Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 512.542

ОБ ОРБИТАХ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ

М. Деаконеску, Г. Л. Уоллс

Аннотация: Если G — конечная группа и A — группа автоморфизмов G с подгруппой неподвижных точек $C_G(A)$, то каждая подгруппа F в $C_G(A)$ действует на множестве орбит A в G. Особенности этого действия используются для вывода некоторых результатов о числе орбит A.

Ключевые слова: конечная группа, орбита автоморфизма, действие группы, стабилизатор.

1. Введение

Рассмотрим следующее утверждение: «если G — конечная p-группа и p не делит число классов сопряженности в G, то каждый элемент в центре G является коммутатором». Цель настоящей работы — получить подобные (а также некоторые другие, надеемся, новые) по виду простые результаты путем формирования общей схемы, из которой эти результаты вытекают как частные случаи.

Пусть G — конечная группа, $A \leq \mathrm{Aut}(G)$, и пусть $C_G(A)$ обозначает подгруппу неподвижных точек A в G. Поводом для данной заметки послужила работа Глаубермана [1], где последовательности, связанные с действием A на G, находятся в предположении $(|G|, |A|) = 1$. Роули [2] впоследствии использовал результаты из [1] и CFSG для доказательства того, что если $C_G(A) = 1$ и либо A циклическая, либо $(|G|, |A|) = 1$, то G разрешима.

Когда G и A суть нетривиальные p-группы или когда A — нетривиальная группа внутренних автоморфизмов G, условие $(|G|, |A|) = 1$ не выполнено и тем самым не применим такой полезный результат, как теорема Шура — Цассенхауза. Можно спросить: что можно сказать о действии A на G в отсутствие какого-либо из ограничений $(|G|, |A|) = 1$ и $C_G(A) = 1$?

Представленный здесь материал основан на простом наблюдении: если $F \leq C_G(A)$, то F действует (возможно, тривиально) естественным образом на множестве орбит A в G. Стабилизаторы в F орбит A в G могут быть эффективно вычислены. Эти стабилизаторы имеют хорошие свойства, которые можно использовать для вывода следствий, если что-то известно дополнительно об A и/или F. Разумеется, для получения содержательных результатов надо иметь соотношение $1 < C_G(A) < G$. Все рассматриваемые здесь группы конечны. Необъясняемые обозначения достаточно стандартны, см. [3, 4].

2. Лемма об орбитах автоморфизмов

Вначале остановимся на некоторых обозначениях. Центр G будем обозначать через Z. Для $x \in G$ и $\tau \in A$ положим

$$[x, \tau] = x^{-1}\tau(x), \quad C_A(x) = \{\alpha \in A \mid x = \alpha(x)\}, \quad C_G(\tau) = \{g \in G \mid \tau(g) = g\}.$$

Как обычно, $[G, A] = \langle [g, \alpha] \mid g \in G,\ \alpha \in A \rangle$. Если $\varnothing \neq U \subseteq G$, введем обозначение $N_A(U) = \{\alpha \in A \mid \alpha(U) = U\}$, $C_A(U) = \{\alpha \in A | \alpha|_U = \mathrm{id}_U\}$.

Для $x \in G$ пусть $O(x) = \{\tau(x) \mid \tau \in A\}$ — орбита x при естественном действии A на G. Тогда $|O(x)| = |A : C_A(x)|$ и $x^{-1}O(x) = \{[x, \tau] \mid \tau \in A\}$. Пусть $O(G, A) = \{O(x) \mid x \in G\}$ — множество орбит A в G и $k(G, A) = |O(G, A)|$.

Рассмотрим подгруппу F в $C_G(A)$, и пусть F действует на $O(G, A)$ следующим образом: $O(x)^f := O(x)f = O(xf)$ для всех $O(x) \in O(G, A)$ и $f \in F$. Тогда, очевидно, $|O(x)^f| = |O(x)|$. Для $O(x) \in O(G, A)$ пусть $O(x)^F = \{O(x)^f \mid f \in F\}$ — орбита $O(x)$ под действием F на $O(G, A)$ и $S_F(O(x))$ — стабилизатор $O(x)$ в F. Тогда для множества T представителей орбит F на $O(G, A)$ справедливо известное тождество

$$k(G, A) = \sum_{O(x) \in T} |F : S_F(O(x))|. \tag{1}$$

Докажем следующую основную лемму.

2.1. Лемма. *Пусть G — конечная группа и $A \leq \mathrm{Aut}(G)$. Пусть $F \leq C_G(A)$ действует на $O(G, A)$ по правилу $O(x)^f = O(xf)$. Тогда для каждого $x \in G$*

$$S_F(O(x)) = F \cap x^{-1}O(x) \cong N_A(xF)/C_A(xF) = N_A(xF)/C_A(x).$$

Доказательство. Вначале отметим, что

$$S_F(O(x)) = F \cap \{[x, \tau] \mid \tau \in A\} = F \cap x^{-1}O(x).$$

Далее, заметим, что $\tau \in N_A(xF)$ тогда и только тогда, когда $[x, \tau] \in F$, и используем это для определения $\varphi : N_A(xF) \to S_F(O(x))$ согласно правилу $\varphi(\tau) = [x, \tau]$ для всех $\tau \in N_A(xF)$. Если $\alpha, \beta \in N_A(xF)$, то

$$\begin{aligned} \phi(\alpha\beta) = x^{-1}\alpha\beta(x) = x^{-1}\alpha(x)\alpha(x^{-1})\alpha\beta(x) = (x^{-1}\alpha(x))\alpha(x^{-1}\beta(x)) \\ = (x^{-1}\alpha(x))(x^{-1}\beta(x)) = [x, \alpha][x, \beta] = \varphi(\alpha)\varphi(\beta), \end{aligned}$$

поэтому φ — групповой морфизм. Так как φ — отображение «на» и $\mathrm{Ker}\,\varphi = C_A(xF) = C_A(x)$, приходим к требуемому результату.

2.2. Замечания.

(i) Если $A = 1$, то $C_A(G) = G$, и если взять $F := G$ в лемме 2.1, получим, что действие F на $O(G, A)$, по существу, правое регулярное представление G.

(ii) $|O(x)^F| = 1$ тогда и только тогда, когда $F \subseteq x^{-1}O(x)$. В частности, если $F > 1$, то ни одна из орбит A длины 1 не остается неподвижной относительно F. Действительно, если $F > 1$, то F действует регулярно на множестве $\{\{f\} \mid f \in F\}$.

(iii) Ввиду того, что $S_F(O(x))$ изоморфно секции A, если $A \in \mathscr{F}$ и $\mathscr{F}$ — класс групп, замкнутых относительно взятия секций, то $S_F(O(x)) \in \mathscr{F}$ для всех $O(x) \in O(G, A)$. Поэтому есть определенная взаимосвязь между структурами A и $C_G(A)$, хотя и неявная.

В обозначениях леммы 2.1 получаем

2.3. Следствие. *Пусть $x \in G$ и $F \leq C_G(A)$.*

(i) *$|xF \cap O(x)|$ делит $(|F|, |O(x)|)$.*

(ii) *Если $(|F|, |A|) = 1$, то $|F|$ делит $k(G, A)$ и $k(G, A)/|F|$ — число орбит F на $O(G, A)$.*

(iii) $|F : Z(F)|$ *делит* $k(N_G(F), A)$. *Если* $F \lhd G$ *и* $(|F : Z(F)|, k(G, A)) = 1$, *то* F *абелева.*

Доказательство. (i) Согласно лемме 2.1

$$|xF \cap O(x)| = |F \cap x^{-1}O(x)| = |S_F(O(x))|,$$

поэтому $|xF \cap O(x)|$ делит $|F|$. Также по лемме 2.1 $|S_F(O(x))| = |N_A(xF) : C_A(x)|$ делит $|A : C_A(x)| = |O(x)|$.

(ii) Если $(|F|, |A|) = 1$, то (i) влечет $S_F(O(x)) = 1$, и требуемое вытекает из равенства (1).

(iii) Так как, очевидно, $N_G(F)$ A-инвариантна, не уменьшая общности, можно считать, что $F \lhd G$. Если $F \lhd G$, то $[G, A] \leq C_G(F)$. По лемме 2.1

$$S_F(O(x)) = F \cap x^{-1}O(x) \subseteq F \cap [G, A] \subseteq F \cap C_G(F) = Z(F).$$

Тем самым $|F : S_F(O(x))| = |O(x)^F|$ кратно $|F : Z(F)|$ и мы приходим к результату, учитывая равенство (1).

2.4. Замечания.

(i) Первое утверждение следствия 2.3(ii) может быть получено непосредственно с помощью леммы Коши — Фробениуса (леммы, не являющейся бернсайдовой), примененной к действию A на G, однако она не объясняет смысла числа $k(G, A)/|F|$, являющегося целым.

(ii) Если A абелева и F — неабелева p-группа, то $p \mid k(G, A)$. Действительно, ввиду леммы 2.1 получаем, что $S_F(O(x))$ абелева для всех $O(x) \in O(G, A)$. Отсюда $S_F(O(x)) < F$ для всех $O(x) \in O(G, A)$ и замечание вытекает из равенства (1).

(iii) Из леммы 2.1 и (1) следует, что если F — нетривиальная p-группа и p не делит $k(G, A)$, то существует $O(x) \in O(G, A)$ такая, что $S_F(O(x)) = F$; отсюда $F \subseteq x^{-1}O(x)$ и тем самым $|F|$ делит $|O(x)|$ согласно следствию 2.3(i).

3. Применения

Можно получить более точные результаты, если есть дополнительная информация об A и/или F. Пусть сначала $A := I = \mathrm{Inn}(G)$ — группа внутренних автоморфизмов G и в лемме 2.1 возьмем $F = Z = C_G(I)$. Тогда $O(x) = \mathrm{cl}(x) = \{x^g \mid g \in G\}$, $x^{-1}O(x) = \{[x, g] \mid g \in G\}$, $k(G, A) = k(G) = |\mathrm{Irr}(G)|$, $C_A(x) \cong C_G(x)/Z$, $I \cong \overline{G} := G/Z$ и $S_Z((\mathrm{cl}(x)) = Z \cap \{[x, g] \mid g \in G\}$. Наконец, если $x \in G$, положим $\bar{x} := xZ$.

Обращение к таблицам характеров в [4] показывает, что $SL(2, 3)$ имеет центр порядка 2 и единственный класс сопряженности $\mathrm{cl}(x)$ размера 6. Такая ситуация не является типичной, поэтому назовем класс сопряженности $\mathrm{cl}(x)$ группы G *специальным*, если $|\mathrm{cl}(x)| \neq |\mathrm{cl}(y)|$ в случае $\mathrm{cl}(x) \neq \mathrm{cl}(y)$. В общей ситуации справедливо

3.1. Следствие. *Если* G *имеет специальный класс сопряженности* $\mathrm{cl}(x)$, *то* Z *состоит из коммутаторов и* $|Z|$ *делит* $|\mathrm{cl}(x)|$. *Если* $Z > 1$, *то* $\chi(x) = 0$ *для всех* $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, *удовлетворяющих* $Z \nleq \mathrm{Ker}\,\chi$.

Доказательство. Предположим, не уменьшая общности, что $Z > 1$. Поскольку $\mathrm{cl}(x)$ специальна, имеем $|\mathrm{cl}(x)^Z| = 1$, откуда $Z = S_Z(\mathrm{cl}(x)) = Z \cap \{[x, g] \mid g \in G\}$. Утверждение о том, что $|Z|$ делит $|\mathrm{cl}(x)|$, вытекает из следствия 2.3(i).

Ввиду 2.4(iii) $|C_{\overline{G}}(\bar{x})| = |C_{\overline{G}}(x)||Z| = |C_G(x)|$, откуда $|C_G(x)| = |C_{\overline{G}}(\bar{x})|$. Последнее утверждение следует из равенства

$$|C_G(x)| = |C_{\overline{G}}(\bar{x})| + \sum_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \\ Z \nleq \mathrm{Ker}\,\chi}} |\chi(x)|^2.$$

Доказательство следующих двух результатов оставляем читателю.

3.2. Следствие. *Пусть G — нетривиальная p-группа и p не делит $k(G)$. Тогда*

(i) *Z состоит из коммутаторов; если, кроме того, G имеет класс 2, то $Z = G'$;*

(ii) *существует $x \in G$ такой, что $\chi(x) = 0$ для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, для которых $Z \nleq \mathrm{Ker}\,\chi$.*

3.3. Следствие. *Пусть $x \in G$ и $\overline{G} = G = G/Z$. Тогда*

(i) *$|xZ \cap \mathrm{cl}(x)|$ делит $(|Z|, |\,\mathrm{cl}(x)|)$;*

(ii) *$|C_G(x)| = |C_{\overline{G}}(\bar{x})||\,\mathrm{cl}(x)^Z|$.*

Пусть теперь $A := \mathrm{Aut}_c(G)$ — группа центральных автоморфизмов G, т. е. $\mathrm{Aut}_c(G)$ — группа таких автоморфизмов G, которые действуют тривиально на фактор-группе G/Z. Известно, что для $\tau \in \mathrm{Aut}_c(G)$ имеем $G' \leq C_G(\tau)$ и $\tau(x) \in xZ$, так что $x^{-1}O(x) \subseteq Z$. Тем самым если взять $F := G' \leq C_G(\mathrm{Aut}_c(G))$ в лемме 2.1, получим

$$S_{G'}(O(x)) = G' \cap x^{-1}O(x) \subseteq G' \cap Z \leq \Phi(G) \cap Z(G').$$

Из этого замечания очевидно вытекают

3.4. Следствие. *Если $Z \cap G' = 1$, то $|G'|$ делит $k(G, \mathrm{Aut}_c(G))$.*

3.5. Следствие. *Если G' — неабелева p-группа, то p делит $k(G, \mathrm{Aut}_c(G))$.*

3.6. Следствие. *Если G' — p-группа и p не делит $k(G, \mathrm{Aut}_c(G))$, то G нильпотентна класса не менее 2.*

Как мы видели, если $Z > 1$ и $\mathrm{cl}(x)$ — специальный класс сопряженности в G, то по крайней мере один неприводимый характер в G обращается в нуль на x. В этом случае имеем $|xZ \cap \mathrm{cl}(x)| = |S_Z(\mathrm{cl}(x))| = |Z| > 1$. Здесь важно, что $S_Z(\mathrm{cl}(x)) > 1$. В качестве вариации на эту тему приведем результат о нулях характеров, включающих коммутаторы.

3.7. Следствие. *Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и $x, y \in G$ такие, что $[x, y] \in Z(\chi) \backslash \mathrm{Ker}\,\chi$. Тогда $\chi(x) = \chi(y) = 0$.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $\mathrm{Ker}\,\chi = 1$, поскольку χ — точной характер $G/\mathrm{Ker}\,\chi$. В этом случае $Z = Z(\chi)$ и по предположению $[x, y]$ — нетривиальный элемент в Z. Тем самым $x^y = xz$ для некоторого нетривиального $z \in Z$, откуда $\chi(x^y) = \chi(x) = \chi(x)\chi(z)$. Поскольку χ точный, то $\chi(z) \neq 1$ и $\chi(x) = 0$. Равенство $\chi(y) = 0$ получается из симметричности.

Как видно из следствий 3.2 и 3.6, арифметические ограничения на множестве орбит различных групп автоморфизмов могут оказать сильное влияние на структуру группы. Изоморфизм, даваемый леммой 2.1, наводит на мысль о возможности некоторых связей с группой когомологий. В завершение приведем два примера, связанных с небольшими группами.

Примеры.

(i) Первый пример иллюстрирует следствие 3.2(ii). Пусть

$$G = Q_8 = \langle x, y \mid x^4 = y^4 = 1,\ x^y = x^3 \rangle,$$

так что $Z = \langle x^2 \rangle$ и $k(G) = 5$. В действии на множестве классов сопряженности в G у Z есть четыре орбиты: одна из них $\{\{1\}, \{x^2\}\}$ и три орбиты длины 1, потому что Z оставляет неподвижным каждый класс сопряженности длины 2 в G. Единственный нелинейный характер G обращается в нуль на всех трех классах длины 2 ввиду следствия 3.2(ii).

(ii) Второй пример связан со следствием 3.6. Пусть

$$G = \langle x, y \mid x^4 = y^3 = 1,\ y^x = y^2 \rangle.$$

Так как $\langle y \rangle \lhd G$ и $|G| = 12$, то $G' = \langle y \rangle$. Кроме того, $Z = \langle x^2 \rangle$ и $G' \cap Z = 1$. Тем самым по следствию 3.6 должно быть, что $3 = |G'|$ делит число орбит $\mathrm{Aut}_c(G)$ в G. Действительно, $k(G, \mathrm{Aut}_c(G)) = 9$: есть шесть орбит длины 1 и три орбиты длины 2 у $\mathrm{Aut}_c(G)$ в G.

Благодарности. Авторы признательны Дж. Глауберману и В. Д. Мазурову за их замечания по первоначальной версии рукописи, а также Дж. Наварро за краткое рассуждение, использованное в доказательстве следствия 3.7. Второй автор благодарен отделению математики и информатики университета Кувейта за финансовую поддержку и теплый прием во время его визита в декабре 2003 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Glauberman G.* Fixed points in groups with operator groups // Math. Z. 1964. Bd 84. S. 120–125.
2. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper& Row, 1968.
3. *Isaacs M. I.* Character Theory of Finite Groups. New York: Acad. Press, 1976.
4. *Rowley P.* Finite groups admitting fixed-point-free automorphism groups // J. Algebra. 1995. V. 174. P. 724–727.

Статья поступила 24 июня 2004 г.

Marian Deaconescu
Department of Mathematics and Computer Science,
Kuwait University,
P.O. Box 5969, Safat 13060, Kuwait
marian@fasttelco.com, deacon@mcs.sci.kuniv.edu.kw

Gary L. Walls
Department of MPSE, WTAMU,
P.O. Box 60787, Canyon, Texas, USA
gwalls@mail.wtamu.edu