi \in \mathrm{Irr}(N) \setminus \{1_N\}$;

е) *если* $k \in N \setminus \{1\}$, *то* $|G| = |C_G(k)|\psi_0^2$ *и* $\psi(k) = -\frac{\varphi(1)}{\psi_0}$;

ё) *если* $\psi_0 = q^m$, *где* q — *простое число и* $m \in \mathbb{N}$, *то* $q = 2$, $|N| = p = 1 + 2^{2m}$ *и* $G/C_G(N)$ — *циклическая группа порядка* $p - 1 = 2^{2m}$.

Доказательство. а) Предположим, что существует $g \in \mathrm{Ker}(\psi) \setminus \{1\}$. Тогда по лемме 4.1 $g \in G \setminus D$ и по лемме 2.1

$$\varphi(g) = -\frac{\psi(1)}{\varphi(1)}\psi(g) = -\frac{\psi(1)^2}{\varphi(1)},$$

откуда $|\varphi(g)| > \varphi(1)$ в противоречие с утверждением 2A11 из [2]. Следовательно, $\mathrm{Ker}(\psi) = 1$, и ввиду п. 2) теоремы 4.1 $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

б) Если G нильпотентна, то каждая ее минимальная нормальная подгруппа содержится в ее центре. Поэтому из п 1) теоремы 4.1 $|N| = 2$. Но тогда согласно п. а) $\psi_0 = 1$, что противоречит предположению $\varphi(1) < \psi(1)$.

в) Согласно (4.3) $\mathrm{Irr}(N) = \{1_N\} \cup \{\xi^g \mid g \in (G : G_\xi)\}$, где $\xi(1) = 1$ ввиду абелевости N. Отсюда и из равенства (4.1), в котором согласно п. а) этого следствия $\varphi_0 = 1$ и $c = 1$, получаем

$$\psi|_N = \frac{t}{\psi_0} \sum_{g \in (G:G_\xi)} \xi^g. \tag{4.4}$$

Если $\chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus \mathrm{Irr}(G \mid N)$, то согласно теореме Клиффорда

$$\chi|_N = n_\chi \sum_{g \in (G:G_\xi)} \xi^g, \text{ где } n_\xi \in \mathbb{N} \text{ и } \xi \in \mathrm{Irr}(N) \setminus \{1_N\}.$$

Отсюда и из (4.4) следует, что $\chi(1)/n_\chi = \psi(1)/\frac{t}{\psi_0} = \psi_0^2$.

г) Используя закон взаимности Фробениуса (утверждение 2Б1 в [2]), получаем

$$\chi \in \mathrm{Irr}(1_N^G) \Longleftrightarrow 0 \neq (1_N^G, \chi)_G = (1_N, \chi|_N)_N = (\chi|_N, 1_N)_N \Longleftrightarrow \chi \in \mathrm{Irr}(G \mid N).$$

д) Это следует из п. г) и из предпоследнего предложения в доказательстве п. в) с использованием закона взаимности Фробениуса.

е) $|G : C_G(k)| = |k^G| = |N| - 1 = \psi_0^2$. Второе утверждение вытекает из леммы 2.1.

ё) По в) $p^n = 1 + q^{2m}$. Отсюда по лемме IX.2.7 из [10] следует, что $q = 2$ и $n = 1$, т. е. $|N| = p = 1 + 2^{2m}$. Тогда $C_G(N) = C_G(k)$, где $k \in N \setminus \{1\}$, и $|G/C_G(N)| = |G : C_G(k)| = \psi_0^2 = p - 1$ (по п. е)). Поэтому $G/C_G(N) \simeq \mathrm{Aut}(N) \simeq Z_{p-1}$.

Следствие доказано.

§ 5. Прямые произведения групп

Пусть $G = A \times B$ — (внешнее или внутреннее) прямое произведение групп A и B. Хорошо известно (см., например, утверждение 2A38 в [2]), что $\mathrm{Irr}(G) = \{\alpha \times \beta \mid \alpha \in \mathrm{Irr}(A), \beta \in \mathrm{Irr}(B)\}$. Здесь $\alpha \times \beta$ — функция из G в $\mathbb{C}$, определяемая для всех $a \in A$ и $b \in B$ равенством $(\alpha \times \beta)((a, b)) = \alpha(a)\beta(b)$ в случае внешнего прямого произведения и равенством $(\alpha \times \beta)(ab) = \alpha(a)\beta(b)$ в случае внутреннего прямого произведения.

Целью этого параграфа является доказательство следующего результата.

Теорема 5.1. *Если гипотеза о полупропорциональных характерах верна для групп A и B, то она верна и для группы $A \times B$.*

Более того, если $\{\varphi, \psi\} \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, где $G = A \times B$, то равносильны утверждения:

(1) *φ и ψ полупропорциональны;*

(2) *$\varphi = \alpha_1 \times \beta_1$ и $\psi = \alpha_2 \times \beta_2$, где $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subseteq \mathrm{Irr}(A)$, $\{\beta_1, \beta_2\} \subseteq \mathrm{Irr}(B)$, и выполнено одно из следующих условий:*

2а) *α_1 и α_2 полупропорциональны, и $\beta_1 = \beta_2$;*

2б) *β_1 и β_2 полупропорциональны, и $\alpha_1 = \alpha_2$;*

2в) *α_1 и α_2 полупропорциональны, β_1 и β_2 полупропорциональны, $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ и $\beta_1(1) = \beta_2(1)$ (в этом случае $\varphi(1) = \psi(1)$).*

Для доказательства теоремы потребуются следующие две леммы.

Лемма 5.1. *Пусть выполнено предположение* А *и $H \leq G$. Положим*

$$s_\varphi := (\varphi|_H, \varphi|_H)_H, \quad s_\psi := (\psi|_H, \psi|_H)_H, \quad s := (\varphi|_H, \psi|_H)_H,$$

$$m_+ := \sum_{d \in G_+ \cap H} |m_d|^2, \quad m_- := \sum_{x \in G_- \cap H} |m_x|^2.$$

Тогда

а) $|H| s_\varphi = \varphi_0^2 m_+ + \psi_0^2 m_-, \quad |H| s_\psi = \psi_0^2 m_+ + \varphi_0^2 m_-,$

б) $|H| s = \varphi_0 \psi_0 (m_+ - m_-),$

в) $|H| \big(s_\varphi + s\frac{\psi_0}{\varphi_0}\big) = |H| \big(s_\psi + s\frac{\varphi_0}{\psi_0}\big) = m_+ \big(\varphi_0^2 + \psi_0^2\big),$

г) $|H| \big(s_\varphi - s\frac{\varphi_0}{\psi_0}\big) = |H| \big(s_\psi - s\frac{\psi_0}{\varphi_0}\big) = m_- \big(\varphi_0^2 + \psi_0^2\big),$

д) $s_\varphi = s_\psi \Longleftrightarrow (\varphi_0 - \psi_0) s = 0.$

Доказательство. Введем обозначения

$$A = \sum_{d \in G_+ \cap H} |\varphi(d)|^2 \quad \big(= \varphi_0^2 m_+\big), \quad B = \sum_{x \in G_- \cap H} |\varphi(x)|^2 \quad \big(= \psi_0^2 m_-\big).$$

Имеем

$$|H|s_\varphi = \sum_{h\in H}|\varphi(h)|^2 = \sum_{d\in G_+\cap H}|\varphi(d)|^2 + \sum_{x\in G_-\cap H}|\varphi(x)|^2 = A + B$$

и аналогично, используя лемму 2.1,

$$|H|s_\psi = \sum_{d\in G_+\cap H}|\psi(d)|^2 + \sum_{x\in G_-\cap H}|\psi(x)|^2 = \frac{\psi_0^2}{\psi_0^2}A + \frac{\varphi_0^2}{\psi_0^2}B$$

и

$$|H|s = \frac{\psi_0}{\varphi_0}A - \frac{\varphi_0}{\psi_0}B.$$

Отсюда следуют равенства а) и б). Из этих равенств непосредственно выводятся равенства в) и г). Наконец, первое равенство в п. в) влечет равенство

$$s_\varphi - s_\psi = \frac{s}{\varphi_0\psi_0}\big(\varphi_0^2 - \psi_0^2\big),$$

из которого, очевидно, следует утверждение д).

Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2. *Пусть выполнено предположение* A *и* $H \le G$. *Если* $\varphi|_H$ *и* $\psi|_H$ *кратны неприводимым характерам* ξ *и* θ *группы* H *соответственно, то*

либо $\xi = \theta$ (*и* $H \subseteq G_+ \cup G_0$),

либо ξ *и* θ *полупропорциональны и* $(\varphi|_H, \xi)_H = (\psi|_H, \theta)_H$ ($H \nsubseteq G_+ \cup G_0$).

Доказательство. Пусть $\varphi|_H = a\xi$ и $\psi|_H = b\theta$ ($a, b \in \mathbb{N}$). По лемме 3.1 либо $H \subseteq G_+ \cup G_0$ и тогда $\xi = \theta$, либо $H \nsubseteq G_+ \cup G_0$ и характеры $\varphi|_H = a\xi$ и $\psi|_H = b\theta$ полупропорциональны. А именно, ввиду леммы 2.1

$\frac{a\xi(d)}{\varphi_0} = \frac{b\theta(d)}{\psi_0}$ для любого $d \in (G_+ \cup G_0) \cap H$,

$\frac{a\psi(x)}{\psi_0} = -\frac{b\theta(x)}{\varphi_0}$ для любого $x \in G_- \cap H$ ($\neq \varnothing$).

Отсюда следует полупропорциональность характеров ξ и θ ($\{\xi, \theta\}$ есть $(G_+ \cap H)$-блок группы H). Но тогда $\xi \neq \theta$ и $(\varphi|_H, \psi|_H)_H = 0$, откуда по п. д) леммы 5.1 $(\varphi|_H, \varphi|_H)_H = (\psi|_H, \psi|_H)_H$, т. е. $a^2 = b^2$ и $a = b$.

Лемма 5.2 доказана.

Доказательство теоремы 5.1. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть выполнено условие (1). Согласно утверждению 2A38 из [2] $\varphi = \alpha_1 \times \beta_1$ и $\psi = \alpha_2 \times \beta_2$, где $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subseteq \mathrm{Irr}(A)$ и $\{\beta_1, \beta_2\} \subseteq \mathrm{Irr}(B)$. Без ограничения общности мы можем считать, что $G = A \times B$ — внутреннее прямое произведение, т. е. A и B — подгруппы в G. Тогда

$$\varphi|_A = \beta_1(1)\alpha_1, \quad \psi|_A = \beta_2(1)\alpha_2,$$
$$\varphi|_B = \alpha_1(1)\beta_1, \quad \psi|_B = \alpha_2(1)\beta_2.$$

Ввиду леммы 5.2 отсюда следует, что имеются лишь две возможности для α_1 и α_2:

a1) $A \subseteq G_+ \cup G_0$ и $\alpha_1 = \alpha_2$,

a2) $A \nsubseteq G_+ \cup G_0$, α_1 и α_2 полупропорциональны, и $\beta_1(1) = \beta_2(1)$;

и также лишь две возможности для β_1, β_2:

b1) $B \subseteq G_+ \cup G_0$ и $\beta_1 = \beta_2$,

b2) $B \nsubseteq G_+ \cup G_0$, β_1 и β_2 полупропорциональны, и $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$.

Утверждения a1) и b1) одновременно не могут быть выполнены, так как $\varphi \neq \psi$. Комбинации же утверждений «a1) и b2)», «a2) и b1)» и «a2) и b2)» влекут, очевидно, утверждения 2б), 2а) и 2в) теоремы соответственно.

(2) $\Rightarrow$ (1) Доказательство этого утверждения легко получается с помощью предложения 1.1. Пусть, например, выполнено утверждение 2в). Рассмотрим подмножества A_+, A_- и A_0 из A, имеющие по отношению к α_1 и α_2 такой же смысл, как G_+, G_- и G_0 по отношению к φ и ψ в предложении 1.2, и подобные подмножества B_+, B_- и B_0 из B для β_1 и β_2. Так как $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ и $\beta_1(1) = \beta_2(1)$, то по предложению 1.1

$\alpha_1(d_A) = \alpha_2(d_A)$ для всех $d_A \in A_+ \cup A_0$,
$\alpha_1(x_A) = -\alpha_2(x_A)$ для всех $x_A \in A_-$

и

$\beta_1(d_B) = \beta_2(d_B)$ для всех $d_B \in B_+ \cup B_0$,
$\beta_1(x_B) = -\beta_2(x_B)$ для всех $x_B \in B_-$.

Отсюда следует, что

$$\varphi(g) = \pm\psi(g) \quad \text{для всех } g \in G,$$

и, значит, φ и ψ полупропорциональны (при этом, как легко увидеть, $G_+ = A_+B_+ \cup A_-B_-$, $G_- = A_+B_- \cup A_-B_+$, $G_0 = A_0B \cup AB_0$).

Теорема 5.1 доказана.

Следствие 1. *Гипотеза о полупропорциональных характерах верна для всех конечных 2-разложимых групп.*

Доказательство. 2-Разложимая группа G имеет вид $G = A \times B$, где A — 2-группа, а B — группа нечетного порядка. По теореме 2.1 группа B не имеет пар полупропорциональных неприводимых характеров и, значит, гипотеза о полупропорциональных характерах для B верна. Далее, согласно следствию теоремы 2.1 эта гипотеза верна для A. Следовательно, по теореме 5.1 она верна и для G.

Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Если гипотеза о полупропорциональных характерах верна для групп A и B, то она верна и для любого их центрального произведения.*

Доказательство. Пусть гипотеза 1 верна для групп A и B. Тогда по теореме 5.1 она верна для группы $A \times B$. Но любое центральное произведение групп A и B является гомоморфным образом группы $A \times B$. Остается заметить, что

если гипотеза 1 верна для некоторой группы H,
то она верна и для любой ее фактор-группы H/N;

это следует из существовании естественного взаимно однозначного соответствия между $\mathrm{Irr}(H \mid N)$ и $\mathrm{Irr}(H/N)$ (см. 2A34 в [2]).

Следствие 2 доказано.

Из теоремы 5.1 непосредственно вытекают также следующие два утверждения.

Следствие 3. *Если группы A и B не имеют пар полупропорциональных характеров, то их не имеет и группа $A \times B$.*

Следствие 4. *Если φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы $G = A \times B$, причем ни A ни B не содержатся в G_+, то $\varphi(1) = \psi(1)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоногов В. А.* D-блоки характеров конечной группы // Исследования по теории групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1984. С. 3–31. (Англ. перевод: Belonogov V. A. D-blocks of characters of finite group // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1989. V. 143. P. 103–128).
2. *Белоногов В. А.* Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990.
3. *Белоногов В. А.* Взаимодействия и D-блоки в конечных группах // Подгрупповая структура групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 4–44.
4. *Белоногов В. А.* О малых взаимодействиях в конечных группах // Тр. ИММ УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 3–18.
5. *Белоногов В. А.* Малые взаимодействия в группах $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$, $\mathrm{PGL}_3(q)$ и $\mathrm{PGU}_3(q)$ // Тр. ИММ УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 17–47.
6. *Белоногов В. А.* Малые взаимодействия в группах $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$, $\mathrm{PSL}_3(q)$ и $\mathrm{PSU}_3(q)$ // Тр. ИММ УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 3–27.
7. *Белоногов В. А.* О неприводимых характерах групп S_n и A_n // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 977–994.
8. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York: Acad. Press, 1976.
9. *Белоногов В. А.* Одно свойство таблицы характеров конечной группы // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 273–279.
10. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. II. Berlin a. o.: Springer, 1982.

Статья поступила 3 февраля 2004 г.

Белоногов Вячеслав Александрович
Институт математики и механики УрО РАН
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620219
belonogov@imm.uran.ru