Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 517.958:532.516.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ

К. Пилецкас, В. Кебликас

Аннотация: Нестационарное решение Пуазейля, описывающее течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном цилиндре, определяется как решение обратной задачи для уравнения теплопроводности. Исследуются вопросы существования и единственности нестационарного решения Пуазейля, соответствующего заданному потоку $F(t)$ вектора скорости. Доказывается, что при выполнении определенных условий согласования для начальных данных и потока $F(t)$ обратная задача однозначно разрешима в пространстве Гёльдера.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, уравнение теплопроводности, обратная задача, интегральные уравнения, нестационарное решение Пуазейля.

§ 1. Введение

Исследованию краевых задач для стационарных систем Стокса и Навье — Стокса в областях с выходами на бесконечность посвящено большое количество работ (см., например, [1–3] и цитируемую в этих работах литературу). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область с m цилиндрическими выходами на бесконечность, т. е. $\Omega = \Omega_0 \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{m} \Pi_j\right)$, где Ω_0 — ограниченная область, а Π_j — полубесконечные цилиндры, задаваемые в некоторых системах координат $x^{(j)}$ соотношениями $\Pi_j = \left\{x^{(j)} : \left(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}\right) \in \omega_j \subset \mathbb{R}^2,\ x_3^{(j)} > 0\right\}$, ω_j — ограниченные области и $\Pi_j \cap \Pi_l = \varnothing$ при $j \neq l$.

Хорошо известно, что решение $(\mathbf{u}, p)$ системы Стокса

$$\begin{gathered} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{1.1}$$

с заданными потоками F_j через сечения ω_j цилиндров Π_j:

$$\int\limits_{\omega_i} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, ds = F_j,\ i = 1,\dots,m, \quad \sum_{j=1}^{m} F_j = 0, \tag{1.2}$$

экспоненциально стремится при $|x| \to \infty, x \in \Pi_j$, к точным решениям Пуазейля, соответствующим цилиндрам Π_j. Для нелинейной системы уравнений Навье — Стокса

$$\begin{gathered} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{1.3}$$

аналогичный результат получен для достаточно малых потоков F_j (см. [4–6]).

Стационарное решение Пуазейля в цилиндре $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 : x' = (x_1, x_2) \in \omega,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ определяется формулами (см., например, [7])

$$\mathbf{u}_F(x) = (0, 0, q_F v(x')), \quad p_F(x) = -\nu q_F x_3 + p_0, \tag{1.4}$$

где p_0 — произвольная постоянная, а $v(x')$ — решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона

$$-\nu\Delta' v(x') = 1,\ x' \in \omega; \quad v(x') = 0,\ x' \in \partial\omega. \tag{1.5}$$

(В (1.5) Δ' — оператор Лапласа по переменным x'.) Поскольку

$$\int\limits_\omega v(x')\,dx' = \nu \int\limits_\omega |\nabla' v(x')|^2\,dx' := \kappa_0 > 0,$$

постоянную q_F можно выбрать так, чтобы решение Пуазейля имело заданный поток

$$q_F \int\limits_\omega v(x')\,dx' = F, \tag{1.6}$$

т. е. $q_F = F\kappa_0^{-1}$.

Свойства решений нестационарной системы Навье — Стокса

$$\begin{gathered} \mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad (x,t) \in \Omega\times(0,T), \\ \mathbf{u}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega\times(0,T), \quad \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{a}(x) \end{gathered} \tag{1.7}$$

в областях с некомпактными границами изучены значительно меньше, чем свойства решений стационарной системы (1.3). Известно [1, 2], что в областях с выходами на бесконечность существуют решения с заданными потоками $F_j(t)$ через сечения этих выходов и в зависимости от геометрических свойств выходов на бесконечность эти решения имеют конечный или бесконечный интеграл энергии. В частности, если выходы цилиндрические, то интеграл энергии бесконечен. Однако ничего не известно об асимптотическом поведении решений задачи (1.7) при $|x| \to \infty$. Первым шагом при изучении асимптотики решений нестационарной системы Навье — Стокса в области с цилиндрическими выходами на бесконечность является нахождение точного решения типа Пуазейля в бесконечном цилиндре. Такое решение будем называть *нестационарным решением Пуазейля.*

Рассмотрим задачу (1.7) в области $Q^T = \Pi\times(0,T)$ и дополнительно зададим поток вектора скорости $\mathbf{u}$ через сечение ω:

$$\int\limits_\omega u_3(x,t)\,dx' = F(t). \tag{1.8}$$

Кроме того, предположим, что $\mathbf{a} = (0, 0, a_3)$, где $a_3 = a_3(x')$ не зависит от переменной x_3 и выполнено необходимое условие согласования

$$\int\limits_\omega a_3(x')\,dx' = F(0). \tag{1.9}$$

Нестационарное решение Пуазейля имеет вид

$$\mathbf{u}(x,t) = (0, 0, v(x',t)), \quad p(x,t) = -q(t)x_3 + p_0(t), \tag{1.10}$$

где $p_0(t)$ — произвольная функция от t, а $v(x',t)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{gathered} v_t(x',t) - \nu\Delta' v(x',t) = q(t), \quad (x',t) \in \omega \times (0,T), \\ v(x',t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\omega \times (0,T), \quad v(x',0) = a_3(x'). \end{gathered} \tag{1.11}$$

Функцию $q(t)$ надо определить так, чтобы $v(x',t)$ удовлетворяла условию потока (1.8), т. е.

$$\int\limits_{\omega} v(x',t)\,dx' = F(t). \tag{1.12}$$

Таким образом, мы приходим к следующей обратной задаче: *по заданным* $a_3(x')$ *и* $F(t)$ *найти пару функций* $(v(x',t), q(t))$, *удовлетворяющую начально-краевой задаче* (1.11) *и интегральному условию* (1.12).

Отметим, что в отличие от стационарной задачи (1.3), для которой постоянная q_F, определяющая перепад давления, пропорциональна потоку F, в нестационарном случае функция $q(t)$ определяется как решение обратной задачи (1.11), (1.12). Поэтому в нестационарном случае постановка задачи с заданным перепадом давления $q(t)$ не эквивалентна постановке задачи с заданным потоком $F(t)$. При задании перепада давления решается прямая задача (1.11), решение $v(x',t)$ которой будет иметь ненулевой поток $Q(t) = \int\limits_{\omega} v(x',t)\,dx'$. Однако при задании потока $F(t)$ необходимо решать обратную задачу (1.11), (1.12).

Приведем еще один пример, когда начально-краевая задача для нестационарной системы Стокса сводится к обратной задаче типа (1.11), (1.12). Пусть $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 : x' \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x_3 < 1\}$ — бесконечный слой. Рассмотрим в $Q^T = \Pi \times (0,T)$ нестационарную систему Стокса

$$\begin{gathered} \mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad (x,t) \in \Pi \times (0,T), \\ \mathbf{u}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Pi \times (0,T), \quad \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{a}(x). \end{gathered} \tag{1.13}$$

Предположим, что $\mathbf{a}(x) = a(x_3)(x_1/|x'|^2, x_2/|x'|^2, 0)$. Решение, удовлетворяющее задаче (1.13) при $|x| > 1$ и имеющее заданный поток

$$\int\limits_{S_R} \mathbf{u}(x,t)\cdot\mathbf{n}\,dS = F(t),$$

где $S_R = \{x \in \Pi : |x'| = R,\ 0 < x_3 < 1\}$, определяется формулами

$$p_0(x,t) = -q(t)\ln|x'|, \quad \mathbf{u}_0(x,t) = v(x_3,t)\left(\frac{x_1}{|x'|^2}, \frac{x_2}{|x'|^2}, 0\right),$$

где $v(x_3,t)$ является решением обратной задачи

$$\begin{gathered} v_t(x_3,t) - \nu\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} v(x_3,t) = q(t), \quad (x_3,t) \in (0,1) \times (0,T), \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad v(x_3,0) = a(x_3), \\ 2\pi\int\limits_0^1 v(x_3,t)\,dx_3 = F(t). \end{gathered} \tag{1.14}$$

Легко видеть, что данные задачи (1.14) должны удовлетворять условию согласования

$$2\pi \int\limits_0^1 a(x_3)\,dx_3 = F(0).$$

Задача (1.14) является одномерным аналогом обратной задачи (1.11), (1.12). Отметим, что аналогичная (1.13) стационарная задача рассмотрена в [8–10].

Теория обратных задач для параболических уравнений исследовалась многими авторами (см. [11, 12], а также книгу [13] и цитируемую в ней литературу). Однако нам не удалось найти результата о разрешимости задачи (1.11), (1.12). Во всех упомянутых выше работах вместо (1.12) ставилось весовое условие

$$\int\limits_\omega \psi(x')v(x',t)\,dx' = F(t),$$

где $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\omega)$, и существенно использовался тот факт, что $\psi(x) = 0$ при $x \in \partial\omega$.

В данной статье доказывается, что при выполнении условий согласования для функций $a_3(x')$ и $F(t)$ задача (1.11), (1.12) однозначно разрешима в пространствах Гёльдера.

В § 2 вводятся используемые в работе функциональные пространства, строится приближенное решение $(v^{(N)}, q^{(N)})$ обратной задачи (1.11), (1.12) и выводятся интегральные уравнения для определения функций $q^{(N)}$. В § 3 получены равномерные по N оценки решений $q^{(N)}$ интегральных уравнений (2.7) в пространствах Гёльдера. В § 4 доказывается, что приближенные решения $(v^{(N)}, q^{(N)})$ стремятся при $N \to \infty$ к решению (v, q) обратной задачи (1.11), (1.12).

§ 2. Постановка задачи, функциональные пространства и построение приближенного решения

Пусть ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\Delta^T = (0,T)$, $Q^T = \omega \times \Delta^T$. Рассмотрим в Q^T следующую обратную задачу:

$$\begin{gathered} v_t(x,t) - \nu\Delta v(x,t) = q(t), \quad (x,t) \in Q^T, \\ v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\omega \times \Delta^T, \quad v(x,0) = a(x), \quad x \in \omega, \\ \int\limits_\omega v(x,t)\,dx = F(t) \quad \forall t \in \Delta^T, \quad \int\limits_\omega a(x)\,dx = F(0). \end{gathered} \tag{2.1}$$

Задачу (2.1) будем рассматривать в пространствах Гёльдера. Как обычно, через $C^{l+\delta}(\overline{\omega})$, где $l \ge 0$ целое, $\delta \in (0,1)$, обозначим пространство функций, непрерывных в $\overline{\omega}$ по Гёльдеру с показателем $\delta \in (0,1)$ вместе с производными до порядка l включительно. Норма в пространстве $C^{l+\delta}(\overline{\omega})$ определяется по формуле

$$\|u; C^{l+\delta}(\overline{\omega})\| = \sum_{|\alpha|=0}^{l} \sup_{x\in\overline{\omega}} \bigl|D_x^\alpha u(x)\bigr| + \sum_{|\alpha|=l} \sup_{x,y\in\overline{\omega}} \frac{\bigl|D_x^\alpha u(x) - D_y^\alpha u(y)\bigr|}{|x-y|^\delta}.$$

Аналогично определяется пространство $C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$.

Через $C^{2l+2\delta,l+\delta}(\overline{Q^T})$, где $\delta \in (0,1/2)$, обозначим пространство непрерывных функций, имеющих в $\overline{Q^T}$ непрерывные производные D_x^α по x до порядка $2l$, непрерывные производные D_t^r по t до порядка l и конечную норму

$$\|u; C^{2l+2\delta,l+\delta}(\overline{Q^T})\| = \sum_{|\alpha|=0}^{2l} \sup_{(x,t)\in\overline{Q^T}} \left|D_x^\alpha u(x,t)\right| + \sum_{r=0}^{l} \sup_{(x,t)\in\overline{Q^T}} \left|D_t^r u(x,t)\right| \\ + \sum_{|\alpha|=2l} \sup_{(x,t),(y,t)\in\overline{Q^T}} \frac{\left|D_x^\alpha u(x,t) - D_y^\alpha u(y,t)\right|}{|x-y|^{2\delta}} \\ + \sum_{r=l} \sup_{(x,t),(x,\tau)\in\overline{Q^T}} \frac{\left|D_t^r u(x,t) - D_\tau^r u(x,\tau)\right|}{|t-\tau|^{\delta}}.$$

Введем еще пространство функций $W_2^{1,1}(Q^T)$ с конечной нормой

$$\left\|u; W_2^{1,1}(Q^T)\right\| = \left(\int\limits_{Q^T} \left(|u_t(x,t)|^2 + |u(x,t)|^2 + |\nabla_x u(x,t)|^2\right) dxdt \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим задачу (2.1) при $a(x,t)=0$. Обозначим через $u_k(x)$ и λ_k собственные функции и собственные числа оператора Лапласа в пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)$:

$$-\nu\Delta u_k(x) = \lambda_k u_k(x),\ x\in\omega; \quad u_k = 0,\ x\in\partial\omega. \tag{2.2}$$

Собственные функции $u_k(x)$ будем считать ортонормированными в $L_2(\omega)$. Отметим, что $\lambda_k > 0$ и $\{\lambda_k\} \to \infty$ при $k\to\infty$.

Раскладывая единицу в ряд Фурье по функциям $u_k(x)$, получим

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k u_k(x),$$

где $\beta_k = \int\limits_\omega u_k(x)\,dx$, $k = 1,2,\dots$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 = |\omega|$. Приближенное решение $(v^{(N)}, q^{(N)})$ задачи (2.1) будем искать в виде

$$v^{(N)}(x,t) = \sum_{k=1}^{N} w_k^{(N)}(t) u_k(x), \tag{2.3}$$

а функцию $q^{(N)}(t)$ подберем так, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_\omega v^{(N)}(x,t)\,dx = F(t) \quad \forall t\in\Delta^T. \tag{2.4}$$

Подставляя выражение (2.3) в уравнение (2.1), находим, что

$$w_k^{(N)}(t) = \beta_k \int\limits_0^t \exp(-\lambda_k(t-\tau)) q^{(N)}(\tau)\,d\tau,$$

т. е.

$$v^{(N)}(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \left(\int\limits_0^t \exp(-\lambda_k(t-\tau)) q^{(N)}(\tau)\,d\tau \right) u_k(x), \tag{2.5}$$

и из условия (2.4) получаем равенство

$$\int_\Omega v^{(N)}(x,t)\,dx = \sum_{k=1}^N \beta_k \int_0^t \exp(-\lambda_k(t-\tau))q^{(N)}(\tau)\,d\tau \int_\Omega u_k(x)\,dx = F(t),$$

которое эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра первого рода для функции $q^{(N)}$:

$$\sum_{k=1}^N \beta_k^2 \int_0^t \exp(-\lambda_k(t-\tau))q^{(N)}(\tau)\,d\tau = F(t). \tag{2.6}$$

Предположим, что существует производная функции $F(t)$. Тогда, дифференцируя (2.6), выводим уравнение

$$q^{(N)}(t) - \frac{1}{\varkappa_N}\sum_{k=1}^N \beta_k^2\lambda_k \int_0^t \exp(-\lambda_k(t-\tau))q^{(N)}(\tau)\,d\tau = \varphi^{(N)}(t), \tag{2.7}$$

где $\varkappa_N = \sum\limits_{k=1}^N \beta_k^2$, $\varphi^{(N)}(t) = F'(t)/\varkappa_N$. Уравнение (2.7) является уравнением Вольтерра второго рода с ядром

$$K^{(N)}(t,\tau) = \varkappa_N^{-1}\sum_{k=1}^N \beta_k^2\lambda_k \exp(-\lambda_k(t-\tau)).$$

Разрешимость таких уравнений хорошо известна (см., например, [14]). Однако перейти к пределу при $N\to\infty$ непосредственно в уравнении (2.7) нельзя, поскольку ряд $\varkappa_\infty^{-1}\sum\limits_{k=1}^\infty \beta_k^2\lambda_k$, определяющий при $t=\tau$ предельное ядро $K^{(\infty)}(t,t)$, расходится.

Ниже будет доказано, что при выполнении условий согласования последовательность $\{(v^{(N)}(x,t), q^{(N)}(t))\}$ стремится при $N\to\infty$ по норме пространства $C^{2l+2\delta,l+\delta}(\overline{Q^T})\times C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$ к решению $(v(x,t),q(t))$ задачи (2.1).

§ 3. Равномерные по N оценки решения уравнения (2.7)

В данном параграфе для решения $q^{(N)}(t)$ интегрального уравнения (2.7) будут доказаны равномерные по N оценки в пространстве Гёльдера.

Сначала рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение

$$f^{(N)}(t) - \frac{1}{\varkappa_N}\sum_{k=2}^N \beta_k^2\lambda_k \int_0^t \exp(-\lambda_k(t-\tau))f^{(N)}(\tau)\,d\tau = g(t). \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Предположим, что $g\in C^\delta(\overline{\Delta}_T)$ и $g(0)=0$. Тогда существует единственное решение $f^{(N)}\in C^\delta(\overline{\Delta}_T)$ уравнения* (3.1). *При этом $f^{(N)}(0)=0$ и имеют место неравенства*

$$|f^{(N)}(t)| \le \frac{\varkappa_N}{\beta_1^2}\sup_{\tau\in\overline{\Delta^t}}|g(\tau)| \quad \forall t\in[0,T], \tag{3.2}$$

$$\|f^{(N)}; C^\delta(\overline{\Delta^T})\| \le 2\frac{\varkappa_N}{\beta_1^2}\|g; C^\delta(\overline{\Delta^T})\|, \tag{3.3}$$

где $\Delta^t = (0, t)$.

Доказательство. Положим

$$f_0^{(N)}(t) = g(t), \dots, f_n^{(N)}(t) = \frac{1}{\varkappa_N} \sum_{k=2}^{N} \beta_k^2 \lambda_k \int\limits_0^t \exp(-\lambda_k (t-\tau)) f_{n-1}^{(N)}(\tau)\, d\tau, \dots,$$

$$f^{(N)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(N)}(t). \tag{3.4}$$

Тогда

$$\left|f_0^{(N)}(t)\right| \le \sup_{\tau \in \overline{\Delta^t}} |g(\tau)|,$$

$$\left|f_1^{(N)}(t)\right| \le \frac{1}{\varkappa_N} \sup_{\tau \in \overline{\Delta^t}} |g(\tau)| \sum_{k=2}^{N} \beta_k^2 \lambda_k \int\limits_0^t \exp(-\lambda_k(t-\tau))\, d\tau$$
$$\le \frac{1}{\varkappa_N} \sup_{\tau \in \overline{\Delta^t}} |g(\tau)| \sum_{k=2}^{N} \beta_k^2 (1 - \exp(-\lambda_k t))$$
$$\le \frac{\gamma_N}{\varkappa_N} \sup_{\tau \in \overline{\Delta^t}} |g(\tau)|, \dots, \left|f_n^{(N)}(t)\right| \le \left(\frac{\gamma_N}{\varkappa_N}\right)^n \sup_{\tau \in \overline{\Delta^t}} |g(\tau)|, \dots,$$

где $\gamma_N = \sum\limits_{k=2}^{N} \beta_k^2 = \varkappa_N - \beta_1^2$.

Поскольку $\gamma_N/\varkappa_N < 1$, ряд (3.4), определяющий решение уравнения (3.1), сходится абсолютно и равномерно по $t \in [0, T]$. Кроме того, имеет место неравенство

$$|f^{(N)}(t)| \le \sup_{\tau \in \overline{\Delta^t}} |g(\tau)| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_N}{\varkappa_N}\right)^n = \frac{\varkappa_N}{\varkappa_N - \gamma_N} \sup_{\tau \in \overline{\Delta^t}} |g(\tau)| = \frac{\varkappa_N}{\beta_1^2} \sup_{\tau \in \overline{\Delta^t}} |g(\tau)|,$$

и из уравнения (3.1) следует, что $f^{(N)}(0) = 0$.

Оценим теперь норму Гёльдера функции $f^{(N)}$. Так как $f_{n-1}^{(N)}(0) = 0$, то

$$\left|f_n^{(N)}(t+h) - f_n^{(N)}(t)\right| = \left| \frac{1}{\varkappa_N} \sum_{k=2}^{N} \beta_k^2 \lambda_k \int\limits_0^{t+h} \exp(-\lambda_k(t+h-\tau)) f_{n-1}^{(N)}(\tau)\, d\tau \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\varkappa_N} \sum_{k=2}^{N} \beta_k^2 \lambda_k \int\limits_0^{t} \exp(-\lambda_k(t-\tau)) f_{n-1}^{(N)}(\tau)\, d\tau \right|$$
$$\le \frac{1}{\varkappa_N} \sum_{k=2}^{N} \beta_k^2 \lambda_k \int\limits_0^{t} \exp(-\lambda_k(t-\tau)) \left|f_{n-1}^{(N)}(\tau+h) - f_{n-1}^{(N)}(\tau)\right| d\tau$$
$$+ \frac{1}{\varkappa_N} \sum_{k=2}^{N} \beta_k^2 \lambda_k \int\limits_0^{h} \exp(-\lambda_k(t+h-\tau)) \left|f_{n-1}^{(N)}(\tau) - f_{n-1}^{(N)}(0)\right| d\tau, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Оценивая правые части этих неравенств, находим, что для любых $t, t+h \in [0, T]$ имеют место оценки

$$\left|f_0^{(N)}(t+h) - f_0^{(N)}(t)\right| = |g(t+h) - g(t)| \le h^\delta \|g; C^\delta(\overline{\Delta^T})\|,$$

$$\bigl|f_1^{(N)}(t+h)-f_1^{(N)}(t)\bigr|\le 2h^\delta\|g;C^\delta(\overline{\Delta^T})\|\frac{\gamma_N}{\varkappa_N},\dots,$$

$$\bigl|f_n^{(N)}(t+h)-f_n^{(N)}(t)\bigr|\le 2h^\delta\|g;C^\delta(\overline{\Delta^T})\|\left(\frac{\gamma_N}{\varkappa_N}\right)^n,\dots.$$

Поэтому

$$\bigl\|f_n^{(N)};C^\delta(\overline{\Delta^T})\bigr\|\le 2\|g;C^\delta(\overline{\Delta^T})\|\left(\frac{\gamma_N}{\varkappa_N}\right)^n$$

и, следовательно, для $f^{(N)}(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(N)}(t)$ справедлива оценка (3.3). Лемма доказана.

Определим теперь на пространстве $\widehat{C}^\delta(\overline{\Delta^T})=\{\Phi\in C^\delta(\overline{\Delta^T}):\Phi(0)=0\}$ оператор B_N по формуле

$$B_N\Phi(t)=\Phi(t)-\frac{1}{\varkappa_N}\sum_{k=2}^{N}\beta_k^2\lambda_k\int\limits_0^t\exp(-\lambda_k(t-\tau))\Phi(\tau)\,d\tau.$$

Из леммы 3.1 следует, что существует ограниченный обратный оператор $B_N^{-1}:\widehat{C}^\delta(\overline{\Delta^T})\to\widehat{C}^\delta(\overline{\Delta^T})$ и

$$\bigl\|B_N^{-1};\widehat{C}^\delta(\overline{\Delta^T})\to\widehat{C}^\delta(\overline{\Delta^T})\bigr\|\le 2\frac{\varkappa_N}{\beta_1^2}. \tag{3.5}$$

Кроме того,

$$\bigl|B_N^{-1}g(t)\bigr|\le\frac{\varkappa_N}{\beta_1^2}\sup_{\tau\in\overline{\Delta^t}}|g(\tau)|. \tag{3.6}$$

Рассмотрим полное уравнение (2.7), которое перепишем в виде

$$B_Nq^{(N)}(t)=\frac{1}{\varkappa_N}\beta_1^2\lambda_1\int\limits_0^t\exp(-\lambda_1(t-\tau))q^{(N)}(\tau)\,d\tau+\varphi^{(N)}(t). \tag{3.7}$$

Вводя обозначения $g^{(N)}=B_Nq^{(N)}$, $q^{(N)}=B_N^{-1}g_N$, из (3.7) получим интегральное уравнение

$$g^{(N)}(t)-\frac{1}{\varkappa_N}\beta_1^2\lambda_1\int\limits_0^t\exp(-\lambda_1(t-\tau))\bigl(B_N^{-1}g^{(N)}\bigr)(\tau)\,d\tau=\varphi^{(N)}(t). \tag{3.8}$$

Лемма 3.2. *Пусть $\varphi^{(N)}\in\widehat{C}^\delta(\overline{\Delta^T})$. Тогда существует единственное решение $g^{(N)}\in\widehat{C}^\delta(\overline{\Delta^T})$ уравнения (3.8) и имеют место неравенства*

$$|g^{(N)}(t)|\le\exp(\lambda_1t)\sup_{\tau\in\overline{\Delta^t}}|\varphi^{(N)}(\tau)|, \tag{3.9}$$

$$\|g^{(N)};C^\delta(\overline{\Delta^T})\|\le c\exp(2\lambda_1T)\|\varphi^{(N)};C^\delta(\overline{\Delta^T})\|. \tag{3.10}$$

Доказательство. Положим

$$g^{(N)}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^{(N)}(t), \tag{3.11}$$

где

$$g_0^{(N)}(t) = \varphi^{(N)}(t),$$

$$g_1^{(N)}(t) = \frac{1}{\varkappa_N}\beta_1^2\lambda_1 \int\limits_0^t \exp(-\lambda_1(t-\tau))\big(B_N^{-1}g_0^{(N)}\big)(\tau)\,d\tau, \dots,$$

$$g_{n+1}(t) = \frac{1}{\varkappa_N}\beta_1^2\lambda_1 \int\limits_0^t \exp(-\lambda_1(t-\tau))\big(B_N^{-1}g_n^{(N)}\big)(\tau)\,d\tau, \dots.$$

Используя (3.6), по индукции получаем

$$\big|g_1^{(N)}(t)\big| \le \frac{\varkappa_N}{\beta_1^2}\sup_{\tau\in\overline{\Delta^t}}|\varphi^{(N)}(\tau)|\frac{1}{\varkappa_N}\beta_1^2\lambda_1\int\limits_0^t \exp(-\lambda_1(t-\tau))\,d\tau \le \lambda_1 t\sup_{\tau\in\overline{\Delta^t}}|\varphi^{(N)}(\tau)|, \dots,$$

$$\big|g_{n+1}^{(N)}(t)\big| \le \frac{1}{\varkappa_N}\beta_1^2\lambda_1\int\limits_0^t \exp(-\lambda_1(t-\tau))\frac{\varkappa_N}{\beta_1^2}\sup_{s\in\overline{\Delta^\tau}}\big|g_n^{(N)}(s)\big|\,d\tau$$

$$\le \frac{\lambda_1^{n+1}}{n!}\sup_{\tau\in\overline{\Delta^t}}|\varphi^{(N)}(\tau)|\int\limits_0^t \tau^n\,d\tau = \frac{(\lambda_1 t)^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{\tau\in\overline{\Delta^t}}|\varphi^{(N)}(\tau)|, \dots.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big|g_n^{(N)}(t)\big| \le \sup_{\tau\in\overline{\Delta^t}}|\varphi^{(N)}(\tau)|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1 t)^n}{n!} = \exp(\lambda_1 t)\sup_{\tau\in\overline{\Delta^t}}|\varphi^{(N)}(\tau)|, \tag{3.12}$$

и, следовательно, ряд (3.11), определяющий решение интегрального уравнения (3.8), сходится абсолютно и равномерно на любом конечном интервале $[0,T]$. При этом

$$|g^{(N)}(t)| \le \exp(\lambda_1 t)\sup_{\tau\in\overline{\Delta^t}}|\varphi^{(N)}(\tau)| \le \exp(\lambda_1 T)\sup_{t\in\overline{\Delta^T}}|\varphi^{(N)}(t)|. \tag{3.13}$$

Используя оценку (3.5), легко показать, что для разности $|g^{(N)}(t+h)-g^{(N)}(t)|$ справедливо неравенство

$$|g^{(N)}(t+h)-g^{(N)}(t)| \le ch^\delta\exp(2\lambda_1 T)\|g^{(N)};\widehat{C}^\delta(\overline{\Delta^T})\| \quad \forall t, t+h\in[0,T].$$

Итак, $g^{(N)}\in\widehat{C}^\delta(\overline{\Delta^T})$, и имеет место оценка (3.10). Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть $\varphi^{(N)}\in\widehat{C}^\delta(\overline{\Delta^T})$. Тогда существует единственное решение $q^{(N)}\in\widehat{C}^\delta(\overline{\Delta^T})$ уравнения (2.7) и имеют место неравенства*

$$|q^{(N)}(t)| \le \frac{\varkappa_N}{\beta_1^2}\exp(\lambda_1 t)\sup_{\tau\in\overline{\Delta^t}}|\varphi^{(N)}(\tau)|, \tag{3.14}$$

$$\|q^{(N)};C^\delta(\overline{\Delta^T})\| \le c\exp(2\lambda_1 T)\|\varphi^{(N)};C^\delta(\overline{\Delta^T})\|. \tag{3.15}$$

Для доказательства леммы достаточно положить $q^{(N)} = B_N^{-1}g^{(N)}$ и воспользоваться оценками (3.5), (3.6), (3.9), (3.10).

Обозначим через $\widehat{C}^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$ подпространство функций из $C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$, удовлетворяющих условиям

$$h(0)=0, \quad \frac{d}{dt}h(0)=0, \dots, \frac{d^l}{dt^l}h(0)=0. \tag{3.16}$$

Лемма 3.4. *Пусть $\varphi^{(N)} \in \widehat{C}^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$, $l \geq 0$. Тогда существует единственное решение $q^{(N)} \in \widehat{C}^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$ уравнения (2.7) и имеют место неравенства*

$$\left|\frac{d^s}{dt^s}q^{(N)}(t)\right| \leq \frac{\varkappa_N}{\beta_1^2}\exp(\lambda_1 t)\sup_{\tau\in\overline{\Delta^t}}\left|\frac{d^s}{d\tau^s}\varphi^{(N)}(\tau)\right|, \quad s = 0,\dots,l, \tag{3.17}$$

$$\|q^{(N)}; C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\| \leq c\exp(2\lambda_1 T)\|\varphi^{(N)}; C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\|. \tag{3.18}$$

Доказательство. Продифференцировав уравнение (2.7), находим, что

$$q^{(N)\prime}(t) - \frac{1}{\varkappa_N}\sum_{k=1}^N \beta_k^2\lambda_k q^{(N)}(t) - \frac{1}{\varkappa_N}\sum_{k=1}^N \beta_k^2\lambda_k \int\limits_0^t \frac{d}{dt}(\exp(-\lambda_k(t-\tau)))q^{(N)}(\tau)\,d\tau$$
$$= \varphi^{(N)\prime}(t).$$

Интегрируя по частям в третьем слагаемом и используя условие $q^{(N)}(0) = 0$, преобразуем это уравнение к виду

$$q^{(N)\prime}(t) - \frac{1}{\varkappa_N}\sum_{k=1}^N \beta_k^2\lambda_k \int\limits_0^t \exp(-\lambda_k(t-\tau))q^{(N)\prime}(\tau)\,d\tau = \varphi^{(N)\prime}(t).$$

Таким образом, для $q^{(N)\prime}$ получаем уравнение, аналогичное уравнению (2.7). Так как $\varphi^{(N)} \in \widehat{C}^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$, т. е. $\frac{d^s}{dt^s}\varphi^{(N)}(0) = 0$, $s = 0,\dots,l$, производная $\frac{d^s}{dt^s}q^{(N)}$, $s = 1,\dots,l$, удовлетворяет уравнению (2.7) с правой частью, равной $\frac{d^s}{dt^s}\varphi^{(N)}$. Поэтому из леммы 3.3 вытекает, что $q^{(N)} \in \widehat{C}^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$, и в силу (3.14), (3.15) справедливы оценки (3.17), (3.18). Лемма доказана.

§ 4. Существование решения задачи (2.1)

Докажем сначала, что последовательность $q^{(N)}$ сходится по норме пространства $C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$.

Лемма 4.1. *Предположим, что $F \in \widehat{C}^{l+1+\delta}(\overline{\Delta^T})$, $l \geq 0$, $\delta \in (0,1)$. Тогда последовательность $q^{(N)}$ сходится по норме пространства $C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$ и для предельной функции $q \in \widehat{C}^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$ имеют место неравенства*

$$\left|\frac{d^s}{dt^s}q(t)\right| \leq \frac{|\omega|}{\beta_1^2}\exp(\lambda_1 t)\sup_{\tau\in\overline{\Delta^t}}\left|\frac{d^{s+1}}{d\tau^{s+1}}F(\tau)\right|, \quad s = 0,\dots,l, \tag{4.1}$$

$$\|q; C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\| \leq c\exp(2\lambda_1 T)\|F; C^{l+1+\delta}(\overline{\Delta^T})\|. \tag{4.2}$$

Доказательство. Легко видеть, что разность $\mathscr{Q}^{(N,M)}(t) = q^{(N+M)}(t) - q^{(N)}(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\mathscr{Q}^{(N,M)}(t) - \frac{1}{\varkappa_N}\sum_{k=1}^N \beta_k^2\lambda_k \int\limits_0^t \exp(-\lambda_k(t-\tau))\mathscr{Q}^{(N,M)}(\tau)\,d\tau$$
$$= \left(\frac{1}{\varkappa_{N+M}} - \frac{1}{\varkappa_N}\right)\sum_{k=1}^N \beta_k^2\lambda_k \int\limits_0^t \exp(-\lambda_k(t-\tau))q^{(N+M)}(\tau)\,d\tau$$

$$+\frac{1}{\varkappa_{N+M}}\sum_{k=N+1}^{N+M}\beta_k^2\lambda_k\int\limits_0^t \exp(-\lambda_k(t-\tau))q^{(N+M)}(\tau)\,d\tau$$
$$+(\varphi^{(N+M)}(t)-\varphi^{(N)}(t))\equiv I_1^{(N,M)}(t)+I_2^{(N,M)}(t)+I_3^{(N,M)}(t).$$

Так как

$$\lim_{N\to\infty}\varkappa_N=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2=|\omega|,\quad \varphi^{(N)}(t)=F'(t)/\varkappa_N,$$

используя (3.18), находим, что

$$\big\|I_1^{(N,M)};C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\big\|\le c\bigg|\frac{1}{\varkappa_{N+M}}-\frac{1}{\varkappa_N}\bigg|\sum_{k=1}^{N}\beta_k^2\|q^{(N+M)};C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\|$$
$$\le c\bigg|\frac{1}{\varkappa_{N+M}}-\frac{1}{\varkappa_N}\bigg|\sum_{k=1}^{N}\beta_k^2\exp(2\lambda_1T)\|\varphi^{(N+M)};C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\|$$
$$\le c\bigg|\frac{1}{\varkappa_{N+M}}-\frac{1}{\varkappa_N}\bigg|\exp(2\lambda_1T)\|F';C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\|\to 0,$$

$$\big\|I_2^{(N,M)};C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\big\|\le\frac{c}{\varkappa_{N+M}}\exp(2\lambda_1T)\|F';C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\|\sum_{k=N+1}^{N+M}\beta_k^2\to 0,$$

$$\big\|I_3^{(N,M)};C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\big\|=\bigg|\frac{1}{\varkappa_{N+M}}-\frac{1}{\varkappa_N}\bigg|\|F';C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\|\to 0$$

при $N,M\to\infty$. Поскольку функция $\mathscr{Q}^{(N,M)}$ является решением интегрального уравнения (2.7), в силу леммы 3.4 (см. оценку (3.18)) справедливо соотношение

$$\|\mathscr{Q}^{(N,M)};C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\|\le 2\frac{\varkappa_N}{\beta_1^2}\exp(2\lambda_1T)\big\|\big(I_1^{(N,M)}+I_2^{(N,M)}+I_3^{(N,M)}\big);C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\big\|\to 0$$

при $N,M\to\infty$. Таким образом, последовательность $\{q^N\}$ фундаментальна в пространстве $\widehat{C}^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$, и, следовательно, существует предельная функция $q\in\widehat{C}^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$. Оценки (4.1), (4.2) для q вытекают из аналогичных оценок для функций q^N. Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Предположим, что $\partial\omega\in C^{2l+2+2\delta}$. Пусть $F\in C^{l+1+\delta}(\overline{\Delta}_T)$, $a\in C^{2l+2+2\delta}(\overline{\omega})$, $l\ge 0$, $\delta\in(0,1/2)$, и пусть выполнены условия согласования порядка $l+1$:*

$$(\Delta^m a(x))|_{\partial\omega}=0,\quad \frac{d^m}{dt^m}F(0)=\int\limits_{\omega}\Delta^m a(x)dx,\quad m=0,\dots,l+1. \tag{4.3}$$

Тогда при любом $T>0$ существует единственное решение

$$(v,q)\in C^{2l+2+2\delta,l+1+\delta}(\overline{Q^T})\times\widehat{C}^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$$

задачи (2.1) и имеет место оценка

$$\|v;C^{2l+2+2\delta,l+1+\delta}(\overline{Q^T})\|+\|q;C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\|\le c(T)\|F;C^{l+1+\delta}(\overline{\Delta^T})\|. \tag{4.4}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $a(x)\equiv 0$. Предположим, что $F\in\widehat{C}^{l+1+\delta}(\overline{\Delta}_T)$. По построению функции

$$v^{(N)}(x,t)=\sum_{k=1}^{N}\beta_k\left(\int\limits_0^t\exp(-\lambda_k(t-\tau))q^{(N)}(\tau)\,d\tau\right)u_k(x)$$

являются решениями начально-краевых задач

$$\begin{gathered} v_t^{(N)}(x,t) - \nu\Delta v^{(N)}(x,t) = f^{(N)}(x,t), \quad (x,t) \in Q^T, \\ v^{(N)}(x,t) = 0, \ (x,t) \in \partial\omega \times \Delta^T, \quad v^{(N)}(x,0) = 0, \ x \in \omega, \end{gathered} \tag{4.5}$$

где $f^{(N)}(x,t) = q^{(N)}(t) \sum\limits_{k=1}^{N} \beta_k u_k(x)$. Поэтому (см., например, [15, 16]) имеет место оценка

$$\left\| v^{(N)}; W_2^{1,1}(Q^T) \right\| \le c \| f^{(N)}(x,t); L_2(Q^T) \|, \tag{4.6}$$

причем постоянная c не зависит от N. Используя лемму 4.1, легко показать, что последовательность

$$\{f^{(N)}(x,t)\} = \left\{ q^{(N)}(t) \sum_{k=1}^{N} \beta_k u_k(x) \right\}$$

стремится по норме пространства $L_2(Q^T)$ к функции $q(t)$. В силу линейности задачи (4.5) разность $V^{(N,M)}(x,t) = v^{(N+M)}(x,t) - v^{(N)}(x,t)$ будет решением аналогичной задачи с правой частью $f^{(N+M)}(x,t) - f^{(N)}(x,t)$. Из оценки (4.6) заключаем, что последовательность $v^{(N)}$ фундаментальна в пространстве $W_2^{1,1}(Q^T)$ и, следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} v^{(N)} = v \in W_2^{1,1}(Q^T),$$

являющийся обобщенным решением задачи

$$\begin{gathered} v_t(x,t) - \nu\Delta v(x,t) = q(t), \quad (x,t) \in Q^T, \\ v(x,t) = 0, \ x \in \partial\omega \times \Delta^T, \quad v(x,0) = 0, \ x \in \omega. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Правая часть $q \in C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$ уравнения (4.7) зависит лишь от t. Поэтому $q \in C^{2l+2\delta,l+\delta}(\overline{Q^T})$ и

$$\|q; C^{2l+2\delta,l+\delta}(\overline{Q^T})\| \le c\|q; C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\|.$$

Кроме того, $q(t)$ удовлетворяет условиям согласования

$$q(0) = \dots = \frac{d^l}{dt^l} q(0) = 0.$$

Следовательно (см. [15, 16]), $v \in C^{2l+2+2\delta,l+1+\delta}(\overline{Q^T})$, и имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|v; C^{2l+2+2\delta,l+1+\delta}(\overline{Q^T})\| &\le c\|q; C^{2l+2\delta,l+\delta}(\overline{Q^T})\| \\ &\le c\|q; C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\| \le c\exp(2\lambda_1 T)\|F; C^{l+1+\delta}(\overline{\Delta^T})\|. \end{aligned}$$

По построению для всех N функции $v^{(N)}$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_{\omega} v^{(N)}(x)dx = F(t) \quad \forall t \in [0,T],$$

которое сохранится и для предельной функции v. Таким образом, (v,q) является решением обратной задачи (2.1) при $a(x) \equiv 0$, и справедлива оценка (4.4).

Рассмотрим теперь случай произвольного $a \in C^{l+2+\delta}(\overline{\omega})$. Решение задачи (2.1) будем искать в виде суммы $(v(x),q(t)) = (v_1(x),0) + (v_2(x),q(t))$, где v_1 — решение начально-краевой задачи

$$\begin{gathered} v_{1t}(x,t) - \nu\Delta v_1(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q^T, \\ v_1(x,t) = 0, \ (x,t) \in \partial\omega \times \Delta^T, \quad v_1(x,0) = a(x), \ x \in \omega. \end{gathered} \tag{4.8}$$

Поскольку $a(x)$ удовлетворяет условиям согласования порядка $l+1$ (см. (4.3)), существует единственное решение v_1 задачи (4.8), для которого справедлива оценка (см. [15, 16])

$$\|v_1; C^{2l+2+2\delta, l+1+\delta}(\overline{Q^T})\| \le c\|a; C^{2l+2+2\delta}(\overline{\omega})\|. \tag{4.9}$$

Для $(v_2(x), q(t))$ получаем обратную задачу

$$\begin{gathered} v_{2t}(x,t) - \nu\Delta v_2(x,t) = q(t), \quad (x,t) \in Q^T, \\ v_2(x,t) = 0, \ x \in \partial\omega \times \Delta^T, \quad v_1(x,0) = 0, \ x \in \omega, \\ \int\limits_{\omega} v_2(x) dx = F(t) - \int\limits_{\omega} v_1(x,t) dx := \widetilde{F}(t). \end{gathered} \tag{4.10}$$

В силу вторых равенств в условиях согласования (4.3) видим, что

$$\frac{d^m}{dt^m}\widetilde{F}(0) = 0, \quad m = 0, \dots, l+1.$$

Кроме того, $\widetilde{F} \in \widehat{C}^{l+1+\delta}(\overline{\Delta^T})$ и

$$\begin{aligned} \|\widetilde{F}; \widehat{C}^{l+1+\delta}(\overline{\Delta^T})\| &\le c(\|F; \widehat{C}^{l+1+\delta}(\overline{\Delta^T})\| + \|v_1; C^{2l+2+2\delta, l+1+\delta}(\overline{Q^T})\|) \\ &\le c(\|F; \widehat{C}^{l+1+\delta}(\overline{\Delta^T})\| + \|a; C^{2l+2+2\delta}(\overline{\omega})\|). \end{aligned}$$

По доказанному существует решение $(v_2, q) \in C^{2l+2+2\delta, l+1+\delta}(\overline{Q^T}) \times \widehat{C}^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})$ задачи (4.10), удовлетворяющее неравенству

$$\begin{aligned} \|v_2; C^{2l+2+2\delta, l+1+\delta}(\overline{Q^T})\| + \|q; C^{l+\delta}(\overline{\Delta^T})\| &\le c(T)\|\widetilde{F}; C^{l+1+\delta}(\overline{\Delta^T})\| \\ &\le c(T)(\|F; \widehat{C}^{l+1+\delta}(\overline{\Delta^T})\| + \|a; C^{2l+2+2\delta}(\overline{\omega})\|). \end{aligned}$$

Таким образом, $(v(x), q(t))$, где $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$, является решением задачи (2.1), и для него справедлива оценка (4.4).

Докажем единственность решения. Пусть $F(t) \equiv 0, a(x) \equiv 0$. Умножим уравнение (2.1) на v и проинтегрируем по частям в ω:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega} |v(x,t)|^2\, dx + \nu\int\limits_{\omega} |\nabla v(x,t)|^2\, dx = q(t)\int\limits_{\omega} v(x,t) dx = 0.$$

Интегрируя последнее равенство по t, получим, что

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\omega} |v(x,t)|^2\, dx + \nu\int\limits_0^t\int\limits_{\omega} |\nabla v(x,\tau)|^2\, dx d\tau = 0.$$

Следовательно, $v(x,t) = 0$, и из уравнения (2.1) находим, что $q(t) = 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Solonnikov V. A.* Stokes and Navier–Stokes equations in domains with noncompact boundaries // Nonlinear partial differential equations and their applications. Pitmann Notes in Math. College de France Seminar. 1983. V. 3. P. 210–349.
2. *Солонников В. А.* О задачах гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости в областях с некомпактными границами // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, № 6. С. 28–53.

3. *Pileckas K.* Recent advances in the theory of Stokes and Navier–Stokes equations in domains with noncompact boundaries // Nonlinear partial differential equations and their applications. Pitmann Notes in Math. College de France Seminar. 1996. V. 304. P. 30–85.
4. *Amick C. J.* Steady solutions of the Navier–Stokes equations in unbounded channels and pipes // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1977. V. 4. P. 473–513.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* О нахождении решений краевых задач для стационарных уравнений Стокса и Навье — Стокса, имеющих неограниченный интеграл Дирихле // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1980. Т. 96. С. 117–160.
6. *Pileckas K.* Strong solutions of the steady nonlinear Navier–Stokes system in domains with exits to infinity // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. 1997. V. 97. P. 72–107.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
8. *Nazarov S. A., Pileckas K.* The asymptotic properties of the solutions to the Stokes problem in domains that are layer-like at infinity // J. Math. Fluid Mech. 1999. V. 1, N 2. P. 131–167.
9. *Nazarov S. A., Pileckas K.* On the Fredholm property of the Stokes operator in a layer-like domain // Z. Anal. Anwendungen. 2001. V. 20, N 1. P. 155–182.
10. *Пилецкас К.* Об асимптотике решений стационарной системы уравнений Навье — Стокса в области типа слоя // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 12. С. 69–104.
11. *Орловский Д. Г.* Слабые и сильные решения обратных задач для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 5. С. 867–874.
12. *Орловский Д. Г.* О разрешимости одной задачи для параболического уравнения в классе Гёльдера // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 3. С. 107–112.
13. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York; Basel: Marsel Dekker, 1999.
14. *Михлин С. Г.* Интегральные уравнения. М.: Гостехиздат, 1947.
15. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
16. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. МИАН. 1965. Т. 83. С. 1–162.

Статья поступила 3 сентября 2004 г.

Пилецкас Константин, Кебликас Вайдас
Институт математики и информатики,
Академиёс, 4, Вильнюс 08663, Литва
pileckas@ktl.mii.lt, fifas@one.lt