Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 517.95

ЭНТРОПИЙНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ ПАРАБОЛИЧНОСТИ

И. В. Кузнецов

Аннотация: Доказано, что первая краевая задача для уравнения с переменным направлением параболичности в ограниченной области $G_T \subset \mathbb{R}^{d+1}$, где $d \geq 2$, имеет единственное энтропийное решение в смысле Ф. Отто. При естественных ограничениях на граничные данные это решение строится как предел по малому параметру последовательности решений задач Дирихле для эллиптического дифференциального уравнения. Доказано также, что энтропийное решение устойчиво в метрике $L_1(G_T)$ по отношению к возмущениям граничных данных в метрике $L_1(\partial G_T)$.

Ключевые слова: энтропийное решение, уравнение переменного типа параболичности.

§ 1. Введение

В работе рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с переменным направлением параболичности:

$$\frac{\partial}{\partial t}A(u(t,x)) = \Delta u(t,x) \quad \text{при } (t,x) \in G_T, \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial G_T} = \varphi|_{\partial G_T}, \tag{1.2}$$

в случае произвольной функции $A \in C^2(\mathbb{R})$. Здесь $G_T = (0,T) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей класса C^2, T — произвольное положительное число, функция $\varphi : G_T \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi|_{\Gamma_T} = 0, \quad \varphi|_{\{0\}\times\Omega} = u^0, \quad \varphi|_{\{T\}\times\Omega} = u^T, \tag{1.3}$$

в которых u^0, $u^T \in L_\infty(\Omega)$ — произвольно заданные функции, $\Gamma_T = (0,T) \times \partial\Omega$. Кроме того, относительно функции A предполагается выполненным следующее

Условие A. *Множество точек $\{z \in \mathbb{R} : A'(z) = 0\}$ имеет меру нуль.*

О. А. Олейник на одной из лекций, прочитанных в летней математической школе (см. [1]), отметила важность развития теории краевых задач для квазилинейных уравнений с неотрицательной квадратичной формой. В качестве примера была рассмотрена первая краевая задача

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}u^2(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) \quad \text{при } (t,x) \in (0,T) \times (0,1), \tag{1.4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00829).

$$u(t,x) = 0 \quad \text{при } t \in (0,T),\ x = 0,1, \tag{1.5}$$

$$u(0,x) = u^0(x), \quad u(T,x) = u^T(x) \quad \text{при } x \in (0,1), \tag{1.6}$$

которая возникает в теории пограничного слоя (см. также [2]). В [1] отмечено, что при достаточно больших $T > 0$ и гладких граничных данных $u^0 > 0$, $u^T < 0$ краевая задача (1.4)–(1.6) имеет единственное непрерывное решение; там же был поставлен вопрос о ее разрешимости при произвольных $T > 0$.

В работе [3] было установлено, что множество решений $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ регуляризованной краевой задачи

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon^2(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_\varepsilon(t,x) + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_\varepsilon(t,x) \quad \text{при } (t,x) \in (0,T)\times(0,1),$$

$$u_\varepsilon(t,x) = 0 \quad \text{при } t \in (0,T),\ x = 0,1,$$

$$u_\varepsilon(0,x) = u^0(x), \quad u_\varepsilon(T,x) = u^T(x) \quad \text{при } x \in (0,1)$$

содержит подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$, которая сходится в среднем к слабому решению уравнения (1.4) при $\varepsilon_l \to 0+$. Следует отметить, что вопросы, касающиеся единственности слабого решения и принятия слабым решением граничных данных, оставались открытыми. Легко видеть, что задача (1.4)–(1.6) является частным случаем задачи (1.1), (1.2) с $A(z) = \frac{z^2}{2}$ и $\Omega = (0,1)$.

В настоящей работе доказывается, что при произвольных ограниченных граничных данных $u^0, u^T \in L_\infty(\Omega)$ краевая задача (1.1), (1.2) имеет единственное энтропийное решение. Отметим, что энтропийные решения впервые были построены в процессе изучения скалярных законов сохранения. Для квазилинейных уравнений первого порядка существование и единственность энтропийных решений задачи Коши были доказаны в [4], а корректность начально-краевых задач в ограниченных областях установлена в [5, 6]. Энтропийные решения краевой задачи (1.1), (1.2) строятся с помощью методов, развитых в работе [6].

Привлечем необходимые определения.

Определение 1.1. Пара функций $(\eta, q) \in C^2(\mathbb{R})^2$ называется *энтропийной парой*, если функция η является выпуклой и имеет место равенство

$$q'(z) = A'(z)\eta'(z) \quad \text{при } z \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, для формулировки условий на границе в смысле Ф. Отто нам потребуется следующее

Определение 1.2. Пара функций $(H, Q) \in C^2(\mathbb{R}^2)^2$ называется *граничной энтропийной парой*, если выполнены соотношения

$$\frac{\partial}{\partial z}Q(z,k) = A'(z)\frac{\partial}{\partial z}H(z,k), \quad H(z,k) \geq 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}H(z,k) \geq 0, \quad H(z,z) = Q(z,z) = \frac{\partial}{\partial z}Q(z,z) = 0 \quad \text{при } z,k \in \mathbb{R}.$$

По аналогии с работой [6] дадим два определения энтропийного решения задачи (1.1), (1.2).

Определение 1.3. Функция $u \in L_\infty(G_T) \cap L_2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big)$ называется *энтропийным решением краевой задачи* (1.1), (1.2), если

1) справедлива оценка

$$\|u\|_{L_\infty(G_T)} \le M, \quad \text{где } M = \max\{\|u^0\|_{L_\infty(\Omega)}, \|u^T\|_{L_\infty(\Omega)}\}; \tag{1.7}$$

2) для любой энтропийной пары (η, q) имеет место неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t} q(u) - \Delta\eta(u) + \eta''(u)|\nabla u|^2 \le 0 \tag{1.8}$$

в смысле теории распределений;

3) для любой граничной энтропийной пары (H,Q), любого числа $k \in [-M,M]$ и произвольной п. в. неотрицательной функций $\beta \in L_1(\Omega)$ существуют пределы

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+} \int\limits_\Omega Q(u(t,x),k)\beta(x)\,dx, \quad \operatorname*{ess\,lim}_{t\to T-} \int\limits_\Omega Q(u(t,x),k)\beta(x)\,dx \tag{1.9}$$

и имеют место неравенства

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+} \int\limits_\Omega Q(u(t,x),u^0(x))\beta(x)\,dx \le 0, \tag{1.10}$$

$$-\operatorname*{ess\,lim}_{t\to T-} \int\limits_\Omega Q(u(t,x),u^T(x))\beta(x)\,dx \le 0. \tag{1.11}$$

Определение 1.4. Функция $u \in L_\infty(G_T) \cap L_2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big)$ называется *энтропийным решением задачи* (1.1), (1.2), если она удовлетворяет оценке (1.7) и неравенству

$$\begin{aligned} -\int\limits_{G_T} \left(Q(u,k)\frac{\partial}{\partial t}\gamma + H(u,k)\Delta\gamma - |\nabla u|^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} H(u,k)\gamma \right) dtdx \\ \le \mathscr{A} \int\limits_\Omega (H(u^0(x),k)\gamma(0,x) + H(u^T(x),k)\gamma(T,x))\,dx \end{aligned} \tag{1.12}$$

для любой граничной энтропийной пары (H,Q), произвольного $k \in [-M,M]$ и любой неотрицательной функции $\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\Omega)$, $\mathscr{A} = \sup\limits_{|z|\le M} A'(z)$.

Перейдем к формулировке результатов настоящей работы.

Предложение 1.1. *Для любых $u^0, u^T \in L_\infty(\Omega)$ определения 1.3 и 1.4 эквивалентны.*

Доказательству этого предложения посвящен § 2. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1.2. *Пусть функции $u_1, u_2 \in L_\infty(G_T) \cap L_2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big)$ являются энтропийными решениями краевой задачи (1.1), (1.2), которые соответствуют граничным данным $u_i^0, u_i^T \in L_\infty(\Omega)$, $i = 1,2$. Тогда справедлива оценка устойчивости энтропийного решения по отношению к возмущениям граничных данных:*

$$\|u_1 - u_2\|_{L_1(G_T)} \le C\big(\big\|u_1^0 - u_2^0\big\|_{L_1(\Omega)} + \big\|u_1^T - u_2^T\big\|_{L_1(\Omega)}\big), \tag{1.13}$$

где $C = C(\Omega, \mathscr{A})$.

Единственность энтропийного решения является очевидным следствием этой теоремы, доказательству которой посвящен § 3.

В настоящей работе также утверждается, что при естественных ограничениях на граничные данные u^0, u^T энтропийное решение в смысле определения 1.4 является предельной точкой множества решений $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ регуляризованной задачи

$$\frac{\partial}{\partial t} A(u_\varepsilon(t,x)) = \Delta u_\varepsilon(t,x) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\varepsilon(t,x) \quad \text{при } (t,x) \in G_T, \tag{1.14}$$

$$u_\varepsilon|_{\Gamma_T} = 0, \quad u_\varepsilon|_{\{0\}\times\Omega} = u^0, \quad u_\varepsilon|_{\{T\}\times\Omega} = u^T. \tag{1.15}$$

Теорема 1.3. *Пусть $u^0, u^T \in L_\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Тогда*
1) при $\varepsilon > 0$ задача (1.14), (1.15) *имеет решение $u_\varepsilon \in H^1(G_T) \cap L_\infty(G_T)$;*
2) для п. в. $(t,x) \in G_T$ выполнено соотношение

$$u_\varepsilon(t,x) \to u(t,x) \quad \text{при } \varepsilon \to 0+, \tag{1.16}$$

где функция $u \in L_\infty(G_T) \cap L_2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big)$ — энтропийное решение краевой задачи (1.1), (1.2).

Доказательство этой теоремы находится в § 4. Последнее утверждение является прямым следствием теорем 1.2 и 1.3.

Теорема 1.4. *Для любых $u^0, u^T \in L_\infty(\Omega)$ краевая задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное энтропийное решение.*

Доказательство теоремы 1.4 приводится в § 5.

§ 2. Доказательство предложения 1.1

Доказательство эквивалентности определений 1.3 и 1.4 целесообразно разбить на две части: сначала докажем, что из определения 1.4 следует определение 1.3, а затем докажем обратное.

Предложение 2.5. *Из определения* 1.4 *следует определение* 1.3.

Доказательство. Пусть (η, q) — произвольная энтропийная пара, обладающая тем свойством, что выпуклая функция η достигает минимума в некоторой точке $k_0 \in \mathbb{R}$. Определим граничную энтропийную пару (H_0, Q_0) посредством равенств

$$H_0(z,k) = \eta(z-k+k_0) - \eta(k_0) \geq 0, \quad Q_0(z,k) = q(z-k+k_0) - q(k_0) \quad \text{при } z,k \in \mathbb{R}.$$

Подставляя в неравенство (1.12) граничную энтропийную пару (H_0, Q_0) и функцию $\gamma = \phi \in C_0^\infty(G_T)$, придем к неравенству

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int\limits_{G_T} \bigg(Q_0(u,k_0) \frac{\partial}{\partial t}\phi + H_0(u,k_0)\Delta\phi - |\nabla u|^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} H_0(u,k_0)\phi \bigg)\, dtdx \\ &= \int\limits_{G_T} \bigg(q(u)\frac{\partial}{\partial t}\phi + \eta(u)\Delta\phi - \eta''(u)|\nabla u|^2\phi \bigg)\, dtdx - \int\limits_{G_T} \bigg(q(k_0)\frac{\partial}{\partial t}\phi + \eta(k_0)\Delta\phi \bigg)\, dtdx \\ &= \int\limits_{G_T} \bigg(q(u)\frac{\partial}{\partial t}\phi + \eta(u)\Delta\phi - \eta''(u)|\nabla u|^2\phi \bigg)\, dtdx. \end{aligned}$$

Легко видеть, что если функция u удовлетворяет неравенству (1.12), то она же удовлетворяет неравенству (1.8).

Далее покажем, что из интегрального неравенства (1.12) следует существование пределов (1.9). Подставляя в (1.12) $\gamma = \alpha\beta$, где $\alpha \in C_0^\infty(0,T)$ и $\beta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, получим неравенство

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega Q(u(t,x),k)\alpha'(t)\beta(x)\,dtdx \\
&\leq \int_0^T \int_\Omega \biggl(H(u(t,x),k)\Delta\beta(x) - \frac{\partial^2}{\partial u^2}H(u(t,x),k)|\nabla u(t,x)|^2\beta(x)\biggr)\alpha(t)\,dtdx. \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Введем вспомогательные функции $\Lambda \in L_1(0,T)$ и Ξ, $\Theta \in L_\infty(0,T)$ по правилу

$$
\begin{aligned}
\Lambda(t) := \|H(u,k)\|_{L_\infty(G_T)} &\int_\Omega |\Delta\beta|\,dx \\
&+ \left\|\frac{\partial^2}{\partial u^2}H(u,k)\right\|_{L_\infty(G_T)} \|\beta\|_{L_\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\,dx,
\end{aligned}
$$

$$
\Theta(t) := \int_\Omega Q(u(t,x),k)\beta(x)\,dx, \quad \Xi(t) := \Theta(t) - \int_0^t \Lambda(\tau)\,d\tau \quad \text{при п. в. } t \in (0,T).
$$

Тогда правая часть неравенства (2.1) оценивается сверху интегралом по $(0,T)$ от произведения $\Lambda\alpha$:

$$
\int_0^T \Theta'(t)\alpha(t)\,dt \leq \int_0^T \Lambda(t)\alpha(t)\,dt = \int_0^T \left(\int_0^t \Lambda(\tau)\,d\tau\right)'\alpha(t)\,dt.
$$

Перепишем это неравенство:

$$
\int_0^T \Xi'(t)\alpha(t)\,dt \leq 0.
$$

В силу произвольности и неотрицательности функции $\alpha \in C_0^\infty(0,T)$ из этого неравенства вытекает, что функция $\Xi \in L_\infty(0,T)$ не возрастает п. в. в области $(0,T)$. Таким образом, из ограниченности и монотонности функции Ξ следует существование пределов $\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}\Xi(t)$ и $\operatorname*{ess\,lim}_{t\to T-}\Xi(t)$, причем

$$
\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}\Xi(t) := \operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}\Theta(t) = \operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}\int_\Omega Q(u(t,x),k)\beta(x)\,dx,
$$

$$
\operatorname*{ess\,lim}_{t\to T-}\Xi(t) + \int_0^T \Lambda(\tau)\,d\tau := \operatorname*{ess\,lim}_{t\to T-}\Theta(t) = \operatorname*{ess\,lim}_{t\to T-}\int_\Omega Q(u(t,x),k)\beta(x)\,dx,
$$

что завершает доказательство существования пределов.

Для завершения доказательства предложения 2.5 остается только обосновать справедливость неравенств (1.10) и (1.11). Для простоты положим в неравенстве $k = \omega$, где $\omega \in \mathbb{Q} \cap [-M,M]$. Сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма 2.6. *Имеют место неравенства*

$$\lim_{\substack{t\to 0+\\ t\notin N}} \int\limits_\Omega Q(u(t,x),\omega)\beta(x)\,dx \le \mathscr{A} \int\limits_\Omega H(u^0(x),\omega)\beta(x)\,dx, \tag{2.2}$$

$$-\lim_{\substack{t\to T-\\ t\notin N}} \int\limits_\Omega Q(u(t,x),\omega)\beta(x)\,dx \le \mathscr{A} \int\limits_\Omega H(u^T(x),\omega)\beta(x)\,dx, \tag{2.3}$$

где $N \subset (0,T)$ — множество меры нуль.

Доказательство. Учитывая приведенные выше обозначения, в случае $\gamma = \alpha\beta$, $\alpha \in C^\infty(0,T)$, $\alpha \ge 0$, $\beta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\beta \ge 0$, перепишем неравенство (1.12) в виде

$$-\int\limits_0^T \Xi(t)\alpha'(t)\,dt \le \alpha(T)\int\limits_0^T \Lambda(\tau)\,d\tau + \mathscr{A}\int\limits_\Omega (\alpha(0)H(u^0(x),\omega) + \alpha(T)H(u^T(x),\omega))\beta(x)\,dx. \tag{2.4}$$

Рассмотрим два случая: $\alpha(t) = (1-nt)\chi_{(0,\frac1n)}$ и $\alpha(t) = (nt - nT + 1)\chi_{(T-\frac1n,T)}$, где $\chi_{(0,\frac1n)}$ и $\chi_{(T-\frac1n,T)}$ — характеристические функции, $n\in\mathbb{N}$. Тогда (2.4) переписывается в виде двух неравенств:

$$n\int\limits_0^{\frac1n} \Xi(t)\,dt \le \mathscr{A}\int\limits_\Omega H(u^0(x),\omega)\beta(x)\,dx, \tag{2.5}$$

$$-n\int\limits_{T-\frac1n}^T \Xi(t)\,dt \le \int\limits_0^T \Lambda(\tau)\,d\tau + \mathscr{A}\int\limits_\Omega H(u^T(x),\omega)\beta(x)\,dx. \tag{2.6}$$

Приведем факт из математического анализа. Поскольку у функции $\Xi \in L_\infty(0,T)$ существуют ограниченные пределы по t при $t\to 0+$ и $t \to T-$, $t\notin N$, где $N\subset(0,T)$ — множество меры нуль, то эти пределы имеют вид

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}\Xi(t) = \lim_{n\to\infty} n\int\limits_0^{\frac1n}\Xi(t)\,dt = \lim_{\substack{t\to 0+\\ t\notin N}}\int\limits_\Omega Q(u(t,x),\omega)\beta(x)\,dx,$$

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to T-}\Xi(t) = \lim_{n\to\infty} n\int\limits_{T-\frac1n}^T \Xi(t)\,dt = \lim_{\substack{t\to T-\\ t\notin N}}\int\limits_\Omega Q(u(t,x),\omega)\beta(x)\,dx - \int\limits_0^T\Lambda(\tau)\,d\tau.$$

Предельный переход по n в неравенствах (2.5) и (2.6) приводит к неравенствам (2.2) и (2.3). $\square$

Завершим доказательство предложения (2.5). Пусть $\mathscr{J}$ — счетное множество неотрицательных кусочно-постоянных функций со значениями в $\mathbb{Q}$; множество $\mathscr{J}$ подчинено условию, что для любой п. в. неотрицательной функции $\beta \in L_1(\Omega)$ найдется такая последовательность $\{\beta_l\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{J}$, что имеет место сходимость $\lim\limits_{l\to\infty}\beta_l=\beta$ в пространстве $L_1(\Omega)$, где $\beta_l=\sum\limits_{m=1}^{l}\beta_{l,m}\chi_{E_{l,m}}$, $\beta_{l,m}\in\mathbb{Q}$, $\chi_{E_{l,m}}$ — характеристическая функция множества $E_{l,m}$. Область Ω представима в виде объединения взаимно не пересекающихся множеств, т. е. $\Omega=\bigcup\limits_{m=1}^{l}E_{l,m}$, $|E_{l,m}|=\frac{1}{l}\operatorname{mes}\Omega$. Если в неравенствах (2.2) и (2.3) выбрать функцию β как $\beta_{l,m}\chi_{E_{l,m}}$, то в этих неравенствах множество меры нуль $N\subset(0,T)$ зависит только от ω и множества $E_{l,m}$, т. е. $N=N(\omega,E_{l,m})$:

$$\lim_{\substack{t\to 0+\\ t\notin N(\omega,E_{l,m})}}\beta_{l,m}\int\limits_{E_{l,m}}Q(u(t,x),\omega)\,dx\le\mathscr{A}\beta_{l,m}\int\limits_{E_{l,m}}H(u^0(x),\omega)\,dx, \tag{2.7}$$

$$-\lim_{\substack{t\to T-\\ t\notin N(\omega,E_{l,m})}}\beta_{l,m}\int\limits_{E_{l,m}}Q(u(t,x),\omega)\,dx\le\mathscr{A}\beta_{l,m}\int\limits_{E_{l,m}}H(u^T(x),\omega)\,dx. \tag{2.8}$$

Для произвольной функции $v\in L_\infty(\Omega)$, $\|v\|_{L_\infty(\Omega)}\le M$, найдется такая последовательность $\{v_l\}_{l\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{J}$, что имеет место сходимость

$$v=\lim_{l\to\infty}v_l=\lim_{l\to\infty}\sum_{m=1}^{l}v_{l,m}\chi_{E_{l,m}}$$

п. в. в Ω, $v_{l,m}\in\mathbb{Q}$. В неравенствах (2.7) и (2.8) выберем $\omega=v_{l,m}$ и суммируем каждое из этих неравенств по m от 1 до l:

$$\lim_{\substack{t\to 0+\\ t\notin N_l}}\int\limits_{\Omega}Q(u(t,x),v_l(x))\beta_l(x)\,dx\le\mathscr{A}\int\limits_{\Omega}H(u^0(x),v_l(x))\beta_l(x)\,dx,$$

$$-\lim_{\substack{t\to T-\\ t\notin N_l}}\int\limits_{\Omega}Q(u(t,x),v_l(x))\beta_l(x)\,dx\le\mathscr{A}\int\limits_{\Omega}H(u^T(x),v_l(x))\beta_l(x)\,dx,$$

где $N_l=\bigcup\limits_{m=1}^{l}N(v_{l,m},E_{l,m})$. Переходя к пределу по l к ∞, приходим к неравенствам

$$\lim_{\substack{t\to 0+\\ t\notin N}}\int\limits_{\Omega}Q(u(t,x),v(x))\beta(x)\,dx\le\mathscr{A}\int\limits_{\Omega}H(u^0(x),v(x))\beta(x)\,dx, \tag{2.9}$$

$$-\lim_{\substack{t\to T-\\ t\notin N}}\int\limits_{\Omega}Q(u(t,x),v(x))\beta(x)\,dx\le\mathscr{A}\int\limits_{\Omega}H(u^T(x),v(x))\beta(x)\,dx. \tag{2.10}$$

Подставив $v=u^0$ в (2.9) и соответственно $v=u^T$ в (2.10), получим в точности неравенства (1.10) и (1.11), что завершает доказательство предложения 2.5. □

Предложение 2.7. *Из определения* 1.3 *следует определение* 1.4.

Доказательство. Пусть (H,Q) — произвольная граничная энтропийная пара. При фиксированном $k\in\mathbb{R}$ пара функций $(H(\cdot,k),Q(\cdot,k))$ от одного аргумента является энтропийной парой. В энтропийном условии (1.8) положим $\eta(\cdot)=H(\cdot,k)$, $q(\cdot)=Q(\cdot,k)$, $\phi\in C_0^\infty(G_T)$:

$$-\int\limits_{G_T}\left(Q(u,k)\frac{\partial}{\partial t}\phi+H(u,k)\Delta\phi-\frac{\partial^2}{\partial u^2}H(u,k)|\nabla u|^2\phi\right)dtdx\le 0.$$

В этом неравенстве сделаем переобозначение $\phi = \zeta_n\gamma$, где $\zeta_n \in C_0^\infty(0,T)$ — сглаживание непрерывной кусочно-линейной функции $\min\{nt, 1, n(T-t)\}$, $\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\Omega)$, $\gamma \geq 0$:

$$-\int\limits_{G_T}\left(Q(u,k)\frac{\partial}{\partial t}\gamma + H(u,k)\Delta\gamma - \frac{\partial^2}{\partial u^2}H(u,k)|\nabla u|^2\gamma\right)\zeta_n\,dtdx$$

$$\leq \int\limits_0^T \zeta_n'(t)\int\limits_\Omega Q(u,k)\gamma\,dtdx$$

$$= n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\int\limits_\Omega Q(u(t,x),k)\gamma(t,x)\,dtdx - n\int\limits_{T-\frac{1}{n}}^T\int\limits_\Omega Q(u(t,x),k)\gamma(t,x)\,dtdx.$$

Предельный переход по n в этом неравенстве приводит к следующему неравенству:

$$-\int\limits_{G_T}\left(Q(u,k)\frac{\partial}{\partial t}\gamma + H(u,k)\Delta\gamma - \frac{\partial^2}{\partial u^2}H(u,k)|\nabla u|^2\gamma\right)dtdx$$

$$\leq \operatorname*{ess\,lim}_{t\to+0}\int\limits_\Omega Q(u(t,x),k)\gamma(0,x)\,dx - \operatorname*{ess\,lim}_{t\to T-}\int\limits_\Omega Q(u(t,x),k)\gamma(T,x)\,dx. \quad (2.11)$$

Для оценки сверху правой части этого неравенства введем дополнительные сведения. Рассмотрим пару непрерывных функций $(\widetilde{H},\widetilde{Q})$ таких, что для всех $z,s,k\in\mathbb{R}$

$$\widetilde{H}(z,s) \equiv \begin{cases} H(z,k)-H(s,k), & z\leq s\leq k,\\ H(z,k), & s\leq k\leq z,\\ 0, & k\leq z\leq s,\\ 0, & s\leq z\leq k,\\ H(z,k), & z\leq k\leq s,\\ H(z,k)-H(s,k), & k\leq s\leq z,\end{cases}$$

$$Q(z,k)-\widetilde{Q}(z,s) \equiv \begin{cases} Q(s,k), & z\leq s\leq k,\\ Q(s,k), & s\leq k\leq z,\\ Q(z,k), & k\leq z\leq s,\\ Q(z,k), & s\leq z\leq k,\\ Q(s,k), & z\leq k\leq s,\\ Q(s,k), & k\leq s\leq z.\end{cases}$$

Эта пара $(\widetilde{H},\widetilde{Q})$ удовлетворяет определению 1.2 и тем самым является граничной энтропийной парой. Ограничимся выбором $z,k,s\in\mathbb{R}$, $|z|,|k|,|s|\leq M$. В случае выбора (z,s,k), когда $Q(z,k)-\widetilde{Q}(z,s)=Q(s,k)$, имеет место неравенство

$$|Q(z,k)-\widetilde{Q}(z,s)| = |Q(s,k)| = \left|\int\limits_k^s A'(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}H(\lambda,k)\,d\lambda\right| \leq \mathscr{A}H(s,k),$$

где, напомним, $\mathscr{A} = \sup\limits_{|z|\le M} A'(z)$. Функция $H(\cdot,k)$ по построению является выпуклой, неотрицательной и имеющей единственную точку минимума, равную k. Таким образом, при $k\le z\le s$, $s\le z\le k$ имеет место неравенство

$$|Q(z,k)-\widetilde{Q}(z,s)| = |Q(z,k)| \le \mathscr{A} H(z,k) \le \mathscr{A} H(s,k).$$

Итак, для п. в. $(t,x)\in G_T$ выполнены неравенства

$$|Q(u(t,x),k)-\widetilde{Q}(u(t,x),u^0(x))| \le \mathscr{A} H(u^0(x),k), \tag{2.12}$$

$$|Q(u(t,x),k)-\widetilde{Q}(u(t,x),u^T(x))| \le \mathscr{A} H(u^T(x),k). \tag{2.13}$$

Кроме того, в силу определения 1.3 имеют место неравенства

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}\int\limits_{\Omega}\widetilde{Q}(u(t,x),u^0(x))\gamma(0,x)\,dx \le 0,$$

$$-\operatorname*{ess\,lim}_{t\to T-}\int\limits_{\Omega}\widetilde{Q}(u(t,x),u^T(x))\gamma(T,x)\,dx \le 0.$$

Прибавим эти два неравенства к неравенству (2.11):

$$-\int\limits_{G_T}\left(Q(u,k)\frac{\partial}{\partial t}\gamma + H(u,k)\Delta\gamma - \frac{\partial^2}{\partial u^2}H(u,k)|\nabla u|^2\gamma\right)dtdx$$
$$\le \operatorname*{ess\,lim}_{t\to +0}\int\limits_{\Omega}(Q(u(t,x),k)-\widetilde{Q}(u(t,x),u^0(x)))\gamma(0,x)\,dx$$
$$-\operatorname*{ess\,lim}_{t\to T-}\int\limits_{\Omega}(Q(u(t,x),k)-\widetilde{Q}(u(t,x),u^T(x)))\gamma(T,x)\,dx.$$

К выражениям, которые стоят под интегралами в правой части этого неравенства, применим (2.12) и (2.13), после чего правая часть оценивается сверху величиной

$$\mathscr{A}\int\limits_{\Omega}(H(u^0(x),k)\gamma(0,x)+H(u^T(x),k)\gamma(T,x))\,dx,$$

что завершает доказательство предложения 2.7.

§ 3. Доказательство теоремы 1.2

Вывод оценки (1.13) для энтропийных решений в смысле определения (1.3) осуществляется с помощью метода удвоения переменных, который был предложен в [4]. Рассмотрим вспомогательную граничную энтропийную пару (H,F):

$$H(z,k)=|z-k|,\quad F(z,k)=\operatorname{sgn}(z-k)(A(z)-A(k))\quad \text{при } z,k\in\mathbb{R},$$

которая является пределом последовательности энтропийных пар (H_l,F_l) при $l\to\infty$:

$$H_l(z,k)=\left((z-k)^2+\left(\frac{1}{l}\right)^2\right)^{\frac12}-\frac{1}{l},\quad F_l(z,k)=\int\limits_k^z A'(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}H_l(\lambda,k)\,d\lambda,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}H_l(z,k)=\frac{\partial^2}{\partial k^2}H_l(z,k)=-\frac{\partial^2}{\partial z\partial k}H_l(z,k)=\frac{1}{l^2}\left((z-k)^2+\frac{1}{l^2}\right)^{-\frac{3}{2}}. \qquad (3.1)$$

Пусть $u_i=u_i(t_i,x_i)$, где $(t_i,x_i)\in G_T$, — энтропийное решение задачи (1.1), (1.2), соответствующее граничным данным $u_i^0=u_i^0(x_i)$, $u_i^T=u_i^T(x_i)$, $x_i\in\Omega$, $i=1,2$. По определению 1.3 энтропийное решение u_i удовлетворяет неравенству (1.8), в котором сделаем переобозначения: $\eta(\cdot)=H_l(\cdot,k)$, $q(\cdot)=F_l(\cdot,k)$, $k=u_j(t_j,x_j)$, $j=1,2$, $j\neq i$; затем домножим это неравенство на неотрицательную функцию $\phi\in C_0^\infty(G_T\times G_T)$, $\phi=\phi(t_1,x_1,t_2,x_2)$, и проинтегрируем по $(t_j,x_j)\in G_T$. Сложим полученные неравенства для энтропийных решений $u_1=u_1(t_1,x_1)$ и $u_2=u_2(t_2,x_2)$:

$$-\int\limits_{G_T}\int\limits_{G_T}\Biggl(F_l(u_1,u_2)\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\phi+\frac{\partial}{\partial t_2}\phi\right)+H_l(u_1,u_2)\bigl(\Delta_{x_1}\phi+\Delta_{x_2}\phi\bigr)$$
$$-\left(|\nabla u_1|^2\frac{\partial^2}{\partial u_1^2}H_l(u_1,u_2)+|\nabla u_2|^2\frac{\partial^2}{\partial u_2^2}H_l(u_1,u_2)\right)\phi\Biggr)\,dt_1dx_1dt_2dx_2\le 0. \qquad (3.2)$$

Зафиксируем неотрицательные бесконечно дифференцируемые функции $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\varrho\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такие, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)\,dx=1,\quad \int\limits_{\mathbb{R}}\varrho(t)dt=1,\quad \operatorname{supp}\rho\subset B_d(0,1),\quad \operatorname{supp}\varrho\subset(-1,1),$$

$$\rho(-x)=\rho(x),\quad \varrho(-t)=\varrho(t)\quad \text{при } x\in\mathbb{R}^d,\ t\in\mathbb{R},$$

и положим $\rho_\epsilon(x)=\epsilon^{-d}\rho\bigl(\frac{x}{\epsilon}\bigr)$, $\varrho_\delta(t)=\delta^{-1}\varrho\bigl(\frac{t}{\delta}\bigr)$, где ϵ, δ — произвольные положительные параметры. Зафиксируем также произвольную неотрицательную функцию $\sigma\in C_0^\infty(\Omega)$ и выберем функцию ϕ в виде

$$\phi(t_1,x_1,t_2,x_2)=\zeta_n(t_1)\zeta_n(t_2)\sigma(x_1)\sigma(x_2)\rho_\epsilon(x_1-x_2)\varrho_\delta(t_1-t_2),$$

где $\zeta_n(t)$ — сглаживание функции $\min\{nt,1,n(T-t)\}$, $n\in\mathbb{N}$. Используя формулу

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\varrho_\delta(t_1-t_2)=-\frac{\partial}{\partial t_2}\varrho_\delta(t_1-t_2),$$

выпишем в явном виде сомножитель при $F_l(u_1,u_2)$ в неравенстве (3.2):

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\phi+\frac{\partial}{\partial t_2}\phi=\sigma(x_1)\sigma(x_2)\rho_\epsilon(x_1-x_2)\varrho_\delta(t_1-t_2)(\zeta_n'(t_1)\zeta_n(t_2)+\zeta_n(t_1)\zeta_n'(t_2)).$$

Выполнены следующие равенства:

$$\nabla_{x_1}\rho_\epsilon(x_1-x_2)=-\nabla_{x_2}\rho_\epsilon(x_1-x_2),$$
$$\Delta_{x_1}\rho_\epsilon(x_1-x_2)=-\operatorname{div}_{x_1}\nabla_{x_2}\rho_\epsilon(x_1-x_2)=\Delta_{x_2}\rho_\epsilon(x_1-x_2).$$

С помощью этих равенств после громоздких выкладок, которые здесь целесообразно пропустить, выпишем сомножитель при $H_l(u_1,u_2)$:

$$\Delta_{x_1}\phi+\Delta_{x_2}\phi=\zeta_n(t_1)\zeta_n(t_2)\varrho_\delta(t_1-t_2)\{(\sigma(x_1)\Delta\sigma(x_2)+\sigma(x_2)\Delta\sigma(x_1)$$
$$+2\nabla\sigma(x_1)\cdot\nabla\sigma(x_2))\rho_\epsilon(x_1-x_2)-2\operatorname{div}_{x_1}\nabla_{x_2}\bigl(\sigma(x_1)\sigma(x_2)\rho_\epsilon(x_1-x_2)\bigr)\}.$$

Далее, перепишем неравенство (3.2) в виде

$$-\int\limits_{G_T}\int\limits_{G_T}H_l(u_1(t_1,x_1),u_2(t_2,x_2))(\sigma(x_1)\Delta\sigma(x_2)+\sigma(x_2)\Delta\sigma(x_1)$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\nabla\sigma(x_1)\cdot\nabla\sigma(x_2))\zeta_n(t_1)\zeta_n(t_2)\rho_\epsilon(x_1-x_2)\varrho_\delta(t_1-t_2)\,dt_1dx_1dt_2dx_2\\
\le \int\limits_{G_T}\int\limits_{G_T}&\Bigg(-\Bigg[\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial u_i\partial u_j}H_l(u_i,u_j)\nabla u_i\cdot\nabla u_j\Bigg]\zeta_n(t_1)\zeta_n(t_2)+(\zeta_n'(t_1)\zeta_n(t_2)\\
&+\zeta_n(t_1)\zeta_n'(t_2))F_l(u_1,u_2)\Bigg)\sigma(x_1)\sigma(x_2)\rho_\epsilon(x_1-x_2)\varrho_\delta(t_1-t_2)\,dt_1dx_1dt_2dx_2.
\end{aligned}
$$

В силу (3.1) квадратичная форма в квадратных скобках в правой части этого неравенства неотрицательна, поскольку

$$
\begin{aligned}
\Phi_l = \Bigg[\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial u_i\partial u_j}H_l(u_i,u_j)\nabla u_i\cdot\nabla u_j\Bigg]&\\
= \frac{1}{l^2}\bigg((u_1-u_2)^2+\frac{1}{l^2}\bigg)^{-\frac{3}{2}}&(|\nabla u_1|^2-2\nabla u_1\cdot\nabla u_2+|\nabla u_2|^2).
\end{aligned}
$$

Перепишем предыдущее неравенство в следующем виде:

$$
-\int\limits_{G_T}\int\limits_{G_T}\Upsilon_a(t_1,x_1,t_2,x_2)\zeta_n(t_1)\zeta_n(t_2)\,dt_1dx_1dt_2dx_2\le I^{1,n}+I^{2,n}, \tag{3.3}
$$

где

$$
I^{1,n}=\int\limits_{G_T}\int\limits_{G_T}\zeta_n'(t_1)\zeta_n(t_2)\Upsilon_b(t_1,x_1,t_2,x_2)\,dt_1dx_1dt_2dx_2,
$$

$$
I^{2,n}=\int\limits_{G_T}\int\limits_{G_T}\zeta_n(t_1)\zeta_n'(t_2)\Upsilon_b(t_1,x_1,t_2,x_2)\,dt_1dx_1dt_2dx_2,
$$

$$
\begin{aligned}
\Upsilon_a(t_1,x_1,t_2,x_2)&=(H_l(u_1(t_1,x_1),u_2(t_2,x_2))(\sigma(x_1)\Delta\sigma(x_2)+\sigma(x_2)\Delta\sigma(x_1)\\
&\quad+2\nabla\sigma(x_1)\cdot\nabla\sigma(x_2))-\Phi_l\sigma(x_1)\sigma(x_2))\rho_\epsilon(x_1-x_2)\varrho_\delta(t_1-t_2),\\
\Upsilon_b(t_1,x_1,t_2,x_2)&=F_l(u_1(t_1,x_1),u_2(t_2,x_2))\sigma(x_1)\sigma(x_2)\rho_\epsilon(x_1-x_2)\varrho_\delta(t_1-t_2).
\end{aligned}
$$

Для отыскания предела по n правой части неравенства (3.3) вычислим величины $\lim\limits_{n\to\infty} I^{i,n}$, $i=1,2$. Так как функция ζ_n' в $\frac{1}{n}$-окрестностях точек 0 и T равна соответственно n и $-n$, справедливо следующее представление:

$$
I^{1,n}=\int\limits_{G_T}\Bigg(n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\int\limits_\Omega\Upsilon_b\,dt_1dx_1-n\int\limits_{T-\frac{1}{n}}^{T}\int\limits_\Omega\Upsilon_b\,dt_1dx_1\Bigg)\zeta(t_2)\,dt_2dx_2. \tag{3.4}
$$

Согласно соотношению (1.9) из определения 1.3 для произвольного числа $k\in\mathbb{R}$ и для любой неотрицательной функции $\theta\in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\Omega)$ существуют пределы

$$
\operatorname*{ess\,lim}_{t_1\to0+}\int\limits_\Omega F_l(u_1(t_1,x_1),k)\theta(0,x_1)\,dx_1=\lim_{n\to\infty}n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\int\limits_\Omega F_l(u_1(t_1,x_1),k)\theta(t_1,x_1)\,dt_1dx_1,
$$

$$
\operatorname*{ess\,lim}_{t_1\to T-}\int\limits_\Omega F_l(u_1(t_1,x_1),k)\theta(T,x_1)\,dx_1=\lim_{n\to\infty}n\int\limits_{T-\frac{1}{n}}^{T}\int\limits_\Omega F_l(u_1(t_1,x_1),k)\theta(t_1,x_1)\,dt_1dx_1.
$$

Выбрав $k = u_2(t_2, x_2)$, $\theta = \sigma(x_1)\sigma(x_2)\rho_\epsilon(x_1 - x_2)\varrho_\delta(t_1 - t_2)$, получим, что для почти каждого $(t_2, x_2) \in G_T$ существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega \Upsilon_b(t_1, x_1, t_2, x_2)\, dt_1 dx_1 = \operatorname*{ess\,lim}_{t_1\to 0+} \int_\Omega \Upsilon_b(t_1, x_1, t_2, x_2)\, dx_1,$$

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{T-\frac{1}{n}}^{T} \int_\Omega \Upsilon_b(t_1, x_1, t_2, x_2)\, dt_1 dx_1 = \operatorname*{ess\,lim}_{t_1\to T-} \int_\Omega \Upsilon_b(t_1, x_1, t_2, x_2)\, dx_1.$$

Так как функция

$$(t_2, x_2) \mapsto \left(n \int_0^{\frac{1}{n}} \int_\Omega \Upsilon_b(t_1, x_1, t_2, x_2)\, dt_1 dx_1 - n \int_{T-\frac{1}{n}}^{T} \int_\Omega \Upsilon_b(t_1, x_1, t_2, x_2)\, dt_1 dx_1 \right)$$

равномерно ограничена, из (3.4) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} I^{1,n} = \int_{G_T} \left(\operatorname*{ess\,lim}_{t_1\to 0+} \int_\Omega \Upsilon_b\, dx_1 - \operatorname*{ess\,lim}_{t_1\to T-} \int_\Omega \Upsilon_b\, dx_1 \right) dt_2 dx_2.$$

Повторяя для $I^{2,n}$ предыдущие выкладки, получим равенство

$$\lim_{n\to\infty} I^{2,n} = \int_{G_T} \left(\operatorname*{ess\,lim}_{t_2\to 0+} \int_\Omega \Upsilon_b\, dx_2 - \operatorname*{ess\,lim}_{t_2\to T-} \int_\Omega \Upsilon_b\, dx_2 \right) dt_1 dx_1.$$

Таким образом, предельный переход по n в (3.3) приводит к неравенству

$$\begin{aligned} - \int_{G_T} \int_{G_T} (H_l(u_1, u_2)(\sigma(x_1)\Delta\sigma(x_2) + \sigma(x_2)\Delta\sigma(x_1) + 2\nabla\sigma(x_1) \cdot \nabla\sigma(x_2)) \\ - \Phi_l \sigma(x_1)\sigma(x_2))\rho_\epsilon(x_1 - x_2)\varrho_\delta(t_1 - t_2)\, dt_1\, dx_1 dt_2\, dx_2 \\ \le U^l_{1,2}(\delta, \epsilon) + U^l_{2,1}(\delta, \epsilon) - V^l_{1,2}(\delta, \epsilon) - V^l_{2,1}(\delta, \epsilon), \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned} U^l_{i,j}(\delta, \epsilon) = \int_{G_T} \left(\operatorname*{ess\,lim}_{t_i\to 0+} \int_\Omega F_l(u_i(t_i, x_i), u_j(t_j, x_j))\sigma(x_i)\sigma(x_j)\rho_\epsilon(x_i - x_j)\, dx_i \right) \\ \times \varrho_\delta(t_j)\, dt_j dx_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^l_{i,j}(\delta, \epsilon) = \int_{G_T} \left(\operatorname*{ess\,lim}_{t_i\to T-} \int_\Omega F_l(u_i(t_i, x_i), u_j(t_j, x_j))\sigma(x_i)\sigma(x_j)\rho_\epsilon(x_i - x_j)\, dx_i \right) \\ \times \varrho_\delta(T - t_j)\, dt_j\, dx_j \end{aligned}$$

при $i, j = 1, 2$, $i \ne j$. Легко видеть, что $-\frac{1}{l} \le F_l(z, k) - F(z, k) \le \frac{1}{l}$ при всех $z, k \in \mathbb{R}$ и

$$\operatorname*{ess\,lim\,sup}_{t_i\to R} \int_\Omega F(u_i(t, x_i), k)\theta(x_i)\, dx_i$$

$$\leq \operatorname*{ess\,lim}_{t_i\to R}\int\limits_\Omega F_l(u_i(t_i,x_i),k)\theta(x_i)\,dx_i+\frac{1}{l}\operatorname{mes}\Omega\max|\theta|,$$

$$\operatorname*{ess\,lim\,inf}_{t_i\to R}\int\limits_\Omega F(u_i(t_i,x_i),k)\theta(x_i)\,dx_i$$
$$\geq \operatorname*{ess\,lim}_{t_i\to R}\int\limits_\Omega F_l(u_i(t_i,x_i),k)\theta(x_i)\,dx_i-\frac{1}{l}\operatorname{mes}\Omega\max|\theta|,$$

где $\theta\in C^\infty(\Omega)$, $R=0,T$. Следовательно,

$$0\leq \operatorname*{ess\,lim\,sup}_{t_i\to R}\int\limits_\Omega F(u_i(t_i,x_i),k)\theta(x_i)\,dx_i-\operatorname*{ess\,lim\,inf}_{t_i\to R}\int\limits_\Omega F(u_i(t_i,x_i),k)\theta(x_i)\,dx_i$$
$$\leq\frac{2}{l}\operatorname{mes}\Omega\max|\theta|\to 0\quad\text{при } l\to\infty.$$

В точках $(t_1,x_1,t_2,x_2)\in G_T\times G_T$, где $u_1(t_1,x_1)=u_2(t_2,x_2)$, квадратичная форма Φ_l равна 0 п. в. по мере $dx_1dx_2dt_1dt_2$. В случае, когда $u_1(t_1,x_1)\neq u_2(t_2,x_2)$, имеем $\Phi_l\to 0$ при $l\to\infty$. Таким образом, $\Phi_l\to 0$ в пространстве $L_1(G_T\times G_T)$.

Переходя к пределу по l в (3.5), получим неравенство

$$-\int\limits_{G_T}\int\limits_{G_T}|u_1-u_2|\big(\sigma(x_1)\Delta\sigma(x_2)+\sigma(x_2)\Delta\sigma(x_1)$$
$$+2\nabla\sigma(x_1)\cdot\nabla\sigma(x_2)\big)\rho_\epsilon(x_1-x_2)\varrho_\delta(t_1-t_2)\,dt_1dx_1dt_2dx_2$$
$$\leq U_{1,2}(\delta,\epsilon)+U_{2,1}(\delta,\epsilon)-V_{1,2}(\delta,\epsilon)-V_{2,1}(\delta,\epsilon),\quad (3.6)$$

где

$$U_{i,j}(\delta,\epsilon)=\int\limits_{G_T}\Bigg(\operatorname*{ess\,lim}_{t_i\to 0+}\int\limits_\Omega F(u_i(t_i,x_i),u_j(t_j,x_j))\sigma(x_i)\sigma(x_j)\rho_\epsilon(x_i-x_j)\,dx_i\Bigg)$$
$$\times\varrho_\delta(t_j)\,dt_jdx_j,$$

$$V_{i,j}(\delta,\epsilon)=\int\limits_{G_T}\Bigg(\operatorname*{ess\,lim}_{t_i\to T-}\int\limits_\Omega F(u_i(t_i,x_i),u_j(t_j,x_j))\sigma(x_i)\sigma(x_j)\rho_\epsilon(x_i-x_j)\,dx_i\Bigg)$$
$$\times\varrho_\delta(T-t_j)\,dt_jdx_j.$$

У функций $U_{i,j}(\delta,\epsilon)$ и $V_{i,j}(\delta,\epsilon)$ не удается в явном виде записать пределы по δ и ϵ. Для дальнейших действий нам понадобятся дополнительные сведения. Рассмотрим непрерывные функционалы $\mathbf{F}^r_{p,q}\in(L_1(\Omega))'$, $q,p=1,2$, $r=0,T$, определенные равенствами

$$\big\langle\mathbf{F}^r_{p,q},\xi\big\rangle=\operatorname*{ess\,lim}_{\substack{t_q\to r\\ t_q\in(0,T)}}\int\limits_\Omega\xi(x_q)F(u_q(t_q,x_q),u_{p,r}(x_q))\,dx_q$$

для всех $\xi\in L_1(\Omega)$. В силу изоморфности пространства $(L_1(\Omega))'$ пространству $L_\infty(\Omega)$ существуют функции $\vartheta^r_{p,q}\in L_\infty(\Omega)$ такие, что

$$\big\langle\mathbf{F}^r_{p,q},\xi\big\rangle=\int\limits_\Omega\xi(x_q)\vartheta^r_{p,q}(x_q)\,dx_q.$$

Введем в рассмотрение граничную энтропийную пару $(\widetilde{H}_k, \widetilde{F}_k)$, зависящую от параметра $k \in [-M, M]$, по правилу

$$\widetilde{H}_k(z,s) = |z-k| - |k-s| + |z-s|, \quad \widetilde{F}_k(z,s) = F(z,k) - F(k,s) + F(z,s)$$

при $z, s \in [-M, M]$. По определению 1.3 энтропийное решение $u_i = u_i(t_i, x_i)$ удовлетворяет неравенствам (1.10) и (1.11), в которых $Q = \widetilde{F}_k$:

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t_i \to 0+} \int\limits_\Omega F(u_i(t_i,x_i),k)\beta(0,x_i)\,dx_i \le \int\limits_\Omega F\big(k, u_i^0(x_i)\big)\beta(0,x_i)\,dx_i - \int\limits_\Omega \vartheta_{i,i}^0(x_i)\beta(0,x_i)\,dx_i,$$

$$-\operatorname*{ess\,lim}_{t_i \to T-} \int\limits_\Omega F(u_i(t_i,x_i),k)\beta(T,x_i)\,dx_i \le -\int\limits_\Omega F\big(k, u_i^T(x_i)\big)\beta(T,x_i)\,dx_i + \int\limits_\Omega \vartheta_{i,i}^T(x_i)\beta(T,x_i)\,dx_i$$

при $i = 1, 2$, $\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \Omega)$, $\beta \ge 0$. Подставим в эти неравенства $k = u_j(t_j, x_j)$, $j = 1, 2$, $j \ne i$, $\beta = \beta(t_1, x_1, t_2, x_2) = \sigma(x_1)\sigma(x_2)\rho_\epsilon(x_1 - x_2)\varrho_\delta(t_1 - t_2)$ и проинтегрируем по $(t_j, x_j) \in G_T$, замечая, что $\int\limits_0^T \varrho_\delta(t)\,dt = \int\limits_0^T \varrho_\delta(T-t)\,dt = \frac{1}{2}$. С учетом сделанных предположений перепишем эти два неравенства в следующем виде:

$$U_{i,j}(\delta,\epsilon) \le K_{i,j}(\delta,\epsilon) - L_{i,j}(\epsilon), \tag{3.7}$$

$$-V_{i,j}(\delta,\epsilon) \le -M_{i,j}(\delta,\epsilon) + N_{i,j}(\epsilon), \tag{3.8}$$

где

$$K_{i,j}(\delta,\epsilon) = \int\limits_{G_T}\int\limits_\Omega F\big(u_j(t_j,x_j), u_i^0(x_i)\big)\varrho_\delta(t_j)\sigma(x_j)\rho_\epsilon(x_i - x_j)\sigma(x_i)\,dt_j dx_j dx_i,$$

$$L_{i,j}(\epsilon) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega \vartheta_{i,i}^0(x_i)\sigma(x_j)\sigma(x_i)\rho_\epsilon(x_i - x_j)\,dx_j dx_i,$$

$$M_{i,j}(\delta,\epsilon) = \int\limits_{G_T}\int\limits_\Omega F\big(u_j(t_j,x_j), u_i^T(x_i)\big)\varrho_\delta(T - t_j)\sigma(x_j)\rho_\epsilon(x_i - x_j)\sigma(x_i)\,dt_j dx_j dx_i,$$

$$N_{i,j}(\epsilon) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega \vartheta_{i,i}^T(x_i)\sigma(x_j)\sigma(x_i)\rho_\epsilon(x_i - x_j)\,dx_j dx_i.$$

Комбинируя (3.6) и (3.7), (3.8), получим неравенство

$$-\int\limits_{G_T}\int\limits_{G_T} |u_1(t_1,x_1) - u_2(t_2,x_2)|(\sigma(x_1)\Delta\sigma(x_2) + \sigma(x_2)\Delta\sigma(x_1) + 2\nabla\sigma(x_1)\cdot\nabla\sigma(x_2))\rho_\epsilon(x_1 - x_2)\varrho_\delta(t_1 - t_2)\,dt_1 dx_1 dt_2 dx_2 \le \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^2 (K_{i,j}(\delta,\epsilon) - L_{i,j}(\epsilon) - M_{i,j}(\delta,\epsilon) + N_{i,j}(\epsilon)). \tag{3.9}$$

Докажем, что после предельного перехода к нулю по ϵ, а затем по δ неравенство (3.9) примет вид

$$-\int\limits_{G_T} |u_1(t,x)-u_2(t,x)|\Delta\sigma^2(x)\,dtdx \le \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\Biggl(\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{i+j}\vartheta^T_{i,j}(x)-\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{i+j}\vartheta^0_{i,j}(x)\Biggr)\sigma^2(x)\,dx. \quad (3.10)$$

Разобьем вывод неравенства (3.10) на три леммы. Для произвольного фиксированного $\varsigma > \max\{\epsilon,\delta\}$ положим

$$\Omega_\varsigma = \{x\in\Omega, \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\ge\varsigma\}, \quad G_{T,\varsigma} = (\varsigma, T-\varsigma)\times\Omega_\varsigma.$$

Лемма 3.8. *При $\delta,\epsilon\to+0$ левая часть неравенства* (3.9) *стремится к*

$$-\int\limits_{G_T}|u_1(t_1,x_1)-u_2(t_1,x_1)|\Delta\sigma^2(x_1)\,dt_1dx_1.$$

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned}\mathscr{T}^1(\delta,\epsilon) = \int\limits_{(G_T\setminus G_{T,\varsigma})\cup G_{T,\varsigma}}\int\limits_{G_T}&|u_1(t_1,x_1)-u_2(t_2,x_2)|\bigl(\sigma(x_1)\Delta\sigma(x_2)+\sigma(x_2)\Delta\sigma(x_1)\\ &+2\nabla\sigma(x_1)\cdot\nabla\sigma(x_2)\bigr)\varrho_\delta(t_1-t_2)\rho_\epsilon(x_1-x_2)\,dt_1dx_1dt_2dx_2\\ &-\int\limits_{(G_T\setminus G_{T,\varsigma})\cup G_{T,\varsigma}}|u_1(t_1,x_1)-u_2(t_1,x_1)|\Delta\sigma^2(x_1)\,dt_1dx_1.\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\mathscr{T}^1(\delta,\epsilon) = &\int\limits_{G_T\setminus G_{T,\varsigma}}\int\limits_{G_T}|u_1(t_1,x_1)-u_2(t_2,x_2)|(\sigma(x_1)\Delta\sigma(x_2)+\sigma(x_2)\Delta\sigma(x_1)\\ &+2\nabla\sigma(x_1)\cdot\nabla\sigma(x_2))\varrho_\delta(t_1-t_2)\rho_\epsilon(x_1-x_2)\,dt_1dx_1dt_2dx_2\\ &+\int\limits_{|\tau|<1,|y|<1}\varrho(\tau)\rho(y)\int\limits_{G_{T,\varsigma}}\bigl((|u_1(t_1,x_1)-u_2(t_1+\delta\tau,x_1+\epsilon y)|(\sigma(x_1)\Delta\sigma(x_1+\epsilon y)\\ &+\sigma(x_1+\epsilon y)\Delta\sigma(x_1)+2\nabla\sigma(x_1)\cdot\nabla\sigma(x_1+\epsilon y)-\Delta\sigma^2(x_1))\\ &+(|u_1(t_1,x_1)-u_2(t_1+\delta\tau,x_1+\epsilon y)|-|u_1(t_1,x_1)-u_2(t_1,x_1)|)\Delta\sigma^2(x_1)\bigr)\,d\tau dy dt_1dx_1\\ &-\int\limits_{G_T\setminus G_{T,\varsigma}}|u_1(t_1,x_1)-u_2(t_1,x_1)|\Delta\sigma^2(x_1)\,dt_1dx_1\\ &=\mathscr{T}^{1,1}(\delta,\epsilon)+\mathscr{T}^{1,2}(\delta,\epsilon)+\mathscr{T}^{1,3}.\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}|\mathscr{T}^{1,1}(\delta,\epsilon)| &\le \mathrm{C}\int\limits_{G_T\setminus G_{T,\varsigma}}\int\limits_{G_T}\varrho_\delta(t_1-t_2)\rho_\epsilon(x_1-x_2)\,dt_1dx_1dt_2dx_2\\ &\le C\operatorname{mes}(G_T\setminus G_{T,\varsigma})\le C\varsigma^{d+1}.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\mathscr{T}^{1,2}(\delta,\epsilon)=\int\limits_{|\tau|,|y|<1}\varrho(\tau)\rho(y)\mathbf{G}_{\delta,\epsilon}(\tau,y)\,d\tau dy,$$

где

$$\mathbf{G}_{\delta,\epsilon}(\tau,y)=\int\limits_{G_{T,\varsigma}}(|u_1(t_1,x_1)-u_2(t_1+\delta\tau,x_1+\epsilon y)|(\sigma(x_1)(\Delta\sigma(x_1+\epsilon y)-\Delta\sigma(x_1))$$
$$+(\sigma(x_1+\epsilon y)-\sigma(x_1))\Delta\sigma(x_1)+2\nabla\sigma(x_1)\cdot(\nabla\sigma(x_1+\epsilon y)-\nabla\sigma(x_1)))$$
$$+(|u_1(t_1,x_1)-u_2(t_1+\delta\tau,x_1+\epsilon y)|-|u_1(t_1,x_1)-u_2(t_1,x_1)|)\Delta\sigma^2(x_1))\,dt_1dx_1.$$

В силу непрерывности в среднем в пространстве $L_1(G_{T,\varsigma})$ функций $|u_1-u_2|$, σ, $\Delta\sigma$, $\nabla\sigma$ функция $\mathbf{G}_{\delta,\epsilon}$ стремится к нулю в пространстве $L_1(B_{d+1}(0,1))$ при $\delta,\epsilon\to+0$, следовательно, $\mathscr{T}^{1,2}(\delta,\epsilon)\to 0$. Далее, имеем

$$|\mathscr{T}^{1,3}|\le\|u_1-u_2\|_{L_\infty(G_T)}\|\Delta\sigma^2\|_{L_\infty(\Omega)}\operatorname{mes}(G_T\setminus G_{T,\varsigma})\le C\varsigma^{d+1}.$$

Значит, $\limsup\limits_{\delta,\epsilon\to+0}\mathscr{T}^1(\delta,\epsilon)\le C\varsigma^{d+1}$, что в силу произвольности ς влечет справедливость утверждение леммы 3.8. □

Рассмотрим предельный переход для слагаемых правой части неравенства (3.9). Легко видеть, что

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{2}(N_{i,j}(\epsilon)-L_{i,j}(\epsilon))\to\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\big(\vartheta^T_{i,i}(x_i)-\vartheta^0_{i,i}(x_i)\big)\sigma^2(x_i)\,dx_i\quad\text{при }\epsilon\to+0.$$

Лемма 3.9. *Для фиксированного $\delta>0$ при $\epsilon\to 0+$*

$$K_{i,j}(\delta,\epsilon)-\int\limits_{G_T}F\big(u_j(t_j,x_j),u_i^0(x_j)\big)\sigma^2(x_j)\varrho_\delta(t_j)\,dt_jdx_j\to 0,$$

$$M_{i,j}(\delta,\epsilon)-\int\limits_{G_T}F\big(u_j(t_j,x_j),u_i^T(x_j)\big)\sigma^2(x_j)\varrho_\delta(T-t_j)dt_j\,dx_j\to 0.$$

Доказательство. Мы дадим доказательство только для $K_{1,2}(\delta,\epsilon)$. В остальных случаях оно проводится совершенно аналогично. Положим

$$\mathscr{T}^2(\epsilon)=K_{1,2}(\delta,\epsilon)-\int\limits_{G_T}F\big(u_2(t_2,x_2),u_1^0(x_2)\big)\sigma^2(x_2)\varrho_\delta(t_2)\,dt_2dx_2$$
$$=\int\limits_0^T\int\limits_{(\Omega\setminus\Omega_\varsigma)\cup\Omega_\varsigma}\int\limits_{\Omega}F\big(u_2(t_2,x_2),u_1^0(x_1)\big)\varrho_\delta(t_2)\rho_\epsilon(x_1-x_2)\sigma(x_1)\sigma(x_2)\,dt_2dx_2dx_1$$
$$-\int\limits_{G_T}F\big(u_2(t_2,x_2),u_1^0(x_2)\big)\sigma^2(x_2)\varrho_\delta(t_2)\,dt_2dx_2$$
$$=\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varsigma}\int\limits_{\Omega}F\big(u_2(t_2,x_2),u_1^0(x_1)\big)\varrho_\delta(t_2)\rho_\epsilon(x_1-x_2)\sigma(x_1)\sigma(x_2)\,dt_2dx_2dx_1$$

$$+\int\limits_{|y|<1}\rho(y)\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varsigma}\big\{F\big(u_2(t_2,x_2),u_1^0(x_2+\epsilon y)\big)(\sigma(x_2+\epsilon y)\sigma(x_2)-\sigma^2(x_2))$$
$$+\big(F\big(u_2(t_2,x_2),u_1^0(x_2+\epsilon y)\big)-F\big(u_2(t_2,x_2),u_1^0(x_2)\big)\big)\sigma^2(x_2)\big\}\varrho_\delta(t_2)\,dydt_2dx_2$$
$$-\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varsigma}F\big(u_2(t_2,x_2),u_1^0(x_2)\big)\sigma^2(x_2)\varrho_\delta(t_2)\,dt_2dx_2=\mathscr{T}^{2,1}(\epsilon)+\mathscr{T}^{2,2}(\epsilon)+\mathscr{T}^{2,3}.$$

Как и в доказательстве леммы 3.8, имеем $|\mathscr{T}^{2,2}(\epsilon)|\to 0$, при $\epsilon\to 0+$; $|\mathscr{T}^{2,1}(\epsilon)|+|\mathscr{T}^{2,3}|\le C\varsigma^d$, где ς — произвольное число. □

Лемма 3.10. *Имеют место равенства*

$$\lim_{\delta\to 0+}\{\lim_{\epsilon\to 0+}K_{i,j}(\delta,\epsilon)\}=\lim_{\delta\to 0+}\int\limits_0^\delta\int\limits_\Omega F\big(u_j(t_j,x_j),u_i^0(x_j)\big)\sigma^2(x_j)\varrho_\delta(t_j)\,dt_jdx_j$$
$$=\frac12\int\limits_\Omega\vartheta_{i,j}^0(x_j)\sigma^2(x_j)\,dx_j,$$

$$\lim_{\delta\to 0+}\{\lim_{\epsilon\to 0+}M_{i,j}(\delta,\epsilon)\}=\lim_{\delta\to 0+}\int\limits_{T-\delta}^T\int\limits_\Omega F\big(u_j(t_j,x_j),u_i^T(x_j)\big)\sigma^2(x_j)\varrho_\delta(T-t_j)\,dt_jdx_j$$
$$=\frac12\int\limits_\Omega\vartheta_{i,j}^T(x_j)\sigma^2(x_j)\,dx_j.$$

Доказательство. Как и ранее, ограничимся доказательством утверждения леммы для $\lim\limits_{\epsilon\to 0+}K_{1,2}(\delta,\epsilon)$. В остальных случаях оно проводится совершенно аналогично. В силу леммы 3.9 достаточно показать, что при $\delta\to+0$

$$\mathscr{T}^3(\delta)=\int\limits_0^\delta\int\limits_\Omega F\big(u_2(t_2,x_2),u_1^0(x_2)\big)\sigma(x_2)^2\varrho_\delta(t_2)\,dt_2dx_2-\frac12\int\limits_\Omega\vartheta_{1,2}^0(x_2)\sigma^2(x_2)\,dx_2\to 0.$$

Заметим, что

$$\mathscr{T}^3(\delta)=\int\limits_0^\delta\int\limits_\Omega\big(F\big(u_2(t_2,x_2),u_1^0(x_2)\big)-\vartheta_{1,2}^0(x_2)\big)\frac1\delta\varrho\Big(\frac{t_2}{\delta}\Big)\sigma^2(x_2)\,dt_2dx_2.$$

Оценим по модулю эту величину:

$$|\mathscr{T}^3(\delta)|\le\sup_{\tau\in(0,T)}\varrho(\tau)\frac1\delta\int\limits_0^\delta\Big|\int\limits_\Omega\big(F\big(u_2(t_2,x_2),u_1^0(x_2)\big)-\vartheta_{1,2}^0(x_2)\big)\sigma^2(x_2)\,dx_2\Big|dt_2,$$

и устремим δ к нулю, замечая, что

$$\big\langle\mathbf{F}_{1,2}^0,\sigma^2\big\rangle=\operatorname*{ess\,lim}_{t_2\to 0+}\int\limits_\Omega F\big(u_2(t_2,x_2),u_1^0(x_2)\big)\sigma^2(x_2)\,dx_2$$
$$=\lim_{\delta\to 0+}\frac1\delta\int\limits_0^\delta\int\limits_\Omega F\big(u_2(t_2,x_2),u_1^0(x_2)\big)\sigma^2(x_2)\,dt_2dx_2=\int\limits_\Omega\vartheta_{1,2}^0(x_2)\sigma^2(x_2)\,dx_2.\quad\square$$

Переходя к пределу в неравенстве (3.9) сначала по ϵ, а затем по δ и привлекая утверждения лемм 3.8 и 3.10, придем к неравенству (3.10). Перепишем (3.10) в более удобной форме:

$$-\int\limits_{G_T} |u_1(t,x)-u_2(t,x)|\Delta\sigma^2(x)\,dtdx \le \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{i+j}\vartheta^T_{i,j}(x)\right)\sigma^2(x)\,dx$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{i+j}\vartheta^0_{i,j}(x)\right)\sigma^2(x)\,dx = \mathscr{I}^T-\mathscr{I}^0.$$

Покажем, что правая часть этого неравенства оценивается сверху следующим образом:

$$|\mathscr{I}^r| \le \mathscr{A}\int\limits_{\Omega}\big|u_1^r(x)-u_2^r(x)\big|\sigma^2(x)\,dx, \quad r=0,T. \tag{3.11}$$

По построению функции $\vartheta^r_{i,j}$ интеграл $\mathscr{I}^r$ представим в виде

$$\mathscr{I}^r = \operatorname*{ess\,lim}_{\substack{t\to r\\ t\in(0,T)}}\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{i+j}F\big(u_j(t,x),u_i^r(x)\big)\sigma^2(x)\,dx$$
$$= \operatorname*{ess\,lim}_{\substack{t\to r\\ t\in(0,T)}}\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{i+j}\operatorname{sgn}\big(u_j(t,x)-u_i^r(x)\big)\big(A(u_j(t,x))-A\big(u_i^r(x)\big)\big)\sigma^2(x)\,dx.$$

В силу (1.7) для любых $p_1,p_2,q_1,q_2\in\mathbb{R}$, $|p_i|<|q_i|\le M$, $i=1,2$, справедливо неравенство

$$\left|\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{i+j}\operatorname{sgn}(p_j-q_i)(A(p_j)-A(q_i))\right| \le 2|A(q_1)-A(q_2)|.$$

Легко видеть, что для почти любого $t\in(0,T)$ и $r=0,T$ имеет место следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\left|\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{2}(-1)^{i+j}F\big(u_j(t,x),u_i^r(x)\big)\sigma^2(x)\,dx\right| \le \int\limits_{\Omega}\big|A\big(u_1^r(x)\big)-A\big(u_2^r(x)\big)\big|\sigma^2(x)\,dx$$
$$\le \mathscr{A}\int\limits_{\Omega}\big|u_1^r(x)-u_2^r(x)\big|\sigma^2(x)\,dx.$$

Устремив в этом неравенстве t к r, $t\notin E\subset(0,T)$, где $\operatorname{mes}E=0$, получим оценку (3.11), которая вместе с (3.10) дает оценку

$$\int\limits_{\Omega}\nabla\sigma^2\cdot\nabla\left(\int\limits_0^T|u_1-u_2|\,dt\right)dx \le \mathscr{A}\int\limits_{\Omega}\big(\big|u_1^0-u_2^0\big|+\big|u_1^T-u_2^T\big|\big)\sigma^2\,dx, \tag{3.12}$$

где σ — произвольная неотрицательная функция из $C_0^\infty(\Omega)$.

Покажем, что оценка (3.12) справедлива не только для квадрата произвольной неотрицательной функции $\sigma\in C_0^\infty(\Omega)$, но и для любой неотрицательной функции $\xi\in C_0^\infty(\Omega)$. Для любого $l\in\mathbb{N}$ подставим в оценку (3.12) функцию $\sigma_l=\sqrt{\xi+\frac{1}{l^2}}-\frac{1}{l}$. Легко видеть, что последовательность вектор-функций

$$\nabla\sigma_l^2-\nabla\xi=\nabla\xi(1+l^2\xi)^{-\frac{1}{2}}$$

равномерно ограничена по l. Более того, на множестве $\{x \in \Omega : \xi(x) = 0\}$ функция $\nabla\sigma_l^2 - \nabla\xi$ равна нулю. На множестве $\{x \in \Omega : \xi(x) > 0\}$ функция $\nabla\sigma_l^2 - \nabla\xi$ стремится к нулю при $l \to \infty$. Кроме того, $\sigma_l^2 \rightrightarrows \xi$ в Ω. Таким образом, последовательность функций $\{\sigma_l^2\}$ сходится к ξ в пространстве $H_0^1(\Omega)$. Подставляя $\sigma = \sigma_l$ в (3.12) и переходя к пределу по l, заключаем, что неравенство

$$-\int\limits_{G_T} |u_1 - u_2|\Delta\xi\,dtdx \leq \mathscr{A}\int\limits_{\Omega}\big(\big|u_1^0 - u_2^0\big| + \big|u_1^T - u_2^T\big|\big)\xi\,dx \tag{3.13}$$

выполнено для любой неотрицательной функции $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$ и, как следствие, для любой неотрицательной функции $\xi \in C^2(\Omega)$, равной нулю на $\partial\Omega$. Положим $\xi = \xi_P$, где ξ_P — решение краевой задачи

$$\Delta\xi_P(x) = -1 \quad \text{при } x \in \Omega, \quad \xi_P(x) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega.$$

Из (3.13) получаем неравенство

$$\int\limits_{G_T} |u_1 - u_2|\,dtdx \leq \mathscr{A}\int\limits_{\Omega}\big(\big|u_1^0 - u_2^0\big| + \big|u_1^T - u_2^T\big|\big)\xi_P\,dx,$$

из которого следует оценка (1.13), что завершает доказательство теоремы 1.2.

§ 4. Доказательство теоремы 1.3

В этом параграфе доказывается, что при любых граничных данных $u^0, u^T \in L_\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ энтропийное решение задачи (1.1), (1.2) представимо в виде предельной точки в пространстве $L_1(G_T)$ множества решений $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ задачи (1.14), (1.15). Сначала докажем существование решения задачи (1.14), (1.15).

Лемма 4.11. *В условиях теоремы* 1.3 *задача* (1.14), (1.15) *имеет решение $u_\varepsilon \in L_\infty(G_T) \cap H^1(G_T)$, которое удовлетворяет оценке*

$$\int\limits_{G_T}\left(\varepsilon\left|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon\right|^2 + |\nabla u_\varepsilon|^2\right)dtdx \leq C(T, \Omega, M, A)(1 + \|u^0 + u^T\|_{H_0^1(\Omega)}). \tag{4.1}$$

Доказательство. Согласно общей теории краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка (см., например, [7, теоремы 8.7, 8.8]) задача (1.14), (1.15) имеет решение $u_\varepsilon \in L_\infty(G_T) \cap H^1(G_T)$, которое удовлетворяет принципу максимума. Чтобы установить справедливость оценки (4.1), домножим уравнение (1.14) на $u_\varepsilon - \varphi$ и проинтегрируем полученное равенство по области G_T:

$$0 = \int\limits_{G_T}(u_\varepsilon - \varphi)\frac{\partial}{\partial t}A(u_\varepsilon)\,dtdx - \int\limits_{G_T}(u_\varepsilon - \varphi)\Delta u_\varepsilon\,dtdx - \varepsilon\int\limits_{G_T}(u_\varepsilon - \varphi)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_\varepsilon\,dtdx$$
$$= \mathscr{I}_1 + \mathscr{I}_2 + \mathscr{I}_3.$$

Пусть $\mathscr{A}'(z) = A(z)$ при $|z| \leq M$; в частном случае выбора функции $\varphi(t,x) = \frac{T-t}{T}u^0(x) + \frac{t}{T}u^T(x)$ имеем

$$\mathscr{I}_1 = \int\limits_{G_T}(u_\varepsilon - \varphi)\frac{\partial}{\partial t}A(u_\varepsilon)\,dtdx = -\int\limits_{G_T}\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon - \varphi)A(u_\varepsilon)\,dtdx$$
$$= \int\limits_{\Omega}(\mathscr{A}(u^0) - \mathscr{A}(u^T))\,dx + \frac{1}{T}\int\limits_{G_T}(u^T - u^0)A(u_\varepsilon)\,dtdx$$
$$\geq -2\max_{|z|\leq M}A(z)\,\mathrm{mes}(\Omega)\|u^T - u^0\|_{L_\infty(\Omega)},$$

$$\mathscr{I}_2 = -\int\limits_{G_T} (u_\varepsilon - \varphi)\Delta u_\varepsilon \, dtdx = \int\limits_{G_T} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dtdx - \int\limits_{G_T} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\varphi \, dtdx$$
$$\geq \frac{1}{2}\int\limits_{G_T} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dtdx - \frac{1}{2}\int\limits_{G_T} |\nabla\varphi|^2 \, dtdx,$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{G_T} |\nabla\varphi|^2 \, dtdx = -\frac{1}{2}\int\limits_{G_T}\left(\frac{(T-t)^2}{T^2}|\nabla u^0|^2 + 2\frac{(T-t)t}{T^2}\nabla u^0 \cdot \nabla u^T + \frac{t^2}{T^2}|\nabla u^T|^2\right) dtdx$$
$$= -\frac{T}{6}\int\limits_{\Omega} (|\nabla u^0|^2 + \nabla u^0 \cdot \nabla u^T + |\nabla u^T|^2)\, dx \geq -\frac{T}{4}\int\limits_{\Omega} (|\nabla u^0|^2 + |\nabla u^T|^2)\, dx,$$

$$\mathscr{I}_3 = \varepsilon\int\limits_{G_T} \frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon - \varphi)\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon \, dtdx = \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{G_T}\left|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon\right|^2 dtdx + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{G_T}\left(\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial t}\varphi\right)^2 dtdx$$
$$-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{G_T}\left|\frac{\partial}{\partial t}\varphi\right|^2 dtdx \geq \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{G_T}\left|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon\right|^2 dtdx - \frac{\varepsilon}{2T^2}\int\limits_{\Omega}(|\nabla u^0|^2 + 2|\nabla u^0||\nabla u^T| + |\nabla u^T|^2)\, dx$$
$$\geq \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{G_T}\left|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon\right|^2 dtdx - \frac{\varepsilon}{T^2}\int\limits_{\Omega}(|\nabla u^0|^2 + |\nabla u^T|^2)\, dx.$$

Используя равенство $\sum\limits_{i=1}^{3}\mathscr{I}_i = 0$, получим искомое неравенство

$$\int\limits_{G_T}\left(\varepsilon\left|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon\right|^2 + |\nabla u_\varepsilon|^2\right) dtdx \leq \left(\frac{T}{2} + \frac{2\varepsilon}{T^2}\right)\int\limits_{\Omega}(|\nabla u^0|^2 + |\nabla u^T|^2)\, dx$$
$$+ 4\max_{|z|\leq M} A(z)\,\mathrm{mes}(\Omega)(\|u^T\|_{L_\infty(\Omega)} + \|u^0\|_{L_\infty(\Omega)}). \qquad \square$$

Докажем, что множество решений $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ относительно компактно в пространстве $L_1(G_T)$.

Предложение 4.12. *Множество $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ решений задачи* (1.14), (1.15) *удовлетворяет следующим утверждениям:*

1) *множество $\{u_\varepsilon\}$ ограничено в $L_1\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$;*

2) *имеет место соотношение*

$$\|\,\tau_h u_\varepsilon - u_\varepsilon\,\|_{L_1(0,T-h;H^{-s}(\Omega))} \to 0 \quad \text{при } h \to 0+$$

равномерно по $\varepsilon > 0$, где $\tau_h u_\varepsilon(t,x) = u_\varepsilon(t+h,x)$;

3) *множество $\{u_\varepsilon\}$ относительно компактно в $L_1(G_T)$.*

Доказательство. Применяя теорему 5 из [8] к нашему случаю, получаем, что из двух первых утверждений предложения 4.12 следует третье. Таким образом, для доказательства компактности множества $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ в пространстве $L_1(G_T)$ достаточно проверить справедливость двух первых утверждений предложения 4.12. Из оценки (4.1) вытекает ограниченность множества $\{u_\varepsilon\}$ в $L_1\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$, и первое утверждение предложения, очевидно, выполнено.

Покажем, что второе утверждение предложения 4.12 тоже выполнено. Для упрощения доказательства введем в рассмотрение множество $\{v_\varepsilon\}$ и функцию $D \in C^1(\mathbb{R})$, где

$$v_\varepsilon = D(u_\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} A(u_\varepsilon), \quad D'(z) = A'^2(z) \geq 0 \quad \text{при } z \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Легко видеть, что в силу условия A такая гладкая функция $D \in C^1(\mathbb{R})$ существует. Уравнение (1.14) домножим на $A'(u_\varepsilon)$ и преобразуем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} D(u_\varepsilon) = A'^2(u_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon = A'(u_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} A(u_\varepsilon) = A'(u_\varepsilon) \Delta u_\varepsilon + \varepsilon A'(u_\varepsilon) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\varepsilon \\ = \Delta A(u_\varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(u_\varepsilon) - A''(u_\varepsilon) \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon \right|^2 \right).\end{aligned}$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} v_\varepsilon = \Delta A(u_\varepsilon) - A''(u_\varepsilon) \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon \right|^2 \right).$$

Оценим модуль непрерывности функции v_ε по $t \in (0, T-h)$ при условии, что функция $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ произвольна и $0 \leq h < T$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (v_\varepsilon(t+h,x) - v_\varepsilon(t,x)) \psi(x)\, dx &= \int_t^{t+h} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial \tau} v_\varepsilon(\tau,x) \psi(x)\, d\tau dx \\ &= \int_t^{t+h} \int_\Omega \left(\Delta A(u_\varepsilon) - A''(u_\varepsilon) \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial \tau} u_\varepsilon \right|^2 \right) \right) \psi\, d\tau dx \\ &= - \int_t^{t+h} \int_\Omega \left(\nabla A(u_\varepsilon) \nabla \psi + A''(u_\varepsilon) \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial \tau} u_\varepsilon \right|^2 \right) \psi \right) d\tau dx \\ &\leq C \|\psi\|_{H_0^s(\Omega)} \int_t^{t+h} \int_\Omega \left(|A'(u_\varepsilon)| |\nabla u_\varepsilon| + |A''(u_\varepsilon)| \left(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial \tau} u_\varepsilon \right|^2 \right) \right) d\tau dx,\end{aligned}$$

где $s = [\frac{d}{2}] + 1$, $d = \dim \Omega$. Пусть $\Upsilon(\tau, x) = |A'(u_\varepsilon)|\, |\nabla u_\varepsilon| + |A''(u_\varepsilon)| \big(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon \big| \frac{\partial}{\partial \tau} u_\varepsilon \big|^2 \big)$. Перепишем полученное выше неравенство:

$$\int_\Omega (v_\varepsilon(t+h,x) - v_\varepsilon(t,x)) \psi(x)\, dx \leq C \|\psi\|_{H_0^s(\Omega)} \int_t^{t+h} \int_\Omega \Upsilon(\tau, x)\, d\tau dx.$$

При п. в. $t \in (0, T-h)$ отображение

$$\psi \mapsto \int_\Omega (v_\varepsilon(t+h,x) - v_\varepsilon(t,x)) \psi(x)\, dx$$

является линейным непрерывным функционалом из пространства $H^{-s}(\Omega)$:

$$\|v_\varepsilon(t+h,\cdot) - v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq C \int_t^{t+h} \int_\Omega \Upsilon(\tau, x)\, d\tau dx.$$

Проинтегрируем это неравенство по t от 0 до $T-h$:

$$\int\limits_0^{T-h} \|\tau_h v_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{H^{-s}(\Omega)}\,dt \le C \int\limits_0^{T-h}\int\limits_t^{t+h}\int\limits_\Omega \Upsilon(\tau,x)\,dtd\tau dx \le Ch.$$

Получим оценку

$$\int\limits_0^{T-h} \left\|\tau_h D(u_\varepsilon) - D(u_\varepsilon) - \left(\tau_h \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}A(u_\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}A(u_\varepsilon)\right)\right\|_{H^{-s}(\Omega)} dt \le Ch, \tag{4.3}$$

где C не зависит от ε.

С другой стороны, функция $\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}A(u_\varepsilon)$ удовлетворяет оценке

$$\left\|\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}A(u_\varepsilon)\right\|_{L_2(G_T)} = \left\|\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}A(u_\varepsilon)\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \le \sqrt{\varepsilon}C.$$

Следовательно, множество $\left\{\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}A(u_\varepsilon)\right\}_{\varepsilon>0}$ является относительно компактным подмножеством пространства $L_2(0,T,L_2(\Omega))$ и соответственно $L_1(0,T,L_2(\Omega))$. Согласно критерию компактности в пространстве $L_1(0,T,L_2(\Omega))$ (см. [8, теорема 1]) и непрерывному вложению $L_2(\Omega)\hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$ для любого $\varepsilon>0$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{T-h} &\left\|\varepsilon\tau_h\frac{\partial}{\partial t}A(u_\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}A(u_\varepsilon)\right\|_{H^{-s}(\Omega)} dt\\ &\le C\int\limits_0^{T-h}\left\|\varepsilon\tau_h\frac{\partial}{\partial t}A(u_\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}A(u_\varepsilon)\right\|_{L_2(\Omega)} dt \to 0 \quad \text{при } h\to 0+.\end{aligned}$$

Из этого соотношения и оценки (4.3) следует оценка

$$\int\limits_0^{T-h} \|\tau_h D(u_\varepsilon) - D(u_\varepsilon)\|_{H^{-s}(\Omega)}\,dt \le Ch. \tag{4.4}$$

В силу монотонности функции $D\in C(\mathbb{R})$ из оценки (4.4) получаем искомое второе утверждение предложения 4.12:

$$\int\limits_0^{T-h} \|\tau_h u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{H^{-s}(\Omega)}\,dt \le Ch.$$

Из первых двух утверждений предложения 4.12 и теоремы 5 из [8] вытекает относительная компактность множества $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ в пространстве $L_1(G_T)$. □

В следующей лемме приводится неравенство, которому удовлетворяет функция u_ε.

Лемма 4.13. *При любом значении положительного параметра ε имеет место неравенство*

$$-\int\limits_{G_T}\left(Q(u_\varepsilon,k)\frac{\partial}{\partial t}\gamma + H(u_\varepsilon,k)\left(\Delta\gamma + \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma\right)\right.$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial u_\varepsilon^2}H(u_\varepsilon,k)\bigg(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon|^2\bigg)\gamma\bigg)\xi_{\varepsilon/\mathscr{A}}(t)\,dtdx$$

$$\leq \mathscr{A}\int\limits_{\Omega}(H(u^0(x),k)\gamma(0,x)+H(u^T(x),k)\gamma(T,x))\,dx+2\varepsilon\int\limits_{G_T}H(u_\varepsilon,k)\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}\frac{\partial}{\partial t}\gamma\,dtdx, \tag{4.5}$$

где (H,Q) — произвольная граничная энтропийная пара, $\gamma\in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\Omega)$ — неотрицательная пробная функция, $k\in\mathbb{R}$, вид функции $\xi_{\varepsilon/\mathscr{A}}$ будет дан ниже.

Доказательство. Сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма 4.14. *Пусть функции s, $\xi_K\in C_0(0,T)$ заданы формулами*

$$s(t)=\min\{t,\delta,T-t\},\quad \xi_K(t)=1-\exp(-s(t)/K)\quad \text{при } t\in(0,T)$$

для произвольных $\delta,K>0$. Тогда для любой п. в. неотрицательной функции $\alpha\in H^1(0,T)$ справедливо интегральное неравенство

$$-K\int\limits_0^T\alpha'(t)\xi'_K(t)\,dt\leq-\int\limits_0^T\alpha(t)|\xi'_K(t)|\,dt+\alpha(0)+\alpha(T). \tag{4.6}$$

Доказательство. При $0<s(t)<\delta$ выполнены равенства

$$\xi'_K(t)=\frac{s'(t)}{K}\exp\bigg(-\frac{s(t)}{K}\bigg),\quad \xi''_K(t)=-\frac{1}{K^2}\exp\bigg(-\frac{s(t)}{K}\bigg).$$

Выведем искомое неравенство:

$$\int\limits_0^T\alpha'(t)\xi'_K(t)\,dt=\int\limits_{0<s(t)<\delta}\alpha'(t)\xi'_K(t)\,dt=-\int\limits_{0<s(t)<\delta}\alpha(t)\xi''_K(t)\,dt+\xi'_Ks'\alpha|_{s=\delta-}$$

$$-\xi'_Ks'\alpha|_{s=0+}=\frac{1}{K^2}\int\limits_{0<s(t)<\delta}\alpha(t)\exp\bigg(-\frac{s(t)}{K}\bigg)\,dt+\frac{1}{K}\exp\bigg(-\frac{\delta}{K}\bigg)\alpha|_{s=\delta-}-\frac{1}{K}\alpha|_{s=0+}$$

$$\geq\frac{1}{K^2}\int\limits_{0<s(t)<\delta}\alpha(t)\exp\bigg(-\frac{s(t)}{k}\bigg)\,dt-\frac{1}{K}\alpha|_{s=0+}$$

$$=\frac{1}{K}\int\limits_0^T\alpha(t)|\xi'_K(t)|\,dt-\frac{1}{K}(\alpha(0)+\alpha(T)).\qquad\square$$

Пусть (H,Q) — произвольная граничная энтропийная пара. Учитывая равенство $\frac{\partial}{\partial z}Q(z,k)=A'(z)\frac{\partial}{\partial z}H(z,k)$ при $z,k\in\mathbb{R}$, домножим уравнение (1.14) на $\frac{\partial}{\partial u_\varepsilon}H(u_\varepsilon,k)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(u_\varepsilon,k)=\frac{\partial}{\partial u_\varepsilon}H(u_\varepsilon,k)\frac{\partial}{\partial t}A(u_\varepsilon)=\frac{\partial}{\partial u_\varepsilon}H(u_\varepsilon,k)\bigg(\Delta u_\varepsilon+\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_\varepsilon\bigg)$$

$$=\Delta H(u_\varepsilon,k)+\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}H(u_\varepsilon,k)-\frac{\partial^2}{\partial u_\varepsilon^2}H(u_\varepsilon,k)\bigg(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon|^2\bigg).$$

Домножим это равенство на $\gamma\xi_{\varepsilon/\mathscr{A}}$ и результат проинтегрируем по области G_T, где $\gamma\in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\Omega)$, $\gamma\geq0$:

$$-\int\limits_{G_T}\bigg(Q(u_\varepsilon,k)\frac{\partial}{\partial t}\gamma+H(u_\varepsilon,k)\bigg(\Delta\gamma+\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma\bigg)$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{\partial^2}{\partial u_\varepsilon^2} H(u_\varepsilon,k)\left(\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\left|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon\right|^2\right)\gamma\right)\xi_{\varepsilon/\mathscr{A}}\,dtdx\\
&= \int\limits_{G_T}\left(Q(u_\varepsilon,k)\gamma\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}+\varepsilon H(u_\varepsilon,k)\left(2\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}\frac{\partial}{\partial t}\gamma+\gamma\xi''_{\varepsilon/\mathscr{A}}\right)\right)dtdx\\
&= \int\limits_{G_T} Q(u_\varepsilon,k)\gamma\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}\,dtdx+2\varepsilon\int\limits_{G_T} H(u_\varepsilon,k)\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}\frac{\partial}{\partial t}\gamma\,dtdx\\
&\qquad + \left[-\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\frac{\partial}{\partial t}(H(u_\varepsilon,k)\gamma)\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}\,dtdx\right].
\end{aligned}
$$

Подставим в неравенство (4.6) $\alpha(\cdot)=\int\limits_\Omega H(u_\varepsilon(\cdot,x),k)\gamma(\cdot,x)\,dx$, $K=\varepsilon/\mathscr{A}$. Тогда слагаемое в квадратных скобках оценивается сверху:

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\frac{\partial}{\partial t}(H(u_\varepsilon,k)\gamma)\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}\,dtdx &\le -\mathscr{A}\int\limits_{G_T} H(u_\varepsilon,k)\gamma|\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}|\,dtdx\\
&+\mathscr{A}\int\limits_\Omega (H(u^0(x),k)\gamma(0,x)+H(u^T(x),k)\gamma(T,x))\,dx.
\end{aligned}
$$

Тем самым из приведенного выше равенства следует неравенство

$$
\begin{aligned}
-\int\limits_{G_T}&\left(Q(u_\varepsilon,k)\frac{\partial}{\partial t}\gamma+H(u_\varepsilon,k)\left(\Delta\gamma+\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma\right)\right.\\
&\left.-\frac{\partial^2}{\partial u_\varepsilon^2}H(u_\varepsilon,k)\left(|\nabla u_\varepsilon|^2+\varepsilon\left|\frac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon\right|^2\gamma\right)\right)\xi_{\varepsilon/\mathscr{A}}\,dtdx\\
&\le\int\limits_{G_T}(Q(u_\varepsilon,k)\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}-\mathscr{A}H(u_\varepsilon,k)|\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}|)\gamma\,dtdx\\
+\mathscr{A}\int\limits_\Omega&(H(u^0(x),k)\gamma(0,x)+H(u^T(x),k)\gamma(T,x))\,dx+2\varepsilon\int\limits_{G_T}H(u_\varepsilon,k)\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}\frac{\partial}{\partial t}\gamma\,dtdx.
\end{aligned}
$$

Первое слагаемое правой части этого неравенства оценивается сверху нулем, так как для п. в. $(t,x)\in G_T$ выполнена оценка

$$
\begin{aligned}
Q(u_\varepsilon(t,x),k)\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}(t)&\le|Q(u_\varepsilon(t,x),k)||\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}(t)|\\
&=\left|\int\limits_k^{u_\varepsilon(t,x)}A'(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}H(\lambda,k)\,d\lambda\right||\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}(t)|\le\mathscr{A}H(u_\varepsilon(t,x),k)|\xi'_{\varepsilon/\mathscr{A}}(t)|,
\end{aligned}
$$

что завершает вывод неравенства (4.5). □

Так как множество $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ равномерно ограничено в пространстве $L_\infty(G_T)\cap L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ и относительно компактно в $L_1(G_T)$, то из него можно выделить подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$, которая имеет предел $u\in L_\infty(G_T)\cap L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ при $\varepsilon_l\to 0+$. В силу леммы 4.13 функция u_{ε_l} удовлетворяет неравенству (4.5) при $\varepsilon=\varepsilon_l$. Почти всюду по $t\in(0,T)$ имеют место сходимости

$$
\lim_{\varepsilon_l\to 0+}\xi_{\varepsilon_l/\mathscr{A}}(t)=1-\lim_{\varepsilon_l\to 0+}\exp\left(-\frac{\mathscr{A}s(t)}{\varepsilon_l}\right)=1,
$$

$$\lim_{\varepsilon_l\to 0+}\varepsilon_l\xi'_{\varepsilon_l/\mathscr{A}}(t)=\lim_{\varepsilon_l\to 0+}\mathscr{A}s'(t)\exp\biggl(-\frac{\mathscr{A}s(t)}{\varepsilon_l}\biggr)=0.$$

Легко видеть, что функция u удовлетворяет предельному соотношению

$$-\int\limits_{G_T}\biggl(Q(u,k)\frac{\partial}{\partial t}\gamma+H(u,k)\Delta\gamma-\frac{\partial^2}{\partial u^2}H(u,k)|\nabla u|^2\gamma\biggr)\,dtdx \\ \le\mathscr{A}\int\limits_{\Omega}(H(u^0,k)\gamma(0,x)+H(u^T,k)\gamma(T,x))\,dx,$$

совпадающему с неравенством (1.12) из определения 1.4. Таким образом, предел u подпоследовательности $\{u_{\varepsilon_l}\}$ является энтропийным решением задачи (1.1), (1.2). В силу оценки (1.13) из теоремы 1.2 при $u_1^0=u_2^0$, $u_1^T=u_2^T$ функция u является единственной и поэтому не зависит от выбора подпоследовательности $\{u_{\varepsilon_l}\}$. Следовательно, соотношение (1.16) выполнено, что завершает доказательство теоремы 1.3.

§ 5. Доказательство теоремы 1.4

В предыдущем параграфе мы доказали, что при произвольных граничных данных $u_0,u_T\in L_\infty(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ у краевой задачи (1.1), (1.2) существует единственное энтропийное решение. Покажем, что этот результат имеет место при любых ограниченных граничных данных $u^0,u^T\in L_\infty(\Omega)$. Выберем последовательности $\{u_l^0\},\{u_l^T\}\subset L_\infty(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, которые сходятся в пространстве $L_1(\Omega)$ к функциям u^0,u^T при $l\to\infty$. По $\{u_l^0\}$ и $\{u_l^T\}$ построим последовательность энтропийных решений $\{u_l\}\subset L_\infty(G_T)\cap L_2\bigl(0,T;H_0^1(\Omega)\bigr)$; по определению 1.4 решение u_l удовлетворяет неравенству (1.12):

$$-\int\limits_{G_T}\biggl(Q(u_l,k)\frac{\partial}{\partial t}\gamma+H(u_l,k)\Delta\gamma-|\nabla u_l|^2\frac{\partial^2}{\partial u_l^2}H(u_l,k)\gamma\biggr)\,dtdx \\ \le\mathscr{A}\int\limits_{\Omega}\bigl(H\bigl(u_l^0(x),k\bigr)\gamma(0,x)+H\bigl(u_l^T(x),k\bigr)\gamma(T,x)\bigr)\,dx$$

для любой граничной энтропийной пары (H,Q), произвольного $k\in\mathbb{R}$ и любой неотрицательной функции $\gamma\in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\Omega)$. В силу оценки (1.13) из теоремы 1.2 последовательность $\{u_l\}$ фундаментальна и ограничена в пространстве $L_1(G_T)$, значит, она сходится при $l\to\infty$. Кроме того, ввиду равномерной ограниченности последовательности $\{u_l\}$ в $L_\infty(G_T)\cap L_2\bigl(0,T;H_0^1(\Omega)\bigr)$ у нее существует предел $u\in L_\infty(G_T)\cap L_2\bigl(0,T;H_0^1(\Omega)\bigr)$, который удовлетворяет определению 1.4, не зависит от выбора последовательностей $\{u_l^0\}$, $\{u_l^T\}$ и является единственным энтропийным решением краевой задачи (1.1), (1.2) при любых ограниченных граничных данных $u^0,u^T\in L_\infty(\Omega)$, что завершает доказательство теоремы 1.4.

В заключение автор выражает свою благодарность профессору П. И. Плотникову за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Олейник О. А.* О некоторых нелинейных задачах теории дифференциальных уравнений с частными производными // Первая летняя математическая школа. Киев, 1964. С. 117–256.

2. *Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н.* Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983.
3. *Бочаров О. Б.* О первой краевой задаче для уравнения теплопроводности со знакопеременным коэффициентом // Динамика сплошной среды. 1978. № 37. С. 27–39.
4. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 2. С. 228–255.
5. *Bardos C., Roux A. Y., Nédélec J. C.* First order quasilinear equations with boundary conditions // Comm. Partial Differential Equations. 1979. V. 4, N 9. P. 1017–1034.
6. *Otto F.* First oder equations with boundary conditions. Sonderforchurnbereich 256, 1992. (Preprint; N 234).
7. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные эллиптические уравнения. М.: Наука, 1973.
8. *Simon J.* Compact sets in the space $L_p(0,T;B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1987. V. 146, N 4. P. 65–96.

Статья поступила 26 мая 2004 г.

Кузнецов Иван Владимирович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
kuznetsov_i@hydro.nsc.ru