

## ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ $N$ ШАРОВ

Р. М. Гарипов

**Аннотация:** Найдены все упругие системы с точечным спектром. Для неконсервативных систем, близких к упругим, получена асимптотика скоростей шаров для больших времен. Эта одномерная модель шаров была призвана прояснить проблемы кинетической теории газов и турбулентности, но сама оказалась трудной для изучения.

**Ключевые слова:** динамическая система, кристаллографическая группа, факторизация, точечный спектр, малая неконсервативность, средняя скорость, флуктуация.

### 1. Введение

Динамическая система упругих или неупругих шаров, движущихся так, что их центры все время остаются на отрезке прямой между стенками, впервые была доложена на семинаре Л. В. Овсянникова [1]. При наличии неупругих столкновений с потерей кинетической энергии вводится простейший механизм притока энергии извне: в свободном движении ускорение шаров пропорционально их скорости. В этом случае система не является консервативной. Консервативная модель в общем виде была дана в книге [2]. Несмотря на простоту формулировки, эта динамическая система оказалась трудной для изучения. В случае двух неупругих шаров получена априорная оценка и для некоторых значений констант системы установлено свойство перемешивания [3, 4]. В данной статье найдены все упругие системы с точечным спектром, а для неупругих систем, близких к упругим, получена асимптотика скоростей шаров для больших времен.

Пусть шары находятся на отрезке  $[0, a]$  оси  $y$ . Перенумеруем их числами  $1, 2, \dots, N$  слева направо. Диаметр, массу, координату центра и скорость  $i$ -го шара соответственно обозначим через  $d_i, m_i, y_i, v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) (рис. 1). Стенки и шары предполагаются абсолютно жесткими, поэтому справедливы неравенства

$$d_1/2 \leq y_1, \quad y_{i+1} - y_i \geq (d_i + d_{i+1})/2 \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad y_N \leq a - d_N/2.$$

Свободное от шаров подмножество отрезка  $[0, a]$  предполагается имеющим суммарную длину 1:  $a = 1 + d_1 + \dots + d_N$ . Этого всегда можно добиться выбором масштаба. Выполним замену:

$$y_i \rightarrow x_i = y_i - (d_1 + \dots + d_{i-1} + d_i/2) \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Упорядоченная совокупность новых координат  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  центров шаров заполняет симплекс

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq 1, \quad (1.1)$$

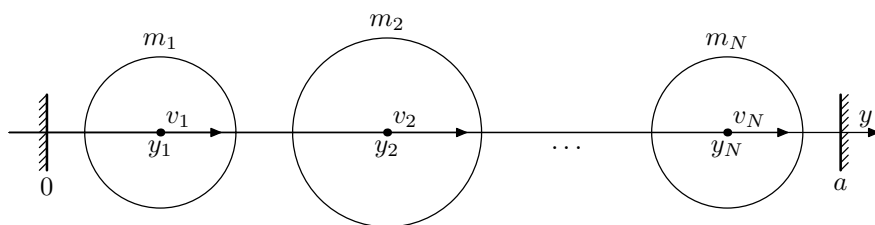


Рис. 1.

который обозначим через  $D$ . На скорости шаров  $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)$  нет кинематических ограничений. Таким образом, фазовым пространством рассматриваемой динамической системы является замкнутое множество  $\Phi = D \times \mathbb{R}^N$ .

Примем следующие уравнения движения внутри  $\Phi$ :

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = \alpha v_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \tag{1.2}$$

где  $\alpha \geq 0$  — константа ускорения, точка сверху обозначает производную по времени  $t$ . Если  $\alpha > 0$ , то имеется приток энергии извне, и динамическая система не консервативна. Так как уравнение на скорость интегрируется в виде  $v = v_0 \exp(\alpha t)$ , то лучи прямые (напомним, что *лучом* называется проекция траектории на координатное пространство). Система уравнений (1.2) имеет нужный в дальнейшем очевидный интеграл

$$v - \alpha x = \text{const}. \tag{1.2'}$$

Теперь сформулируем условия отражения траектории системы (1.2) от границы фазового пространства  $\partial\Phi = \partial D \times \mathbb{R}^N$ . Граница симплекса  $D$  состоит из граней  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ , которые, в свою очередь, являются симплексами размерности  $N - 1$ . В системе неравенств (1.1) перенумеруем знаки  $\leq$  слева направо числами  $0, 1, \dots, N$ . Заменив  $i$ -й знак  $\leq$  на  $=$ , получим грань  $\Gamma_i$ . Таким образом, грань  $\Gamma_0$  соответствует соударению 1-го шара с левой стенкой,  $\Gamma_i$  ( $1 \leq i \leq N - 1$ ) — столкновению  $i$ -го и  $i + 1$ -го шаров, а  $\Gamma_N$  — соударению  $N$ -го шара с правой стенкой. Столкновения более высокого порядка, чем парные, не рассматриваются. Им соответствует множество траекторий лебеговой меры 0.

Пусть столкновения неупругие. Тогда при  $i$ -м соударении, т. е. при отражении от грани  $\Gamma_i$ , относительная скорость умножается на  $-\beta_i$ , суммарный импульс сохраняется. Число  $0 < \beta_i \leq 1$  в бильярде называется *коэффициентом восстановления*. При  $\beta_i = 1$  соударение абсолютно упругое. Если не все константы  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$  равны 1, то при столкновениях теряется кинетическая энергия, поэтому константа ускорения должна быть положительной, чтобы шары не остановились через некоторое время. В этом случае система не консервативна. При столкновениях координата  $x$  остается непрерывной, а скорость  $v$  скачком переходит в  $v'$ :

$$\begin{aligned} x \in \Gamma_0 : v'_1 &= -\beta_0 v_1 > 0; & x \in \Gamma_N : v'_N &= -\beta_N v_N < 0; \\ x \in \Gamma_i : v'_i - v'_{i+1} &= -\beta_i (v_i - v_{i+1}) < 0, & m_i v'_i + m_{i+1} v'_{i+1} &= m_i v_i + m_{i+1} v_{i+1} \\ & & (i = 1, \dots, N - 1), & \end{aligned} \tag{1.3}$$

не указанные координаты скорости сохраняются неизменными.

## 2. Консервативная система с точечным спектром

Пусть задано аффинное отображение координатного пространства  $\pi : x \rightarrow x'$ . Этой же буквой  $\pi$  условимся обозначать отображения  $v \rightarrow \dot{\pi}v$ ,  $(x, v) \rightarrow (\pi x, \dot{\pi}v)$ , где  $\dot{\pi}$  — линейная часть  $\pi$ . Это соглашение не ведет к большой путанице, так как скорость является вектором касательного пространства к пространству координат. Граничные условия (1.3) определяют линейные части  $v \rightarrow v'$  аффинных отображений  $\pi_i$ , обладающих свойством  $\pi_i x = x \forall x \in \Gamma_i$ . Отражение траектории от грани  $\Gamma_i$  в принятых обозначениях можно записать так:  $v' = \pi_i v$ . Отображения  $\pi_0, \dots, \pi_{N-1}$  совпадают с их линейными частями  $v \rightarrow v'$ ,

$$\pi_N x = (x_1, \dots, x_{N-1}, -\beta_N x_N + \beta_N + 1).$$

В консервативном случае  $\alpha = 0$ ,  $\beta_0 = \dots = \beta_N = 1$  все отображения  $\pi_0, \dots, \pi_N$  инволютивны. Они называются *отражениями*.

Система уравнений (1.2) не меняет своего вида при произвольном аффинном преобразовании координат (это утверждение верно и при  $\alpha > 0$ ). Луч  $l$  с началом  $x^0 \in D$  представляет собой ориентированную ломаную линию с вершинами на гранях симплекса  $D$ . Звенья этой ломаной обозначим через  $l_1, l_2, \dots$ , и пусть вершина  $l_1 \cap l_2$  лежит на  $\Gamma_i$ , следующая вершина — на  $\Gamma_j$ , и т. д. Симплексы  $D$  и  $\pi_i D$  пересекаются по общей грани  $\Gamma_i$  и расположены по разные стороны от нее. Продолжив звено  $l_1$  прямолинейно (с той же скоростью  $v$ ) в симплекс  $\pi_i D$  до пересечения с его гранью  $\pi_i \Gamma_j$ , получим направленный отрезок  $l'_2$ . В силу  $\pi_i^{-1} = \pi_i$  имеет место равенство  $l_2 = \pi_i^{-1} l'_2$ . Тем самым два звена луча  $l_1 \cup l_2$  мы отобразили в один отрезок  $l_1 \cup l'_2$ . Аналогично продолжим  $l'_2$  через грань  $\pi_i \Gamma_j$  с помощью отображения  $\pi'_j = \pi_i \pi_j \pi_i^{-1}$  в симплекс  $\pi'_j \pi_i D = \pi_i \pi_j D$ . В результате получим отрезок  $l'_3$ , соответствующий звену  $l_3$  луча  $l$ , и т. д. Таким способом распрямим весь луч  $l$ . Итак, вместо ломаных лучей  $l \subset D$  можно рассматривать прямые лучи  $l' = l_1 \cup l'_2 \cup \dots \subset \mathbb{R}^N$ , если отождествить точки пространства  $\mathbb{R}^N$ , получающиеся друг из друга отображениями вида  $\pi_{i_1} \dots \pi_{i_k}$ . Эта процедура возможна, если группа, порожденная отражениями  $\pi_0, \dots, \pi_N$ , дискретна и имеет фундаментальную область  $D$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Динамическую систему (1.1)–(1.3) назовем *вырожденной*, если группа  $\Delta = \text{gr}\langle \pi_0, \dots, \pi_N \rangle$  дискретна и имеет фундаментальную область  $D$ .

Чтобы сформулировать условия дискретности группы  $\Delta$ , выполним преобразование координат  $x_i \rightarrow x'_i = \sqrt{m_i} x_i$ . Тогда симплекс  $D$  примет вид (штрихи опустим)

$$0 \leq \frac{x_1}{\sqrt{m_1}} \leq \dots \leq \frac{x_N}{\sqrt{m_N}} \leq 1. \quad (2.1)$$

При этом матрицы  $\dot{\pi}_0, \dots, \dot{\pi}_N$  симметризуются и их собственными векторами, соответствующими собственному числу  $-1$ , становятся внутренние нормали  $n_0, \dots, n_N$  к граням симплекса (2.1) относительно скалярного произведения

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N.$$

Согласно теореме 7.1.3 из [5] группа  $\Delta = \text{gr}\langle \pi_0, \dots, \pi_N \rangle$  дискретна и имеет фундаментальную область  $D$ , если и только если углы  $\varphi_{i,j}$  между гранями  $\Gamma_i$  и  $\Gamma_j$  симплекса  $D$  являются целыми долями от  $\pi$ :

$$\varphi_{i,j} = \pi - \arccos(n_i \cdot n_j) = \frac{\pi}{p_{i,j}}, \quad 2 \leq p_{i,j} \in \mathbb{Z} \quad (0 \leq i \neq j \leq N). \quad (2.2)$$

Пусть выполнены условия (2.2). Тогда  $\Delta$  является кристаллографической группой с фундаментальной областью  $D$ . Симплексы  $gD$  при  $g \in \Delta$  покрывают все координатное пространство  $\mathbb{R}^N$ , причем любые два из них не имеют общих внутренних точек. Через  $[Z]$  обозначим множество трансляций ( $Z$  — множество их векторов), принадлежащих группе  $\Delta$ , а через  $\Gamma$  — множество матриц  $\dot{g}$  элементов  $g \in \Delta$ . Так как трансляция взаимно однозначно определяется вектором, будем обозначать ее, заключая вектор в квадратные скобки. В кристаллографии множества  $Z$  и  $\Gamma$  называются *решеткой* и *группой поворотов* соответственно. Группа поворотов  $\Gamma \subset O(N)$  конечна. Решетка  $Z$  имеет базис — невырожденную матрицу  $E$  такую, что  $Z = EZ^N$ , и инвариантна относительно группы поворотов, т. е.  $AZ = Z$  для любой матрицы  $A \in \Gamma$  (см. [6]). Так как порождающие  $\pi_0, \dots, \pi_N$  являются отражениями, группа  $\Delta$  симморфна:  $\Delta = [Z]\Gamma$  (см. [7, гл. V, § 3, п. 10, предложение 10]).

Отождествим точки  $(x, v)$  и  $(y, w)$  пространства  $\mathbb{R}^{2N}$ , если  $g(x, v) = (y, w)$  для некоторого  $g \in \Delta$ . Полученное фактор-пространство  $\mathbb{R}^{2N}/\Delta$  гомеоморфно исходному фазовому пространству  $\Phi$ . Одной траектории динамической системы на  $\Phi$  соответствует класс эквивалентных в смысле принятого отождествления траекторий на  $\mathbb{R}^{2N}$ , причем в каждом классе имеется прямая траектория. Для плотности вероятности  $u(t, x, v)$ , удовлетворяющей уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^N v_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0,$$

граничное условие можно заменить требованием инвариантности относительно группы  $\Delta$ . Другими словами, оператор Лиувилля

$$L = \sum v_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

можно считать действующим в гильбертовом пространстве функций, заданных на  $\mathbb{R}^{2N}/\Delta$ .

**Предложение.** В консервативном вырожденном случае для каждого сечения  $V \subset \mathbb{R}^{2N}/\Delta$  с конечным набором скоростей вида  $\{A\hat{v} \mid A \in \Gamma\}$  оператор Лиувилля  $L$  отображает гильбертово пространство  $L_2(V)$  в себя и имеет полную систему собственных функций

$$u_n(x, v) = \sum_{A \in \Gamma} \exp(2\pi i n \cdot E^{-1} A^{-1} x) \theta(v - A\hat{v}) \quad (n \in \mathbb{Z}^N), \quad (2.3)$$

соответствующие собственные числа  $\lambda_n = 2\pi i n \cdot E^{-1} \hat{v}$  составляют его точечный спектр. Функция  $\theta(v)$  определена равенствами  $\theta(0) = 1$ ,  $\theta(v) = 0$  при  $v \neq 0$ .

**Доказательство.** Докажем, что функции (2.3) определены в фактор-пространстве  $\mathbb{R}^{2N}/\Delta$ , т. е.  $u_n(g^{-1}x, \dot{g}^{-1}v) = u_n(x, v) \forall g \in \Delta$  ( $\dot{g}$  — линейная часть аффинного отображения  $g$ ). Так как группа  $\Delta$  симморфна, то достаточно проверить это равенство для трансляций и поворотов. Имеем

$$u_n(x - \tau, v) = u_n(x, v) \quad \forall \tau \in Z,$$

потому что  $\exp(-2\pi i n \cdot E^{-1} A^{-1} \tau) = 1$ . Действительно, в силу инвариантности решетки  $Z$  относительно группы поворотов  $\Gamma$  вектор  $A^{-1}\tau = \tau'$  принадлежит решетке и поэтому найдется  $n' \in \mathbb{Z}^N$ ,  $\tau' = En'$ . Равенство

$$u_n(B^{-1}x, B^{-1}v) = u_n(x, v) \quad \forall B \in \Gamma$$

справедливо ввиду соотношения  $\theta(B^{-1}v - A\hat{v}) = \theta(v - BA\hat{v})$  и получается заменой индекса суммирования  $A \rightarrow BA$  в левой части.

Докажем полноту. Сечение  $V \subset \mathbb{R}^{2N}/\Delta$  получается из многослойного множества  $V' = \mathbb{R}^N \times \{A\hat{v} | A \in \Gamma\}$  отождествлением точек с помощью группы  $\Delta$ . Эквивалентны точки  $(x, v)$  и  $(x - \tau, v)$  ( $\tau \in Z$ ), следовательно, функция  $u(x, v) \in L_2(V)$  периодична по  $x$  с периодом  $E$  для каждого значения  $v$ . Далее, эквивалентны точки  $(x, v)$  и  $(A^{-1}x, A^{-1}v)$  ( $A \in \Gamma$ ), значит, точка  $(x, A\hat{v})$  эквивалентна  $(A^{-1}x, \hat{v})$ , поэтому функция  $u(x, v)$  определяется единственным образом своими значениями на первом слое  $V_1 = \mathbb{R}^N \times \{\hat{v}\}$ . Сужение функции  $u(x, v)$  на слой  $V_1$  разложим в ряд Фурье и продолжим нулем вне  $V_1$ :

$$u_1(x, v) = u(x, \hat{v})\theta(v - \hat{v}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} c_n \exp(2\pi i n \cdot E^{-1}x)\theta(v - \hat{v}).$$

Обозначим через  $u_2(x, v)$  сумму функций  $u_1(A^{-1}x, A^{-1}v)$  по всем  $A \in \Gamma$ . Очевидно,  $u_2(x, v)$  принадлежит  $L_2(V)$  и разлагается в ряд по функциям  $u_n(x, v)$ . Кроме того,  $u_2(x, \hat{v}) = pu(x, \hat{v})$ , где  $p$  — число матриц  $A \in \Gamma$  таких, что  $A\hat{v} = \hat{v}$ . Отсюда  $u(x, v) = \frac{1}{p}u_2(x, v)$ , следовательно,  $u(x, v)$  тоже разлагается в ряд по  $u_n(x, v)$ . Этим доказана полнота системы функций  $\{u_n\}$  в  $L_2(V)$ .

Вычислим значение оператора  $L$  на функции  $u_n$ :

$$Lu_n = \sum_{A \in \Gamma} (2\pi i n \cdot E^{-1}A^{-1}v) \exp(2\pi i n \cdot E^{-1}A^{-1}x)\theta(v - A\hat{v}).$$

Здесь в каждом ненулевом слагаемом имеет место равенство  $v = A\hat{v}$ , поэтому  $Lu_n = \lambda_n u_n$ ,  $\lambda_n = 2\pi i n \cdot E^{-1}\hat{v}$ . Следовательно,  $u_n$  — собственная функция оператора Лиувилля, а  $\lambda_n$  — соответствующее собственное число.  $\square$

Собственные функции (2.3) позволяют явно вычислить средние по времени моменты координат и скоростей шаров.

**Теорема 2.1.** Консервативная динамическая система (1.1)–(1.3) вырождена только в следующих случаях:

- (A)  $m_1 = m_2 = \dots = m_N$ ;
- (B)  $m_1 : m_2 = 1 : 3$  (или  $3 : 1$ );
- (C)  $m_1 : m_2 : m_3 : m_4 = 3 : 1 : 2 : 6$  (или  $6 : 2 : 1 : 3$ ).

**Доказательство.** Для доказательства теоремы надо решить уравнения (2.2) относительно масс шаров. Так как  $n_i \cdot n_j = 0$  для  $j > i + 1$ , а значит,  $\varphi_{i,j} = \pi/2$ ,  $p_{i,j} = 2$ , то достаточно рассмотреть углы  $\varphi_{i,i+1}$ . Имеем

$$\cos \varphi_{i,i+1} = \left( \frac{m_i m_{i+2}}{(m_i + m_{i+1})(m_{i+1} + m_{i+2})} \right)^{1/2} \quad (i = 0, \dots, N-1), \quad (2.4)$$

здесь надо положить  $m_0 = m_{N+1} = \infty$ , чтобы охватить также крайние углы  $\varphi_{0,1}$  и  $\varphi_{N-1,N}$ . Произведение  $\pi_i \pi_{i+1}$  есть поворот на угол  $2\varphi_{i,i+1}$  вокруг ребра  $\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}$ . Наличие решетки в группе  $\Delta$  делает эти углы кристаллографическими, т. е. равными  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  или  $180^\circ$ . Так как  $0 < \cos \varphi_{i,i+1} < 1$  согласно (2.4), последнее значение исключается. Итак,  $\varphi_{i,i+1}$  может быть  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  или  $60^\circ$ .

При  $N = 2$  после исключения отношения  $m_1/m_2$  из (2.4) получим

$$\cos^2 \varphi_{0,1} + \cos^2 \varphi_{1,2} = 1,$$

откуда  $\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2} = 90^\circ$ . Подставив сюда возможные значения углов, находим  $m_1/m_2 = 1, 1/3$  или  $3$ . Получили решения (A) при  $N = 2$  и (B).

Далее пусть  $N \geq 3$ . Введем величины

$$k_i = \frac{m_{i+1}}{m_i + m_{i+1}}, \quad k'_i = 1 - k_i \quad (i = 1, \dots, N - 1).$$

Тогда первое и последнее из равенств (2.4) примут вид

$$k_1 = \cos^2 \varphi_{0,1}, \quad k'_{N-1} = \cos^2 \varphi_{N-1,N}, \quad (2.5)$$

а остальные сведутся к рекуррентным соотношениям

$$k_{i+1} = \frac{\cos^2 \varphi_{i,i+1}}{1 - k_i}, \quad k'_i = \frac{\cos^2 \varphi_{i,i+1}}{1 - k'_{i+1}} \quad (i = 1, \dots, N - 2). \quad (2.6)$$

Так как  $\cos^2 \varphi_{i,i+1} \geq 1/4$  для возможных значений углов  $\varphi_{i,i+1}$  и  $k_i, k'_i \in (0, 1)$  по определению, из уравнений (2.5), (2.6) вытекают неравенства

$$k_i \geq 1/4, \quad k'_i \geq 1/4 \quad (i = 1, \dots, N - 1). \quad (2.7)$$

Значение  $\varphi_{i,i+1} = 30^\circ$  невозможно. Действительно, если  $\varphi_{i,i+1} = 30^\circ$  и  $1 \leq i < N - 1$ , то из (2.6) и (2.7) сразу вытекает противоречие:  $k'_{i+1} \geq 1$ . Если  $i = 0$ , то из (2.5) и (2.6) имеем  $k_1 = 3/4, k_2 \geq (1/4)/(1 - k_1) = 1$ . Если  $i = N - 1$ , то получим аналогичное противоречие:  $k'_{N-1} = 3/4, k'_{N-2} \geq 1$ . Утверждение доказано.

Пусть  $\varphi_{0,1} = 45^\circ$ . Из (2.5), (2.6) получим  $k_1 = 1/2, k_2 = 2 \cos^2 \varphi_{1,2}$ . Возможное значение  $\varphi_{1,2} = 45^\circ$  дает  $k_2 = 1$ , поэтому исключается. Остается  $\varphi_{1,2} = 60^\circ, k_2 = 1/2$ . На следующем шаге рекурсии аналогично получим  $\varphi_{2,3} = 60^\circ, k_3 = 1/2$  и т. д. вплоть до  $\varphi_{N-2,N-1} = 60^\circ, k_{N-1} = 1/2$ . Наконец,  $k'_{N-1} = 1 - k_{N-1} = 1/2$ , и из (2.5) найдем последний угол  $\varphi_{N-1,N} = 45^\circ$ . Отношения масс шаров равны

$$\frac{m_i}{m_{i+1}} = k_i^{-1} - 1 = 1 \quad (i = 1, \dots, N - 1).$$

Получили решение (А). Если  $\varphi_{N-1,N} = 45^\circ$ , то, решая рекуррентные уравнения (2.5), (2.6) на  $k'_i$ , получим тот же результат. Следовательно, другие решения имеют крайние углы

$$\varphi_{0,1} = \varphi_{N-1,N} = 60^\circ. \quad (2.8)$$

Нет решения  $\varphi_{0,1} = \dots = \varphi_{N-1,N} = 60^\circ$ . Действительно, система уравнений (2.5), (2.6) на  $k_i$  для этих углов легко решается:

$$k_i = \frac{i}{2i + 2}. \quad (2.9)$$

Отсюда  $k_{N-1} = (N - 1)/(2N) < 1/2$ , в то же время из (2.5) имеем  $k'_{N-1} = 1/4$ , и тогда  $k_{N-1} + k'_{N-1} \neq 1$  в противоречие с определением.

Пусть выполнены равенства (2.8) и  $i_0$  — наименьший номер, для которого  $\varphi_{i_0,i_0+1} = 45^\circ$ . В силу (2.8)  $1 \leq i_0 \leq N - 2$ , поэтому справедливо уравнение (2.6) при  $i = i_0$ . Учитывая неравенства (2.7), имеем

$$k_{i_0+1} = \frac{1}{2(1 - k_{i_0})} \geq \frac{2}{3}.$$

Если  $i_0 + 1 \leq N - 2$ , то сделаем еще шаг:

$$k_{i_0+2} = \frac{\cos^2 \varphi_{i_0+1,i_0+2}}{1 - k_{i_0+1}} \geq 3 \cos^2 \varphi_{i_0+1,i_0+2}.$$

Отсюда следует, что  $\varphi_{i_0+1, i_0+2} = 60^\circ$  и  $k_{i_0+2} \geq 3/4$ . Следующий шаг сделать нельзя, так как получится  $k_{i_0+3} \geq 1$ . Следовательно,  $i_0 + 2 > N - 2$ . Таким образом, возможны только два значения  $i_0 = N - 3, N - 2$ .

Вычислим значения  $k_{i_0}$  по формуле (2.9) и подставим в (2.6):

$$k_{i_0+1} = \frac{\cos^2 \varphi_{i_0, i_0+1}}{1 - k_{i_0}} = (i_0 + 1)(i_0 + 2)$$

( $\varphi_{i_0, i_0+1} = 45^\circ$  по определению  $i_0$ ). При  $i_0 = N - 3$  сделаем еще один шаг:

$$k_{i_0+2} = \frac{\cos^2 \varphi_{i_0+1, i_0+2}}{1 - k_{i_0+1}} = \frac{i_0 + 2}{4}.$$

Так как должно быть  $k_{i_0+2} < 1$ , то  $i_0 \leq 1$ . Но по определению  $i_0 \geq 1$ , следовательно,  $i_0 = 1$ . Отсюда  $N = 4$ . При  $i_0 = N - 2$  этот шаг сделать нельзя, и предыдущее выражение принимает вид  $k_{N-1} = 1 - 1/N$ . В силу (2.5)  $k'_{N-1} = \cos^2 \varphi_{N-1, N} = 1/4$ . Но должно быть  $k_{N-1} + k'_{N-1} = 1$ . Отсюда опять получается  $N = 4$ . Теперь, используя найденные углы  $\varphi_{i, i+1}$ , вычислим все  $k_i, k'_i$  из уравнений (2.5), (2.6) и убедимся, что  $k_i + k'_i = 1$ . Получили решение (С).  $\square$

**Следствие.** В случае (А) группа  $\Delta$  равна произведению  $[2\mathbb{Z}^N]RS$ , где подгруппа  $S$  состоит из перестановок координат вектора, а подгруппа  $R$  — из отражений в координатных плоскостях.

Доказательство следует из того, что в этом случае  $D$  есть симплекс (1.1), а отражения имеют вид

$$\begin{aligned} \pi_0 x &= (-x_1, \dots, x_N), \\ \pi_i x &= (x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_N) \quad (i = 1, \dots, N-1), \\ \pi_N x &= (x_1, \dots, -x_N + 2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

### 3. Система, близкая к консервативной

Обозначим  $\varepsilon_i = 1 - \beta_i$ . Предположим

$$N \geq 2, \quad m_1 = \dots = m_N, \quad \alpha \sim \varepsilon_0 \sim \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{N-1} \sim \varepsilon_N \sim 0.$$

Таким образом, в этом пункте рассматривается неконсервативная динамическая система. Отклонение от консервативности характеризуется малыми положительными константами  $\alpha, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_N$ , равными нулю в консервативном случае. Как увидим далее, эта малая неконсервативность существенно меняет поведение системы.

Отражения лучей от граней симплекса  $D$ , определенного неравенствами (1.1), тоже задается аффинными отображениями  $\pi_0, \dots, \pi_N$ , которые уже не инволютивны. Их предельные значения для консервативной системы обозначим через  $\pi_0^\circ, \dots, \pi_N^\circ$ . Они имеют вид (2.10) и согласно теореме 2.1(А) порождают кристаллографическую группу  $\Delta^\circ$  с фундаментальной областью  $D$ . Если обозначить через  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  параллельную и перпендикулярную составляющие скорости  $v$  к грани  $\Gamma_i$  соответственно, то

$$\pi_i^\circ v = v_{\parallel} - v_{\perp}, \quad \pi_i v = v_{\parallel} - \beta_i v_{\perp} \quad (i = 0, \dots, N). \quad (3.1)$$

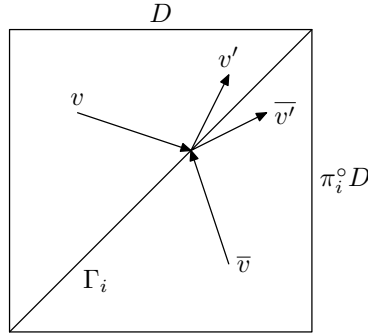


Рис. 2.

Отсюда следует, что линейные части отображений  $\pi_i^\circ$  и  $\pi_i$  перестановочны.

От симплекса  $D$  перейдем к фактор-пространству  $\mathbb{R}^N/\Delta^\circ$ . Пусть луч падает на грань  $\Gamma_i$  симплекса  $D$  со скоростью  $v$ , тогда отраженный луч имеет скорость  $v' = \pi_i v$ . Им соответствуют в симплексе  $\pi_i^\circ D$  лучи со скоростями  $\bar{v} = \pi_i^\circ v$  и  $\bar{v}' = \pi_i^\circ v'$  (рис. 2). Имеем

$$\bar{v}' = \pi_i^\circ v' = \pi_i^\circ \pi_i v, \quad v' = \pi_i v = \pi_i \pi_i^{\circ-1} \bar{v}.$$

В силу указанной перестановочности  $\pi_i^\circ$  и  $\pi_i$  и инволютивности  $\pi_i^\circ$  справедливо равенство

$$\pi_i^\circ \pi_i = \pi_i \pi_i^{\circ-1} \stackrel{\text{онр}}{=} \pi_i'.$$

Теперь вместо отражения луча от грани  $\Gamma_i$  можно рассмотреть его преломление в этой грани:

$$v \rightarrow \bar{v}' = \pi_i' v, \quad \bar{v} \rightarrow v' = \pi_i' \bar{v}.$$

При пересечении лучом грани  $\Gamma_i$  его скорость умножается на линейную часть отображения  $\pi_i'$  независимо от того, с какой стороны луч подошел к ней. Учитывая (3.1), закон преломления в грани  $\Gamma_i$  можно записать так:

$$v \rightarrow \pi_i' v = v - \varepsilon_i v_\perp, \quad v_\perp = (v \cdot n_i) n_i \quad (i = 0, \dots, N), \quad (3.2)$$

где  $n_i$  — нормаль к  $\Gamma_i$ . Симплексы  $gD$ ,  $g \in \Delta^\circ$ , покрывают без перекрытий пространство так, что соседние симплексы соприкасаются по целой грани. В силу ортогональности матрицы  $\dot{g}$  закон преломления в грани  $g\Gamma_i$  имеет тот же вид (3.2), где в качестве  $n_i$  надо брать нормаль к  $g\Gamma_i$ .

**Теорема 3.1.** *Образы граней  $g\Gamma_i$  при  $g \in \Delta^\circ$  покрывают следующие семейства  $N - 1$ -мерных плоскостей:*

$$\begin{aligned} i = 0) \quad & x_k = a_k \in 2\mathbb{Z}, \quad 1 \leq k \leq N; \\ i = 1, \dots, N - 1) \quad & x_k \pm x_l = b_{kl}^\pm \in 2\mathbb{Z}, \quad 1 \leq k < l \leq N; \\ i = N) \quad & x_k = c_k \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad 1 \leq k \leq N, \end{aligned}$$

где  $a_k, b_{kl}^\pm, c_k$  — произвольные целые числа указанной четности.

**Доказательство.** Грань  $\Gamma_0$  лежит на плоскости  $\Pi_1 = \{x_1 = 0\}$ . Образы  $\sigma\Gamma_0$ ,  $\sigma \in S$ ,  $\sigma(1) = 1$ , очевидно, покрывают грань  $\Pi_1 \cap Q_+$  координатного куба  $Q_+ = [0, 1]^N$  (см. следствие теоремы 2.1). Применяя отражения  $\rho \in R$ , сохраняющие  $\Pi_1$ , к этому множеству, покроем грань  $\Pi_1 \cap Q$  большего куба  $Q = [-1, 1]^N$ . Сдвигая  $\Pi_1 \cap Q$  на векторы  $\tau \in 2\mathbb{Z}^N$ ,  $\tau_1 = 0$ , покроем всю плоскость  $\Pi_1$ . Наконец,



применяя к  $\Pi_1$  все  $g \in \Delta^\circ = [2\mathbb{Z}^N]RS$ , получим первое семейство плоскостей теоремы. Это семейство инвариантно относительно  $\Delta^\circ$ , поэтому включает в себя все образы  $g\Gamma_0$  ( $g \in \Delta^\circ$ ).

Пусть  $x \in Q_+$  и  $x_i = x_{i+1}$ . Тогда найдется перестановка  $\sigma \in S$  такая, что  $x \in \sigma D$  и в системе неравенств, определяющей симплекс  $\sigma D$ , имеется равенство, следовательно, точка  $x$  принадлежит некоторой грани  $\sigma\Gamma_j$ . Тем самым образы граней  $\sigma\Gamma_j$  ( $\sigma \in S, j = 1, \dots, N$ ) покрывают сечение куба  $Q_+$  плоскостью  $\Pi_{i,i+1} = \{x_i = x_{i+1}\}$ . Применяя к этому сечению отражения  $\rho \in R$ , сохраняющие  $\Pi_{i,i+1}$ , покроем  $\Pi_{i,i+1} \cap Q$ . Сдвигая последнее множество на векторы  $\tau \in 2\mathbb{Z}^N$ ,  $\tau_i = \tau_{i+1}$ , покроем всю плоскость  $\Pi_{i,i+1}$ . Отобразив ее с помощью  $g \in \Delta^\circ$ , получим второе семейство плоскостей. Это семейство инвариантно относительно группы  $\Delta^\circ$ , следовательно, включает в себя все образы  $g\Gamma_i$  ( $g \in \Delta^\circ, i = 1, \dots, N$ ).

Аналогично докажем, что образы  $g\Gamma_N$  при  $g \in \Delta^\circ$  покрывают третье семейство плоскостей.  $\square$

Рассмотрим луч, проходящий в момент времени  $t$  через точку  $x \in \mathbb{R}^N$  со скоростью  $v$ . Найдем изменение скорости этого луча в течение промежутка времени  $[t, t + \Delta t]$ . Величину  $\Delta t$  выберем настолько большой, чтобы за это время произошло много столкновений шаров, т. е. было много пересечений луча с плоскостями семейств, указанных в теореме 3.1. С другой стороны,  $\Delta t$  должно быть настолько малым, чтобы скорость к моменту времени  $t + \Delta t$  изменилась незначительно. Эти противоречивые требования удовлетворяются за счет малости констант системы  $\alpha, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_N$ .

Тогда можно считать, что за время  $\Delta t$  луч пройдет отрезок  $\Delta x = v\Delta t$ . Сложив приращения скорости в ускоренном движении шаров между столкновениями согласно формуле (1.2'), получим  $\alpha\Delta x$ . Уменьшение скорости из-за столкновений найдем, просуммировав потери  $-\varepsilon_i v_\perp$  в формуле (3.2) по всем пересечениям отрезка  $\Delta x$  с указанными плоскостями. Эта сумма по множеству параллельных равноудаленных друг от друга плоскостей будет равна произведению величины  $-\varepsilon_i v_\perp$  на число пересечений  $|n \cdot \Delta x|/d + O(1)$ , где  $n$  — нормаль,  $d$  — расстояние между соседними плоскостями. В результате получим

$$\begin{aligned} \Delta v &= \alpha\Delta x - \varepsilon_0 \sum_{k=1}^N (v_k e_k) |\Delta x_k|/2 \\ &\quad - \varepsilon_1 \sum_{k < l} ((v_k + v_l)(e_k + e_l)/2) |\Delta x_k + \Delta x_l|/2 \\ &\quad + ((v_k - v_l)(e_k - e_l)/2) |\Delta x_k - \Delta x_l|/2 - \varepsilon_N \sum_{k=1}^N (v_k e_k) |\Delta x_k|/2 + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

где  $e_1, \dots, e_N$  — координатные орты,  $\varepsilon = \max\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_N\}$ . Подставив сюда  $\Delta x = v\Delta t$  и заменив отношение  $\frac{\Delta v}{\Delta t}$  производной, придем к приближенному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dv_k}{dt} &= \alpha v_k - \bar{\varepsilon}_0 |v_k| v_k - \varepsilon_1 \sum_{l \neq k} (|v_k + v_l|(v_k + v_l) \\ &\quad + |v_k - v_l|(v_k - v_l))/4 \quad (k = 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (3.3)$$

здесь и далее  $\bar{\varepsilon}_0 = (\varepsilon_0 + \varepsilon_N)/2$ .

Правая часть  $f(v)$  системы уравнений (3.3) имеет непрерывные производные и инвариантна относительно перестановок координат и отражений в координатных плоскостях:  $f(gv) = gf(v)$  для любого  $g \in RS$ . Поэтому уравнение (3.3) достаточно рассмотреть в конусе

$$K : 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_N. \quad (3.4)$$

В этом конусе векторная функция  $f(v)$  является полиномом 2-й степени и разности ее координат  $f_k(v) - f_{k-1}(v)$  делятся на  $v_k - v_{k-1}$ .

Система дифференциальных уравнений (3.3) выведена эвристическими рассуждениями, как это принято делать в теории вероятностей. Далее строго докажем, что любое решение  $v(t)$ ,  $v(0) \in \text{int } K$ , этой системы в конусе  $K$  стремится к постоянному решению  $\bar{v} \neq 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . В конусе  $gK$  ( $g \in RS$ ) решение сходится к  $g\bar{v}$ . Скорости  $\bar{v}$  и  $g\bar{v}$  эквивалентны в фактор-пространстве  $\mathbb{R}^N/\Delta^\circ$ , так как  $RS \subset \Delta^\circ$ . Поясним, какой смысл имеет решение  $\bar{v}$  для исходной динамической системы. В классах эквивалентности фактор-пространства  $\mathbb{R}^N/\Delta^\circ$  не существует прямых лучей, потому что при движении внутри симплекса  $gD$  ( $g \in \Delta^\circ$ ) скорость луча получает приращение порядка  $\alpha$ , а при пересечении его грани  $g\Gamma_i$  скачком уменьшается на величину порядка  $\varepsilon$ . Но имеются представители с малой средней кривизной в каждом классе, их и будем рассматривать в качестве лучей динамической системы. Скорость такого луча по истечении большого времени флуктуирует с амплитудой порядка  $\alpha + \varepsilon$  вокруг среднего значения  $\bar{v}$ .

**Теорема 3.2.** *Любое решение  $v(t)$  системы уравнений (3.3) с началом  $v(0)$  во внутренней точке конуса (3.4) стремится к постоянному решению  $\bar{v}$  при  $t \rightarrow \infty$ :*

- (а) если  $\bar{\varepsilon}_0 \geq \varepsilon_1$ , то  $\bar{v}_1 = \dots = \bar{v}_N = \alpha/d_1$ ;
- (б) если  $\varepsilon_1/2 \leq \bar{\varepsilon}_0 < \varepsilon_1$ , то  $\bar{v}_1 = (\bar{\varepsilon}_0 - \varepsilon_1/2)\alpha/d_2$ ,  $\bar{v}_2 = \dots = \bar{v}_N = \varepsilon_1\alpha/(2d_2)$ ;
- (в) если  $\bar{\varepsilon}_0 < \varepsilon_1/2$ , то  $\bar{v}_1 = 0$ ,  $\bar{v}_2 = \bar{\varepsilon}_0\alpha/d_3$ ,  $\bar{v}_3 = \dots = \bar{v}_N = \varepsilon_1\alpha/(2d_3)$ , где

$$d_1 = \bar{\varepsilon}_0 + (N-1)\varepsilon_1, \quad d_2 = \bar{\varepsilon}_0^2 - \bar{\varepsilon}_0\varepsilon_1/2 + (N-1)\varepsilon_1^2/2, \quad d_3 = \bar{\varepsilon}_0^2 + \bar{\varepsilon}_0\varepsilon_1/2 + (N-2)\varepsilon_1^2/2.$$

В случае (в) при  $N = 2$  надо брать только координаты  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В конусе (3.4) имеем

$$f_k(v) = \alpha v_k - \left( \bar{\varepsilon}_0 + \frac{k-1}{2}\varepsilon_1 \right) v_k^2 - \varepsilon_1 \left( \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{k-1} v_l^2 + v_k \sum_{l=k+1}^N v_l \right) \quad (k = 1, \dots, N).$$

Этот конус, усеченный плоскостями  $v_N = a$  и  $v_N = b$  снизу и сверху соответственно, обозначим через  $K_{a,b}$ . Если  $a > 0$  достаточно мало, то на нижнем основании  $v_N = a$  усеченного конуса  $K_{a,b}$  справедливо неравенство

$$f_N(v) = \alpha v_N - \left( \bar{\varepsilon}_0 + \frac{N-1}{2}\varepsilon_1 \right) v_N^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 \sum_{l=1}^{N-1} v_l^2 > 0.$$

Следовательно, траектории векторного уравнения (3.3) входят в множество  $K_{a,b}$  через это основание. Если  $b > a$  достаточно велико, то  $f_N(v) < 0$  на верхнем основании  $v_N = b$ , поэтому траектории тоже входят через него в  $K_{a,b}$ . Тогда траектории уравнения (3.3) не выходят из объединения множеств  $gK_{a,b}$  по всем  $g \in RS$ , гомеоморфного сферическому слою вокруг точки  $v = 0$ . Отсюда следует, что любое решение уравнения (3.3) ограничено.

Сделаем замену переменных  $v \rightarrow z$ :

$$z_1 = v_1, \quad z_k = v_k - v_{k-1} \quad (k = 2, \dots, N).$$

В новых переменных множество (3.4) перейдет в координатный конус  $K'$ :  $z_1 \geq 0, \dots, z_N \geq 0$ , а система уравнений (3.3) примет вид

$$\dot{z}_k = z_k W_k(z) \quad (k = 1, \dots, N), \quad (3.5)$$

где

$$W_k(z) = \alpha - (2\bar{\varepsilon}_0 + (N-2)\varepsilon_1)(z_1 + \dots + z_{k-1}) - (\bar{\varepsilon}_0 + (N - (k+1)/2)\varepsilon_1)z_k - \varepsilon_1 \sum_{l=k+1}^N (N+1-l)z_l.$$

Грани  $z_k = 0$  конуса  $K'$  являются инвариантными многообразиями системы (3.5). Рассмотрим траектории  $z(t)$ , начинающиеся внутри  $K'$ :  $z_1(0) > 0, \dots, z_N(0) > 0$ . Тогда справедливы неравенства  $z_1(t) > 0, \dots, z_N(t) > 0$  во все моменты времени  $t \geq 0$ . Из уравнений (3.5) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln \frac{z_k}{z_{k-1}} = W_k(z) - W_{k-1}(z) = & - \left( \bar{\varepsilon}_0 + \frac{k-4}{2} \varepsilon_1 \right) z_{k-1} \\ & - \left( \bar{\varepsilon}_0 + \frac{k-3}{2} \varepsilon_1 \right) z_k \quad (k = 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (3.6)$$

СЛУЧАЙ  $\bar{\varepsilon}_0 \geq \varepsilon_1$ . Если  $k \geq 2$ , то в равенствах (3.6) коэффициент при  $z_{k-1}$  неотрицателен, а коэффициент при  $z_k$  не меньше, чем  $\varepsilon_1/2$ , поэтому

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{z_k}{z_{k-1}} \leq -\frac{1}{2} \varepsilon_1 z_k \quad (k = 2, \dots, N). \quad (3.7)$$

Из этого неравенства следует, что  $z_k(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Действительно, предположим противное: найдется последовательность чисел  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  такая, что  $z_k(t_n) \geq c_1 > 0$ . Как доказано выше, функции  $z_k(t)$  ограничены, отсюда в силу уравнений (3.5) вытекает ограниченность их производных  $|\dot{z}_k(t)| \leq c_2$ . Тогда  $z_k(t) \geq c_1 - c_2|t - t_n|$  для каждой точки  $t_n$ , следовательно,

$$\mu_k(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \int_0^t z_k(\tau) d\tau \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Проинтегрировав неравенство (3.7) от 0 до  $t$ , получим

$$\frac{z_k(t)}{z_{k-1}(t)} \leq \frac{z_k(0)}{z_{k-1}(0)} e^{-\mu_k(t)} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Так как функция  $z_{k-1}(t)$  ограничена, отсюда следует сходимость  $z_k(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , что противоречит предположению. Утверждение доказано.

Таким образом, инвариантное многообразие  $z_1 > 0, z_2 = \dots = z_N = 0$  притягивает все траектории внутри конуса  $K'$ . Так что для больших времен достаточно рассмотреть систему уравнений (3.5) на этом многообразии, на котором надо решить одно дифференциальное уравнение

$$\dot{z}_1 = z_1 W_1(z_1, 0, \dots, 0) = z_1(\alpha - (\bar{\varepsilon}_0 + (N-1)\varepsilon_1)z_1).$$

Это уравнение имеет устойчивое стационарное решение  $z_1 = \bar{v}_1$ , получающееся из равенства  $W_1 = 0$ . Значение  $\bar{v}_1$  приведено в строке (а) теоремы. Так как  $W_1 > 0$  при  $z_1 < \bar{v}_1$  и  $W_1 < 0$  при  $z_1 > \bar{v}_1$ , любое положительное решение  $z_1(t)$  сходится к  $\bar{v}_1$  при  $t \rightarrow \infty$ . Этим мы доказали утверждение теоремы в случае (а).

СЛУЧАЙ  $\frac{1}{2}\varepsilon_1 \leq \bar{\varepsilon}_0 < \varepsilon_1$ . Коэффициент при  $z_{k-1}$  в равенствах (3.6) неотрицателен, а коэффициент при  $z_k$  положителен для значений индекса  $k \geq 3$ . Аналогично предыдущему случаю доказывается, что инвариантное многообразие  $z_1 \geq 0, z_2 > 0, z_3 = \dots = z_N = 0$  притягивает все траектории внутри конуса  $K'$ . Поэтому асимптотику функции  $z(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  достаточно рассмотреть на этом многообразии, на котором надо решить систему из двух дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_1 = z_1 W_1(z_1, z_2, 0, \dots, 0), \quad \dot{z}_2 = z_2 W_2(z_1, z_2, 0, \dots, 0). \quad (3.8)$$

Эта система имеет устойчивое стационарное решение  $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ , которое получается из равенств  $W_1 = W_2 = 0$ . Значения  $\bar{v}_1 = \bar{z}_1, \bar{v}_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  приведены в строке (б) теоремы. Анализ поля направлений системы (3.8) показывает, что любое решение внутри грани  $z_1 > 0, z_2 > 0$  сходится к  $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, утверждение теоремы доказано в случае (б).

СЛУЧАЙ  $\bar{\varepsilon}_0 < \frac{1}{2}\varepsilon_1$ . Так же доказывается, что  $z_k(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$  ( $k = 4, \dots, N$ ).

Напишем уравнение (3.6) для  $k = 2$  в виде

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{z_1}{z_2} = -(\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_0) z_1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_0\right) z_2 \leq -\frac{1}{2}\varepsilon_1 z_1.$$

Из этого неравенства вытекает, как и выше, что  $z_1(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, в этом случае притягивающим все внутренние траектории инвариантным многообразием является грань  $z_1 = 0, z_2 > 0, z_3 > 0, z_4 = \dots = z_N = 0$ . На этой грани система (3.5) принимает вид

$$\dot{z}_2 = z_2 W_2(0, z_2, z_3, 0, \dots, 0), \quad \dot{z}_3 = z_3 W_3(0, z_2, z_3, 0, \dots, 0). \quad (3.9)$$

Устойчивое стационарное решение  $(\bar{z}_2, \bar{z}_3)$  получается из равенств  $W_2 = W_3 = 0$ . Значения  $\bar{v}_2 = \bar{z}_2, \bar{v}_3 = \bar{z}_2 + \bar{z}_3$  приведены в строке (в) теоремы. Как показывает анализ поля направлений системы (3.9), точка  $(\bar{z}_2, \bar{z}_3)$  притягивает все траектории с началом во внутренних точках грани  $z_2 > 0, z_3 > 0$ . Итак, утверждение теоремы доказано и в случае (в).  $\square$

Теорема 3.2 дает распределение скоростей шаров, а распределение их координат остается неизвестным. Только в случае двух шаров если стационарная скорость имеет рационально независимые координаты  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_2$ , то распределение шаров по координате хаотично и в среднем по времени равномерно. Это вытекает из эргодичности в данном случае сдвига тора  $\mathbb{R}^2/(2\mathbb{Z})^2$  по формуле  $x \rightarrow x + \bar{v}t$ .

Автор благодарит В. А. Чуркина за консультации по группам Кокстера.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гарипов Р. М. Одномерное движение абсолютно жестких шаров // Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа. 1974. Т. 6. С. 181.
2. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

3. Гаришов Р. М., Мамонтов Е. В. Одномерное движение неупругих шаров. I: Преобразование к дискретному времени // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 23–33.
4. Гаришов Р. М., Мамонтов Е. В. Одномерное движение неупругих шаров. II: 2-Связанные квазициклы // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 5. С. 1006–1025.
5. Ratcliffe J. G. Foundations of hyperbolic manifolds. New York; Berlin: Springer-Verl., 1994. (Graduate Texts in Math.; 149).
6. Гаришов Р. М. Алгебраический метод вычисления кристаллографических групп и рентгеноструктурный анализ кристаллов. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003.
7. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972.

*Статья поступила 26 мая 2004 г., окончательный вариант — 30 августа 2004 г.*

*Гаришов Равиль Мухамедзянович  
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
пр. Академика Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090  
garipov@hydro.nsc.ru*