Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 515.125+517.550.2

РИМАНОВА СТРУКТУРА ОБЛАСТЕЙ ДЖОНА И РАВНОМЕРНЫХ ОБЛАСТЕЙ ИЗ $\mathbb{R}^n$

А. П. Кармазин

Аннотация: С помощью методов теории предконцов изучаются граничные и метрические свойства областей Джона и равномерных областей евклидова n-пространства. Получены результаты о метрической римановой структуре этих классов областей. Показано, что семейство областей Джона замкнуто в классе квазиизометрических относительно внутренней метрики Римана гомеоморфизмов, а семейство равномерных областей замкнуто в классе билипшицевых отображений.

Ключевые слова: области Джона, равномерные области, внутренние метрики, квазиизометрия, билипшицево отображение.

Введение

В работе методами теории предконцов (см. [1–5]) изучаются граничные и метрические свойства областей Джона и равномерных областей евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Области Джона определены в [6], равномерные области рассмотрены в [7, 8], внутренне равномерные области — в [9]. Классы этих областей широко используются при изучении различных вопросов. В недавней работе [10], например, показано, что если область D из $\mathbb{R}^n$ внутренне равномерна или равномерна, то метрическое пространство (D, k_D), где k_D — квазигиперболическое расстояние в D, является гиперболическим по М. Громову метрическим пространством. В работах Ю. Г. Решетняка (см. [11]) области Джона использовались при изучении вопросов устойчивости отображений с ограниченным искажением. Некоторые результаты о строении областей Джона получены в [12, 13]. В [14] С. К. Водопьяновым установлены условия продолжения отображений класса $L^1_p(D)$ плоских областей, эквивалентные условиям равномерности этих областей.

Таким образом, вопрос об изучении строения областей Джона и различного типа равномерных областей из $\mathbb{R}^n$ и поведение отображений различных классов на них представляют несомненный интерес. Условия, накладываемые на области Джона, и условия равномерности областей из $\mathbb{R}^n$ тесно связаны с тем свойством, что любую конечную точку евклидовой границы ∂D области Джона или равномерной области D из $\mathbb{R}^n$ можно достичь некоторой спрямляемой кривой, лежащей в области D. Это означает, что внутренняя метрика Римана — А. Д. Александрова ρ_D оказывается задействованной при определении этих классов областей и свойства областей этих классов тесно связаны со свойствами их метрической римановой структуры. Целью настоящей работы является изучение римановой структуры областей Джона и равномерных областей из $\mathbb{R}^n$. Точнее, будем исследовать строение метрического пространства (D, ρ_D), где D — гомеоморфная шару область Джона или равномерная область в $\mathbb{R}^n$. В основном рассмотрим строение различных граничных элементов таких областей D, построенных с помощью метрики ρ_D, а также их поведение при ρ-квазиизометриях этих областей. Покажем, что любая область Джона предкомпактна по множеству своих простых ρ-предконцов и, более того, по множеству граничных элементов ее пополнения по метрике ρ_D, R-достижима и, в частности, конечно связна на границе, не может иметь нулевых внутренних углов и обладает еще одним свойством: она ρ-однородна на границе. Любая равномерная область, кроме того, еще сильно R-достижима, в частности, и локально связна на границе. (Все перечисленные выше понятия даны в [5] и приведены далее в работе.) В заключение покажем, что семейство областей Джона замкнуто относительно класса ρ-квазиизометрических гомеоморфизмов, а семейство равномерных областей переходит в точно такое же семейство при любом билипшицевом отображении. Кроме того, установим, что ρ-квазиизометрия между двумя равномерными областями из $\mathbb{R}^n$ обязательно является билипшицевым отображением в евклидовой метрике.

§ 1. Обозначения, основные понятия и определения

1.1. Обозначения, терминология. Пусть $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — евклидово n-мерное пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $d(x,y) = |x-y|$ — евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$. Для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ пусть $d(A)$ — евклидов диаметр A, $\overline{A}$ — замыкание A в $\mathbb{R}^n$, ∂A — евклидова граница A. Пусть $B^n(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n, |x-y| < r\}$, $B^n(r) = B^n(0,r)$, $B^n = B^n(1)$, $S^{n-1}(b,r) = \partial B^n(b,r)$, $S^{n-1} = S^{n-1}(0,1)$. Под областью $D \subset \mathbb{R}^n$ всюду далее понимается гомеоморфный образ шара B^n в $\mathbb{R}^n$. Для точек $x, y \in D$ величина

$$\delta_D(x,y) = \inf\{d(F), x, y \in F\},$$

где инфимум берется по всем связным множествам $F \subset D$, содержащим точки x, y, называется *внутренней метрикой Мазуркевича* области D. Пусть $\partial_D A = \partial A \cap D$, где $A \subset D$. Обозначим $V_D^\delta(x,\alpha) = \{y \in D, \delta_D(x,y) < \alpha\}$; если $A \subset D$, положим $V_D^\delta(A,\alpha) = \bigcup\limits_{x \in A} V_D^\delta(x,\alpha)$.

Путем или *кривой* в D называется непрерывное отображение $\gamma : \Delta \to D$ отрезка $\Delta \subset \mathbb{R}^1$; всюду далее Δ есть либо полуинтервал $[0, 1)$, либо некоторый сегмент $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$. Через $C(\gamma, 1)$ обозначим предельное множество пути $\gamma : [0,1) \to D$ в точке 1; $\bar{\gamma} = \gamma([0,1))$ — траектория пути γ. Через $\lambda(\gamma)$ будем обозначать евклидову длину кривой γ. Будем говорить, что кривая $\gamma : [a,b) \to D$ *локально спрямляема*, если любая ее поддуга $\gamma[t,t']$, $[t,t'] \subset [a,b)$, спрямляема.

Для точек $x, y \in D$ величина

$$\rho_D(x,y) = \inf\{\lambda(\gamma),\, x, y \in \gamma\},$$

где инфимум берется по всем спрямляемым кривым γ из D, соединяющим точки x, y, называется *внутренней метрикой Римана — А. Д. Александрова* области D. Через $V_D^\rho(x,\alpha)$, $V_D^\rho(A,\alpha)$ соответственно обозначим α-окрестность точки x и α-окрестность множества A в метрике ρ_D. Очевидно, для любых точек $x, y \in D$

$$d(x,y) \leq \delta_D(x,y) \leq \rho_D(x,y). \tag{1}$$

Через $[D]_\rho$ обозначим пополнение области D по метрике ρ_D, причем под $[D]_\rho$ будем понимать только множество граничных элементов пополнения $[D]_\rho$.

1.2. Условия равномерности областей $\mathbb{R}^n$. Следуя [10], область $D \subset \mathbb{R}^n$ назовем *a-равномерной*, $a \in (0,1]$, если для любых точек $x, y \in D$ существует кривая γ в D, соединяющая точки x, y, такая, что

1) $\frac{|x-y|}{\lambda(\gamma)} \geq a$;

2) $\frac{d(z,\partial D)}{\min\{\lambda(\gamma(x,z)),\lambda(\gamma(z,y))\}} \geq a \ \forall z \in \gamma$.

Если в условии 1) евклидову метрику заменить метрикой $\rho_D(x,y)$, получим понятие *внутренне равномерной области.*

Исходя из [6], область $D \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *областью Джона*, если существуют отмеченная точка $w \in D$ и числа $L < \infty$ и $a \in (0,1]$ такие, что для всякой точки $x \in \overline{D}$ в $\overline{D}$ существует спрямляемая кривая $\gamma(s) : [0,\lambda] \to \overline{D}$ (s — параметр длины дуги), где $\lambda = \lambda(\gamma) \leq L$, для которой $\gamma(0) = x$, $\gamma(\lambda) = w$, $\gamma((0,\lambda]) \subset D$ и для всех $s \in (0,\lambda]$ выполняется неравенство

3) $\frac{d(\gamma(s),\partial D)}{s} \geq a$.

В [9, 15] внутренне равномерные области называются равномерными по Джону. Понятие области Джона, приведенное выше, являются модификацией определения из [12]; условие Джона 3) здесь унифицировано с условием 2) равномерности области, причем эта модификация позволяет распространить условие Джона 3) для точек евклидовой границы ∂D области Джона D.

1.3. Классы ρ-квазиизометрических и билипшицевых гомеоморфизмов. Гомеоморфизм $f : D \to G$ областей D, G из $\mathbb{R}^n$ называется *ρ-квазиизометрией*, если существует константа $K \in [1,\infty)$ такая, что для любых точек $x, y \in D$ выполнено соотношение

$$\frac{1}{K}\rho_D(x,y) \leq \rho_G(f(x),f(y)) \leq K\rho_D(x,y).$$

Если

$$\frac{1}{K}|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$$

для любых $x, y \in D$, то будем говорить, что f является *билипшицевым гомеоморфизмом* области D на область G. В [16] показано, что класс ρ-квазиизометрий областей $\mathbb{R}^n$ совпадает с классом локально билипшицевых гомеоморфизмов. В частности, отсюда следует, что класс билипшицевых гомеоморфизмов является строгим подклассом ρ-квазиизометрических гомеоморфизмов.

1.4. Предконцы области D. Свойства предконцов, построенных по схеме Каратеодори с помощью различных внутренних метрик области, рассмотрены в [1–5].

Последовательность $\{V_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, связных открытых подмножеств области D из $\mathbb{R}^n$ назовем *ρ-предцепью*, если для всех $m = 1, 2, \ldots$

1) $V_{m+1} \subset V_m$;

2) $\rho_D(\partial_D V_m, \partial_D V_{m+1}) > 0$.

Будем говорить, что ρ-предцепь $\{V_m\}$ *входит* в ρ-предцепь $\{W_k\}$, если для любого k найдется индекс $m(k)$ такой, что $V_m \subset W_k$ при $m \geq m(k)$. Две ρ-предцепи *эквивалентны*, если они входят друг в друга. Всякий класс эквивалентных ρ-предцепей области D назовем *ρ-предконцом* D, $V^\rho[D]$ — множество всех ρ-предконцов D. Будем говорить, что ρ-предконец V *входит* в ρ-предконец W, если любая ρ-предцепь элемента V входит в каждую ρ-предцепь элемента

W. Элементы $V, W \in V^\rho[D]$ *сравнимы* и $V \leq W$, если V входит в W. Минимальные элементы $V^\rho[D]$ назовем *простыми ρ-предконцами* D, $V_0^\rho[D]$ — множество простых ρ-предконцов области D. Множество

$$I(V) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{V}_m, \quad \{V_m\} \in V,$$

называется *носителем* ρ-предконца V.

Заменив в этом определении в условии 2) метрику ρ_D метрикой δ_D, получим понятия δ-предконца и простого δ-предконца области D. Соответствующие множества этих граничных элементов области D обозначим через $V^\delta[D]$ и $V_0^\delta[D]$.

Кривую $\gamma : [0,1) \to D$ назовем *образующей кривой* ρ-предконца V, если ρ-предконец $V(\gamma)$, представителем которого является ρ-предцепь

$$\big\{V_m = V_D^\rho(\gamma[t_m,1), \varepsilon_m)\big\}, \quad t_m \to 1,\ \varepsilon_m \to 0,\ m \to \infty,$$

совпадает с V. В силу [5, 3.1.7] любая кривая из D, сходящаяся к элементу $U \in V_0^\rho[D]$, является образующей для U. Будем говорить, что простой ρ-предконец U *принадлежит множеству* $RV_0^\rho[D]$ R-достижимых простых ρ-предконцов области D, если существует спрямляемая образующая кривая элемента U, оканчивающаяся в некоторой точке $b \in \partial D$. При этом любая последовательность точек из D, сходящаяся к U, содержит подпоследовательность, фундаментальную по метрике ρ_D. Верно и обратное: фундаментальная по метрике ρ_D последовательность точек из D сходится к некоторому элементу $U \in RV_0^\rho[D]$. Таким образом, между множествами $U \in RV_0^\rho[D]$ и $[D]_\rho$ существует естественное взаимно однозначное соответствие, причем носители соответствующих друг другу элементов этих множеств совпадают и состоят из единственной точки ∂D.

Говорим, что последовательность точек $\{x_m\}$ из D *сходится к ρ-предконцу* V, если для любой ρ-предцепи $\{V_k\} \in V$ и для каждого k существует $m(k)$ такое, что $x_m \in V_k$ при $m \geq m(k)$. Аналогично кривая $\gamma : [0,1) \to D$ *сходится* к V, если для любого k найдется $t(k) \in [0,1)$ такое, что $\gamma[t(k),1) \subset V_k$.

Понятие ρ-предконца тесно связано с понятием ρ-конца области $D \subset \mathbb{R}^n$ (см. определение понятия ρ-конца, например, в [5, с. 33]). Любой ρ-конец области D является одновременно ее ρ-предконцом; обратное в общем случае неверно. Существуют примеры пространственных областей, обладающих простыми ρ-концами, содержащими континуум простых ρ-предконцов этой области. Заметим, что в случае плоской области D любой ее простой ρ-конец совпадает с известным всем простым концом этой области по Каратеодори; любой простой конец P этой области D содержит в точности один ее простой ρ-предконец $U(P)$, и если, например, P является простым концом второго или четвертого типа по Каратеодори, то $U(P)$ не совпадает с P.

1.5. Факторизация множества предконцов по их общему цоколю. Факторизуем множество $V^\rho[D]$ следующим образом. Пусть $V \in V^\rho[D]$. Множество $\big\{U \in V_0^\rho[D],\, U \leq V\big\}$ назовем *цоколем ρ-предконца* V. Будем говорить, что ρ-предконцы V, W области D *эквивалентны*, если их цоколи совпадают. Соответствующее фактор-пространство обозначим через $\Phi^\rho[D]$. Элементы $\varphi, \psi \in \Phi^\rho[D]$ *сравнимы* и $\varphi \leq \psi$, если для любого $W \in \psi$ существует $V \in \varphi$ такой, что $V \leq W$ в $V^\rho[D]$. Множество минимальных элементов $\Phi^\rho[D]$ обозначим через $\Phi_0^\rho[D]$. Цоколь элемента $\varphi \in \Phi^\rho[D]$ назовем *общим цоколем* любого представителя $V \in \varphi$. Последовательность точек из D *сходится к элементу* $\varphi \in \Phi^\rho[D]$, если она сходится к некоторому представителю $V \in \varphi$. Свойства элементов $\Phi^\rho[D]$ и $\Phi_0^\rho[D]$ и их поведение при ρ-квазиизометриях подробно рассмотрены в [4, 5].

1.6. Понятие ρ-однородности области на границе. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $V \in V_0^\delta[D]$ и точка b принадлежит $I(V)$. Будем говорить, что D *ρ-однородна в точке b относительно элемента V*, если $\rho_D(\bar\alpha, \bar\beta) = 0$, каковы бы ни были пути $\alpha, \beta : [0,1) \to D$, сходящиеся к V. Отметим, что при этом всегда $C(\alpha, 1) = C(\beta, 1) = I(V)$ и точка b является предельной одновременно для обоих путей α и β. В противном случае говорим, что D *ρ-неоднородна в точке b относительно элемента V*.

Очевидно, любая плоская односвязная область D ρ-однородна относительно каждого элемента V из $V_0^\delta[D]$ в любой точке $b \in I(V)$. Однако даже жорданова область $D \subset \mathbb{R}^3$ может не обладать этим свойством. Примером является область с нулевым «пиком гармошкой» в точке $b \in \partial D$ из [17].

§ 2. Риманова структура областей Джона

2.1. В данном пункте приведены первоначальные свойства областей Джона.

Теорема 1. *Любая область Джона из $\mathbb{R}^n$, гомеоморфная шару, ограничена в $\mathbb{R}^n$ и предкомпактна по множеству своих простых ρ-предконцов.*

Доказательство. Ограниченность области Джона непосредственно следует из определения. Пусть область D из $\mathbb{R}^n$ гомеоморфна шару и является областью Джона. Покажем, что D предкомпактна по множеству $V_0^\rho[D]$.

Пусть w — отмеченная точка области D, и предположим, что D не предкомпактна по $V_0^\rho[D]$. Это означает, что найдется последовательность точек $\{x_m\}$ из D, не сходящаяся вместе с любой своей подпоследовательностью ни к какому элементу $V_0^\rho[D]$. Очевидно, что при этом все предельные точки последовательности $\{x_m\}$ (в евклидовой топологии) лежат на множестве ∂D.

Так как D предкомпактна в пространстве $D \cup \Phi_0^\rho[D]$ (см. [5, теорема 4, с. 162]), найдутся элемент $\varphi \in \Phi_0^\rho[D]$ и подпоследовательность из $\{x_m\}$, сходящаяся к φ. Будем далее предполагать, что сама $\{x_m\}$ сходится к φ. Условие принадлежности φ к $\Phi_0^\rho[D]$ дает, что цоколь φ состоит из единственного элемента $U \in V_0^\rho[D]$. Пусть $\gamma : [0,1) \to D$ есть кривая из D со следующими свойствами: $\gamma(0) = w$, $\gamma(t)$ сходится к U при $t \to 1$ и $\lambda(\gamma[0,t]) < \infty$ $\forall t \in [0,1)$. Очевидно, такая кривая γ в области D всегда найдется. Из сходимости $\gamma(t)$ к простому ρ-предконцу U следует, что γ является образующей кривой элемента U (см. п. 1.4).

Далее, так как последовательность $\{x_m\}$ не может сходиться к элементу U, но при этом она сходится к элементу φ, цоколем которого является U, то в силу [5, с. 162] для некоторого числа $\beta > 0$ будем иметь, что $\rho_D(\{x_m\}, \bar\gamma) \geq \beta$. Кроме того, при этом $\{x_m\}$ не может быть фундаментальной по метрике ρ_D, т. е. можно еще предполагать дополнительно, что $\rho_D(x_m, x_k) \geq \beta$ $\forall m \neq k$.

По определению $\{x_m\}$ сходится к φ, если найдется представитель $V \in \varphi$, к которому сходится $\{x_m\}$. Пусть $\{V_m\}$ есть ρ-предцепь ρ-предконца V такая, что $x_m \in V_m$, $m = 1, 2, \dots$. Описываемую в данном случае ситуацию всегда можно получить, переходя к подпоследовательностям $\{x_m\}$, если это потребуется. Соединим каждую точку x_m с кривой $\bar\gamma$ ломаной β_m, целиком лежащей в V_m. При этом всегда можно предполагать, что пересечение $\beta_m \cap \bar{\gamma} = \gamma(t_m)$ состоит из единственной точки. Тогда $\lambda(\beta_m) \geq \beta\ \forall m$, $t_m \to 1$, $m \to \infty$, и последовательность множеств $\{\beta_m\}$ сходится к V при $m \to \infty$. Очевидно, при этом

$$\sup_{x \in \beta_m} d(x, \partial D) \to 0, \quad m \to \infty. \tag{2}$$

В частности, $d(\beta_m, \partial D) \to 0$, $m \to \infty$.

Пусть $\gamma_m = \gamma[0, t_m]$ — поддуга кривой γ. Рассмотрим последовательность кривых $L_m = \gamma_m \cup \beta_m$ из области D. По построению L_m соединяет точки w и x_m в D, ее часть β_m при каждом m имеет длину, не меньшую некоторой константы $\beta > 0$, и для $\{\beta_m\}$ выполнено условие (2). Выберем на каждом β_m по точке y_m такой, что

$$s_m = \lambda(\beta_m[x_m, y_m]) = \beta/2.$$

Очевидно, в силу (2) $d(y_m, \partial D) \to 0$, $m \to \infty$. Параметризуя каждую кривую L_m по длине дуги s, считая $s(x_m) = 0$, $s(w) = \lambda(L_m) < \infty$, для точек y_m, $m = 1, 2, \dots$, $y_m \in L_m$, получим условие

$$\frac{d(y_m, \partial D)}{s_m} = a_m \to 0, \quad m \to \infty.$$

Таким образом, для нашей последовательности точек $\{x_m\}$ из D, сходящейся к φ, и построенной нами последовательности спрямляемых кривых $\{L_m\}$ из D, соединяющих при каждом m точки w и x_m, условие Джона 3) из п. 1.2 не выполнено ни для какого $a > 0$.

Описанная выше ситуация полностью повторится для последовательности $\{x_m\}$, если вместо γ взять любую другую локально спрямляемую кривую γ' из D, сходящуюся к U, и любую другую последовательность ломаных $\{\beta'_m\}$ из D, соединяющих x_m с $\bar{\gamma}'$ в V_m при каждом m. Далее, точно так же описываемая выше ситуация сохранится для $\{x_m\}$, если вместо φ взять любой другой элемент $\varphi \in \Phi_0^\rho[D]$, к которому $\{x_m\}$ может сходиться. При этом одновременно для всех таких элементов $\varphi \in \Phi_0^\rho[D]$, содержащих $\{x_m\}$, найдется одно и то же число $\beta > 0$, для которого выполняются описанные выше условия (см. [5, 4.4.4]).

Таким образом, если последовательность точек $\{x_m\}$ из D не сходится ни к какому элементу $V_0^\rho[D]$ вместе с любой своей подпоследовательностью, то для нее условие 3) Джона не может выполняться в области D. Следовательно, область Джона D из $\mathbb{R}^n$ обязана быть предкомпактной по множеству своих простых ρ-предконцов. Теорема доказана.

2.2. Рассмотрим вопрос о строении множеств $V_0^\rho[D]$ и $[D]_\rho$ области Джона D из $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что область D *R-достижима* в точке $b \in \partial D$, если для любой последовательности точек $\{x_m\}$ из D, сходящейся к b в евклидовой метрике, найдется спрямляемый путь $\gamma : [0, 1) \to D$, содержащий подпоследовательность из $\{x_m\}$ и оканчивающийся в точке b; понятие конечной связности области на границе дано в [18].

Теорема 2. *Пусть D — область Джона в $\mathbb{R}^n$. Тогда $V_0^\rho[D] = RV_0^\rho[D]$, область D секвенциально предкомпактна в пополнении $D \cup [D]_\rho$ и, кроме того, D R-достижима и, в частности, конечно связна на границе.*

Доказательство. Покажем сначала, что любой простой ρ-предконец области D обладает спрямляемой образующей кривой. Пусть $U \in V_0^\rho[D]$, и предположим, что U не имеет спрямляемых образующих кривых в D. Пусть

$\gamma : [0,1) \to D$ есть некоторая локально спрямляемая кривая из D, сходящаяся к U, причем $\gamma(0) = w$, где w — отмеченная точка D. Тогда γ в данном случае является образующей кривой U. В силу сделанного выше предположения γ неспрямляема. Тогда найдется последовательность $\{t_m\}$ из $[0,1)$ такая, что $t_m \to 1$, $m \to \infty$,

$$\lambda(\gamma[t_m, t_{m+1}]) \geq \beta > 0, \quad m = 1, 2 \ldots,$$

при этом последовательность точек $\{y_m = \gamma(t_m)\}$ сходится к U при $m \to \infty$. Кроме того, можно еще предполагать, что $\{y_m\}$ не является фундаментальной по ρ_D:

$$\rho_D(y_m, y_k) \geq \beta \quad \forall m \neq k. \tag{3}$$

В противном случае (см. [5, 1.3.1]) найдется спрямляемая кривая в D, содержащая подпоследовательность из $\{y_m\}$ и, очевидно, сходящаяся к U вместе с $\{y_m\}$. Тогда она будет являться спрямляемой образующей кривой U, что противоречит нашим предположениям.

Пусть $L_m = \gamma[0, t_m]$ (здесь $\gamma(t_m) = y_m$), $\beta_m = \gamma[t_{m-1}, t_m]$, $m = 1, 2, \ldots$ $(t_0 = 0)$. Очевидно, тогда $\beta_m \subset L_m$ и $s_m = \lambda(\beta_m) \geq \beta$, $m = 1, 2, \ldots$. Предположим, что каждая кривая L_m параметризована по длине дуги, причем так, что $L_m(0) = y_m$, $L_m(\lambda(L_m)) = \gamma(0) = w$. Тогда, очевидно, в силу сходимости последовательности поддуг $\{\beta_m\}$ кривой γ к U

$$\sup_{x \in \beta_m} d(x, \partial D) \to 0, \quad m \to \infty.$$

В частности, $d(y_{m-1}, \partial D)$, $m \to \infty$, где $y_{m-1} = \gamma(t_{m-1}) \in \beta_m$, $m = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, получены последовательность точек $\{y_m\}$ из D и последовательность кривых $\{L_m\}$ из D, соединяющих отмеченную точку w области D с y_m, такие, что для точек $\{y_{m-1}\}$ выполнено соотношение

$$\frac{d(y_{m-1}, \partial D)}{s_m} = a_m \to 0, \quad m \to \infty.$$

Следовательно, условие Джона 3) из п. 1.2 для последовательностей $\{y_m\}$ и соответственно $\{L_m\}$ не будет выполнено в D.

Точно так же, если взять любую другую образующую кривую $\gamma' : [0,1) \to D$ элемента U, найдутся снова последовательность точек $\{y'_m = \gamma'(t'_m)\}$, $t'_m \to 1$, $m \to \infty$, на кривой γ' и последовательность дуг $\{L'_m = \gamma'[0, t'_m]\}$, для которых условие Джона не будет выполнено в D. В частности, это будет справедливо и для любой кривой γ', проходящей через последовательность $\{y_m\}$, в силу условия (3). Следовательно, если D есть область Джона, $U \in V_0^\rho[D]$, то всегда найдется спрямляемая кривая из D, сходящаяся к U и поэтому служащая для U ее образующей кривой. Таким образом, $U \in RV_0^\rho[D]$.

Пусть теперь $\{x_m\}$ — произвольная последовательность точек из D, все предельные точки которой лежат на ∂D. В силу теоремы 1 найдется подпоследовательность $\{y_m\}$ из $\{x_m\}$, сходящаяся к некоторому $U \in V_0^\rho[D]$. В силу предыдущего $U \in RV_0^\rho[D]$ и, следовательно, найдется спрямляемая кривая $\gamma : [0,1) \to D$, сходящаяся к U и являющаяся образующей для этого элемента. Очевидно, при этом γ оканчивается в некоторой точке $b \in \partial D$, $C(\gamma, 1) = \{b\}$. Ясно, что точка b является носителем элемента U и $y_m \to b$, $m \to \infty$. Покажем, что $\{y_m\}$ содержит подпоследовательность, фундаментальную по метрике ρ_D.

В силу свойств простых ρ-предконцов (см. [5, с. 159]) $\rho_D(y_m, \bar{\gamma}) \to 0$, $m \to \infty$. Выберем из $\{y_m\}$ подпоследовательность $\{z_m\}$ такую, что $\rho_D(z_m, \bar{\gamma}) \leq$

$1/2^{m+1}$, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда в D для каждого $m = 1, 2, \ldots$ найдется ломаная L_m, соединяющая точку z_m и множество $\bar{\gamma}$, такая, что $\lambda(L_m) \leq 1/2^m$. Следовательно, кривая

$$L = \gamma \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} L_m \right)$$

спрямляема, сходится к U и содержит подпоследовательность $\{z_m\}$ из $\{x_m\}$. В силу [19] или [5, 1.3.1] это означает, что $\{z_m\}$ фундаментальна по метрике ρ_D. Таким образом, любая область Джона D секвенциально предкомпактна в пространстве $D \cup [D]_\rho$.

Покажем, что D R-достижима на границе. Пусть $b \in \partial D$ и последовательность точек $\{x_m\}$ из D сходится к b. Повторив для $\{x_m\}$ все проведенные только что построения, найдем элемент $U \in RV_0^\rho[D]$, для которого точка b будет носителем, и подпоследовательность $\{z_m\}$ из $\{x_m\}$, сходящуюся к U и к точке b при $m \to \infty$, лежащую на спрямляемой кривой L из D, служащей образующей для элемента U. По определению это означает, что D R-достижима в точке b. В частности, при этом в силу [5, 1.2.1] D конечно связна в любой точке $b \in \partial D$. Теорема доказана.

2.3. Понятие нулевого внутреннего угла на границе области. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $U \in V_0^\rho[D]$ и $b \in I(U)$. Говорим, что D *обладает в точке b нулевым внутренним углом относительно* U, если для любой образующей кривой $\gamma : [0, 1) \to D$ элемента U

$$\varliminf_{t \to 1} \frac{d(\gamma(t), \partial D)}{\lambda(\gamma[t, 1))} = 0.$$

Из этого определения немедленно следует, что если область D обладает нулевым внутренним углом в точке $b \in \partial D$ относительно некоторого элемента $U \in V_0^\rho[D]$ такого, что $b \in I(U)$, то эта область не может удовлетворять условию Джона 3) из п. 1.2. В частности, если точка b конечна и недостижима никаким спрямляемым путем из D относительно элемента U, то, как показано при доказательстве теоремы 2, область D имеет относительно элемента U нулевой внутренний угол в точке b и D не является областью Джона. Таким образом, имеет место следующий результат, дополняющий теоремы 1 и 2.

Теорема 3. *Ограниченная предкомпактная по множеству своих простых ρ-предконцов область $D \subset \mathbb{R}^n$ является областью Джона тогда и только тогда, когда она не обладает нулевыми внутренними углами ни в какой точке $b \in \partial D$ относительно любого элемента $U \in V_0^\rho[D]$, носитель которого содержит точку b.*

2.4. Свойство ρ-однородности областей Джона.

Теорема 4. *Область Джона $D \subset \mathbb{R}^n$ ρ-однородна в любой точке $b \in \partial D$ относительно любого элемента $V \in V_0^\delta[D]$ такого, что $b \in I(V)$.*

Доказательство. Пусть D — гомеоморфная шару область Джона из $\mathbb{R}^n$. В силу теоремы 1 D ограничена и предкомпактна по множеству $V_0^\rho[D]$. Условие (1) из п. 1.1 о взаимоотношениях между метриками ρ_D и δ_D области D влечет, что любой δ-предконец, в том числе и простой δ-предконец, является одновременно некоторым ρ-предконцом области D. В силу [5, 3.1.8] любой $V \in V_0^\delta[D]$ минимизируется хотя бы одним элементом $U \in V_0^\rho[D]$. Следовательно, если последовательность точек $\{x_m\}$ из D сходится к элементу $U \in V_0^\rho[D]$, то она одновременно сходится к элементу $V(U) \in V_0^\delta[D]$, который этот элемент

U минимизирует. Это означает, что если D предкомпактна по $V_0^\rho[D]$, то она одновременно предкомпактна и по $V_0^\delta[D]$. Таким образом, если D есть область Джона, то она предкомпактна также и по множеству $V_0^\delta[D]$ своих простых δ-предконцов.

Предположим, что D ρ-неоднородна в точке $b \in \partial D$ относительно некоторого элемента $V \in V_0^\delta[D]$ такого, что $b \in I(V)$. Так как D R-достижима в точке b в силу теоремы 2, то найдется спрямляемый путь $\gamma : [0,1) \to D$ такой, что $\gamma(0) = w$, где w — отмеченная точка D, $C(\gamma, 1) = \{b\}$ и γ сходится к V, будучи при этом образующей кривой V. Ясно, что при этом $I(V) = \{b\}$. Кроме того, эту кривую γ можно взять такой, что для нее будет выполнено граничное условие Джона 3) из п. 1.2, которое мы запишем в следующем виде:

$$\frac{d(\gamma(t), \partial D)}{\lambda(\gamma[t,1))} \geq \alpha > 0 \quad \forall t \in [0,1). \tag{4}$$

Существование такой кривой γ следует из первой части доказательства леммы 4.2 [11, гл. 4, § 4], проведенного Д. А. Троценко (см. также [12]).

Точнее, пусть $\{x_m\}$ — последовательность точек из D, сходящаяся к b. В силу R-достижимости D в b и предкомпактности D по $V_0^\delta[D]$ можно предполагать, что $\{x_m\}$ сходится к V и что $\{x_m\}$ фундаментальна по ρ_D. Тогда предельная кривая $\gamma : [0,1) \to D$, фигурирующая в доказательстве упомянутой леммы Д. А. Троценко и построенная с помощью последовательности $\{x_m\}$, обладает следующими свойствами. Она спрямляема, оканчивается в b, сходится к V и удовлетворяет граничному условию Джона (4). Более того, в данном случае фундаментальность $\{x_m\}$ по ρ_D влечет сходимость $\{x_m\}$ и соответственно найденной нами кривой γ к какому-то $U \in V_0^\rho[D]$, для которого γ является образующей кривой. При этом U минимизирует простой δ-предконец V.

Очевидно, $d(\gamma(t), \partial D) \to 0$, $t \to 1$. Далее, в силу (4) для каждой точки $\gamma(t)$ имеем

$$d(\gamma(t), \partial D) \geq \alpha\lambda(\gamma[t,1)).$$

Это означает, что евклидов шар $B^n(\gamma(t), \alpha\lambda(\gamma[t,1))$ целиком лежит в области D при любом $t \in [0,1)$. Кроме того, $\gamma(t) \to b$, $t \to 1$. Тогда множество

$$K(\gamma) = \bigcup_{t \in [0,1)} B^n(\gamma(t), \alpha\lambda(\gamma[t,1))$$

представляет собой «криволинейный конус» с образующей «осью» $\gamma[0,1)$ и с «острием» в точке b, целиком лежащий в области D. Ясно, что для любой другой кривой $\gamma' : [0,1) \to D$ такой, что $C(\gamma', 1) = \{b\}$, лежащей в $K(\gamma)$, мы будем иметь, что

$$\rho_D(\gamma(t), \gamma'(t)) \to 0, \quad t \to 1,$$

и, следовательно, $\rho_D(\bar\gamma, \bar\gamma') = 0$.

Далее, в силу R-достижимости и ρ-неоднородности области D в точке b относительно элемента V найдется спрямляемая кривая $\beta : [0,1) \to D$ такая, что β сходится к V, $C(\beta, 1) = \{b\}$ и $\rho_D(\bar\gamma, \bar\beta) = \nu > 0$. Как и выше, можно предполагать, что кривая β (при этом она является образующей V) удовлетворяет граничному условию Джона (4) с тем же самым $\alpha > 0$. Построим конус $K(\beta)$, используя ту же схему, по которой мы построили конус $K(\gamma)$. Тогда $K(\beta)$ целиком лежит в D, кривая β является для него «направляющей осью» и своим «острием» он опирается в ту же точку b. При этом для любой кривой

$\beta' : [0,1) \to D$, лежащей в $K(\beta)$ и такой, что $C(\beta',1) = \{b\}$, будем иметь, что β' сходится к V, $\rho_D(\beta(t),\beta'(t)) \to 0$, $t \to 1$, и $\rho_D(\bar\beta,\bar\beta') = 0$. Тогда

$$\lim_{t\to 1} \rho_D(\beta'(t),\gamma(t)) = \nu = \rho_D(\bar\beta,\bar\gamma).$$

Не ограничивая общности, для упрощения записи в дальнейшем можно предполагать, что кривые γ, β удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\rho_D(\beta(t),\gamma(t)) = \nu, \quad t \in [t_0,1),\ t_0 \in (0,1),$$

и для каждого такого t найдется кривая $L_t : [0,\nu] \to D$, соединяющая точки $\beta(t)$, $\gamma(t)$, параметризованная по длине дуги s и такая, что $\lambda(L_t) = \nu$. Кроме того, при $t \to 1$ множества $\overline{L}_t$ сходятся к элементу V, в частности, и к его носителю, точке b, и $d(\overline{L}_t) \to 0$, $t \to 1$.

Зафиксируем кривую L_{t_0}. Тогда для каждого $s \in [0,\nu]$ найдется спрямляемая кривая $\alpha_s : [0,1) \to D$ такая, что $C(\alpha_s,1) = \{b\}$, $\alpha_s(t_0) \in L_{t_0}$, α_s сходится к V,

$$\rho_D(\alpha_s(t_0),\bar\beta) = s, \quad \rho_D(\alpha_s(t_0),\bar\gamma) = \nu - s,$$

и соответственно

$$\rho_D(\bar\alpha_s,\bar\beta) = s, \quad \rho_D(\bar\alpha_s,\bar\gamma) = \nu - s.$$

Мы считаем при этом, что $\alpha_0 = \beta$, $\alpha_\nu = \gamma$. Кроме того, кривую α_s можно выбрать так, что она удовлетворяет граничному условию Джона (4). Тогда соответствующий каждой α_s конус $K(\alpha_s)$ целиком лежит в D, опирается своим «острием» в точку b и сходится к V.

В силу компактности в пространстве $\mathbb{R}^n$ «площадки»

$$\Delta = \bigcup \alpha_s[t_0,1), \quad s \in [0,\nu],$$

лежащей между L_0 и точкой b, из покрытия Δ множествами $K(\alpha_s)$, $s \in [0,\nu]$, можно выбрать конечное подпокрытие $\{K_i\}$, $K_i = K(\alpha_i)$, $\alpha_i = \alpha_{s_i}$, $i = 1,\dots,n$, $0 \le s_1 < \dots < s_n \le \nu$. При этом при каждом i для «радиуса» $r_i(t)$ конуса K_i в точке $\alpha_i(t)$, $t \in [t_0,1)$, имеем, что

$$r_i(t) = \alpha\lambda(\alpha_i[t,1)) \to 0, \quad t \to 1. \tag{5}$$

Это соотношение справедливо в силу условия Джона (4) и спрямляемости кривой α_i.

Пусть $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$. Тогда для каждого $t \in [t_0,1)$ найдется ломаная M_t, последовательно соединяющая в области D точки $\beta(t)$, $\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)$, $\gamma(t)$ и лежащая в объединении шаров с центрами в этих точках и радиусами, равными соответственно $\alpha\lambda(\beta[t,1)), \alpha\lambda(\alpha_1[t,1)),\dots,\alpha\lambda(\alpha_n[t,1)), \alpha\lambda(\gamma[t,1))$. Тогда для длины $M(t)$ имеет место соотношение

$$\lambda(M_t) \le \sum_{i=1}^{n} 2r_i(t) + 2\alpha[\lambda(\beta[t,1)) + \lambda(\gamma[t,1))].$$

Условие (5) и спрямляемость кривых β, γ дают, что $\lambda(M_t) \to 0$ при $t \to 1$. Тем самым получено противоречие с условием $\rho_D(\bar\beta,\bar\gamma) = \nu > 0$. Следовательно, область D обязана быть ρ-однородной в точке b относительно элемента V. Теорема доказана.

§ 3. Риманова структура равномерных областей

3.1. Свойства внутренне равномерных областей. Рассмотрим сначала взаимосвязи между условием Джона и условиями равномерности областей из $\mathbb{R}^n$. Сразу отметим, что условие 2) равномерности области $D \subset \mathbb{R}^n$ из п. 1.2 несколько отличается от условия Джона 3). Например, в отличие от областей Джона нетрудно привести пример неограниченной равномерной области из $\mathbb{R}^n$. При этом заметим, что если область D из $\mathbb{R}^n$ не ограничена и для любой точки $x \in D$ выполнено условие $d(x, \partial D) \leq r < \infty$, то для такой области условие 2) равномерности не будет выполнено ни для какого $a \in (0,1]$. Следовательно, условие

$$\sup_{x \in D}(x, \partial D) = \infty \tag{6}$$

является необходимым для того, чтобы неограниченная область D из $\mathbb{R}^n$ была равномерна или внутренне равномерна в $\mathbb{R}^n$.

Далее, ясно, что если в области D выполнены условия внутренней равномерности, то для конечных точек $b \in \partial D$ будет выполнено и граничное условие Джона 3) из п. 1.2; условия внутренней равномерности области D означают, по существу, что у D не может быть нулевых внутренних углов. Таким образом, основным критерием внутренней равномерности области D из $\mathbb{R}^n$ является выполнение условия Джона 3) в «локальном смысле» для каждой конечной точки ∂D. Тогда в силу результатов о строении областей Джона из § 2 будем иметь, что в любой конечной точке $b \in \partial D$ внутренне равномерная область D обладает всеми свойствами, сформулированными в утверждениях теорем 2–4. Кроме того, из любой последовательности точек $\{x_m\}$ из D, сходящейся к точке b, всегда можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $U \in V_0^\rho[D]$ с $I(U) = \{b\}$; при этом $U \in RV_0^\rho[D]$ и $\{x_m\}$ обязательно содержит подпоследовательность, фундаментальную по метрике ρ_D. Если же внутренне равномерная область D не ограничена, то на бесконечности она также не может иметь нулевого внутреннего угла в силу условия (6).

3.2. Свойства равномерных областей. Будем говорить, что область D *сильно R-достижима в точке* b, если для любых двух последовательностей точек $\{x_m\}$, $\{y_m\}$ из D, сходящихся к b в евклидовой метрике, имеет место сходимость $\rho_D(x_m, y_m) \to 0$, $m \to \infty$; понятие локальной связности D на границе см. в [18].

Теорема 5. *Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$ равномерна. Тогда она локально связна и сильно R-достижима в каждой конечной точке своей границы.*

Доказательство. Предположим, что, напротив, D не является локально связной в некоторой конечной точке $b \in \partial D$. Как установлено выше в п. 3.1, условие 2) равномерности области D влечет, что D обязана быть конечно связной в точке b. Тогда найдется число $r > 0$ такое, что пересечение $B^n(b,r) \cap D$ состоит по крайней мере из двух различных связных компонент (более того, это свойство выполнено и для любого $r' \in (0,r)$). Выберем какие-нибудь две из этих различных компонент и обозначим их через D_1, D_2. При этом $b \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2$,

$$\partial_D D_1 = S^{n-1}(b,r) \cap D_1 = q_1, \quad \partial_D D_2 = S^{n-1}(b,r) \cap D_2 = q_2$$

суть сечения области D и $D_1 \cap D_2 = \varnothing$. Возьмем последовательности точек $\{x_m\}$, $\{y_m\}$ из D такие, что $\{x_m\} \subset D_1$, $\{y_m\} \subset D_2$ и $x_m, y_m \to b$, $m \to \infty$. Тогда

$$|x_m - y_m| \to 0, \quad m \to \infty,$$

но
$$\rho_D(x_m, y_m) \geq d(x_m, q_1) + d(y_m, q_2) = 2r - \varepsilon_m,$$
где $\varepsilon_m \to 0$, $m \to \infty$. Следовательно, тогда
$$\frac{|x_m - y_m|}{\lambda(\gamma_m)} \leq \frac{|x_m - y_m|}{2r - \varepsilon_m} \to 0, \quad m \to \infty,$$
какова бы ни была кривая γ_m из D, соединяющая x_m, y_m в D. В этом случае условие 1) равномерности области D не выполнено и D обязана быть локально связной на границе.

Условия локальной связности и ρ-однородности области D в любой точке $b \in \partial D$ (см. п. 3.1) дают, что D сильно R-достижима в каждой конечной точке ∂D. Здесь нужно только учесть, что свойства локальной связности области D на границе и ее предкомпактности по $V_0^\rho[D]$ влекут, что каждая точка $b \in \partial D$ является носителем только единственного элемента $U \in V_0^\rho[D]$ и между множествами ∂D и $V_0^\rho[D]$ при этом устанавливается естественное взаимно однозначное соответствие. Теорема доказана.

§ 4. Случай плоских областей

4.1. Свойства плоских областей Джона. Для областей Джона из $\mathbb{R}^2$ имеет место следующее ниже утверждение, уточняющее теоремы из § 2. Понятие *m-связности* области D в точке $b \in \partial D$ см. в [18].

Теорема 6. *Гомеоморфная кругу область Джона D из $\mathbb{R}^2$ всегда ограничена, R-достижима на границе, предкомпактна по множествам $[D]_\rho$ и $V_0^\rho[D]$, $V_0^\rho[D] = RV_0^\rho[D]$, в любой точке $b \in \partial D$ не более чем $m(a)$-связна, $m(a) < \infty$ (при этом в любой точке ∂D имеет не более чем $m(a)$ разрезов) и не может иметь нулевых пиков, направленных наружу.*

Доказательство. Требуется только показать, что в любой точке $b \in \partial D$ область D не более чем $m(a)$-связна при некотором $m(a) < \infty$ (a — константа из условия Джона 3) п. 1.2). В частности, тогда в любой точке $b \in \partial D$ область D не может иметь более чем $m(a)$ разрезов. Предположим, напротив, что в некоторой точке $b \in \partial D$ она не является m-связной ни для какого натурального числа m. В этом случае, так как D конечно связна в точке b, найдется убывающая по включению последовательность $\{U_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, окрестностей точки b в $\mathbb{R}^2$ такая, что $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{U}_k = \{b\}$, для каждого k пересечение $U_k \cap D$ состоит из $m(k) < \infty$ компонент, $m(k') \geq m(k)$, если $k' > k$, и $m(k) \to \infty$, если $k \to \infty$. В частности, при этом имеем, что $d(U_k) \to 0$, $k \to \infty$. Кроме того, каждое U_k обладает следующим свойством: точка b принадлежит $\overline{U_k^j}$, $1 \leq j \leq m(k)$, где U_k^j есть компонента $U_k \cap D$. Тогда точка b является носителем счетного числа различных простых ρ-предконцов $V_1, V_2, \ldots$ области D, каждый из которых имеет хотя бы по одной спрямляемой образующей кривой $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ соответственно, исходящей из отмеченной точки w области D и оканчивающейся в b. Не ограничивая общности, предполагаем, что $U_k^j \supset U_{k+1}^j$ при каждом j, $1 \leq j \leq m(k)$, и последовательность $\{U_k^j\}$, $k = 1, 2, \ldots$, вложенных друг в друга подобластей из D образует ρ-предцепь в D, принадлежащую элементу V_j. В частности, при этом кривая $\gamma_j : [0, 1) \to D$ сходится к ρ-предцепи $\{U_k^j\}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Покажем, что в описанной только что ситуации область D обладает нулевым внутренним углом в точке b относительно некоторого элемента $V \in V_0^\rho[D]$ с $I(V) = \{b\}$. Для каждого k построим открытый круг

$$B_k = \{x \in \mathbb{R}^2, |x - b| < r_k\}$$

таким образом, что $B_k \subset U_k$, $k = 1, 2, \dots$, и $B_k \supset B_{k+1}$ для каждого k. Условие $d(U_k) \to 0$, $k \to \infty$, влечет, что $r_k \to 0$, $k \to \infty$. Обозначим через B_k^j компоненту $B_k \cap D$, входящую в U_k^j, $1 \le j \le m(k)$, и содержащую внутри себя часть образующей кривой γ_j элемента V_j, примыкающей к точке b. Пусть $q_k^j = \partial B_k^j \cap D$. Множество $q_k^j \subset S_k = \partial B_k$ является частью окружности S_k с центром в точке b радиуса r_k и образует сечение области D, разделяющее ее на две подобласти, одна из которых совпадает с B_k^j. Очевидно, $d\big(q_k^j\big) \to 0$, $k \to \infty$, при любом фиксированном j, $1 \le j \le m(k)$.

Рассмотрим последовательность сечений $\big\{q_k = q_k^k\big\}$ из области D. Очевидно, $q_k \to b$, $k \to \infty$. Учитывая условие $m(k) \to \infty$, $k \to \infty$, и не ограничивая общности, можно предполагать, что сечения q_k из $\{q_k\}$ попарно не разделяют друг друга в D. При этом компоненты B_k^k пересечения $B_k \cap D$ попарно не пересекаются в D.

Пусть γ_k' — компонента $\gamma_k \cap B_k$, входящая в B_k^k и примыкающая к точке b, $z_k = \overline{\gamma_k'} \cap q_k$ — последняя точка пересечения γ_k с окружностью S_k при движении по кривой γ_k от точки w к точке b. Очевидно, $|z_k - b| \to 0$, $k \to \infty$. При этом $s_k = \lambda(\gamma_k') \ge r_k$, где r_k — радиус круга B_k, и s_k, $r_k \to 0$, $k \to \infty$.

В силу R-достижимости D в точке b можно предполагать, что последовательность $\{z_k\}$ фундаментальна по ρ_D и лежит на некоторой спрямляемой кривой $\alpha : [0, 1) \to D$, исходящей из w и оканчивающейся в b. Очевидно, кривая α не сходится ни к какому элементу V_k, $k = 1, 2 \dots$, и определяет некоторый простой ρ-предконец V, для которого она является образующей кривой. Тогда $I(V) = \{b\}$ и $V \ne V_k$, $k = 1, 2, \dots$.

Обозначим через α_k часть кривой $\alpha : [0, 1) \to D$, соединяющую w с z_k, и пусть $\beta_k = \alpha_k \cup \gamma_k'$. Тогда кривые β_k спрямляемы при каждом k и $\beta_k \to \alpha$, $k \to \infty$. Отметим, что $\lambda(\gamma_k') = s_k \to 0$, $k \to \infty$, $\gamma_k' \subset B_k^k$ при каждом k, кривая β_k сходится к элементу V_k и является образующей кривой этого элемента.

Пусть φ_k — угол в радианах, отвечающий части q_k окружности S_k. Тогда $\lambda(q_k) = r_k\varphi_k$ и хорда, опирающаяся на q_k, имеет длину, равную $2r_k \sin(\varphi_k/2)$. Учитывая, что

$$s_k = \lambda(\gamma_k') \ge r_k, \quad d(z_k, \partial D) \le r_k \sin(\varphi_k/2),$$

будем иметь

$$\frac{d(z_k, \partial D)}{s_k} \le \frac{r_k \sin(\varphi_k/2)}{r_k} = \sin(\varphi_k/2) \to 0, \quad k \to \infty,$$

в силу того, что $\varphi_k \to 0$, $k \to \infty$. Последнее следует из того, что сечения q_k^j, $j = 1, 2, \dots, m(k)$, все лежат на окружности S_k, взаимно не пересекаются, сумма соответствующих им углов φ_k^j не превосходит 2π и $m(k) \to \infty$, $k \to \infty$.

Таким образом, для последовательности кривых $\{\beta_k\}$, соединяющих w с b, граничное условие Джона 3) не будет выполнено с одной и той же константой $a > 0$. Отсюда следует, что D имеет нулевой внутренний угол в b относительно простого ρ-предконца V, для которого кривая α, предельная для последовательности кривых $\{\beta_k\}$, служит образующей кривой. Но это невозможно в силу теоремы 3, если D — область Джона. Следовательно, область Джона D из $\mathbb{R}^2$ обязана быть m-связной в любой точке $b \in \partial D$ с некоторым $m < \infty$. В частности, в каждой точке $b \in \partial D$ область D не может иметь более чем m разрезов. Теорема доказана.

Замечание 1. Нетрудно привести пример области Джона D из $\mathbb{R}^2$, имеющей бесконечное число разрезов. Например, если D — квадрат и в нем имеется счетное число прямолинейных разрезов K_m, каждый из которых исходит из точки $b_m \in \partial D$, все b_m попарно различны и $b_m \to b$, $m \to \infty$, то нужно только учесть, что евклидовы диаметры K_m стремятся к нулю и эти разрезы не должны слишком «сгущаться» при $m \to \infty$.

4.2. Свойства плоских равномерных областей. Пусть область D из $\mathbb{R}^2$ односвязна, равномерна и ограничена. В силу теоремы 5 она локально связна и, более того, сильно R-достижима на границе. Как известно (см., например, [14]), если область D из $\mathbb{R}^2$ гомеоморфна кругу, ограничена и локально связна на границе, то она всегда жорданова.

Далее, так как для равномерных областей выполнено граничное условие Джона, ввиду общей теоремы 3 рассматриваемая нами область D не может иметь нулевых внутренних углов ни в какой точке $b \in \partial D$ относительно любого элемента $U \in V_0^\rho[D]$ с $I(U) = \{b\}$, т. е. область D не может иметь нулевых пиков, направленных наружу.

Кроме того, отметим, что в силу жордановости области D и ее ρ-однородности на границе любая точка $b \in \partial D$ может быть носителем только единственного элемента U из $V_0^\rho[D]$. Вследствие теоремы 1 любая ограниченная равномерная область предкомпактна по $V_0^\rho[D]$. Следовательно, тогда в нашем случае существует естественное взаимно однозначное соответствие между элементами $U \in V_0^\rho[D]$ и точками $b \in \partial D$ по закону $U \leftrightarrow b \Leftrightarrow I(U) = \{b\}$.

Наконец, условие 1) равномерности области D влечет, что D не может иметь также нулевых пиков, направленных внутрь.

Пусть теперь равномерная область D не ограничена в $\mathbb{R}^2$ и точка $b \in \partial D$ конечна в $\mathbb{R}^2$. Так как в b выполнены условия 1) и 3) из п. 1.2, все перечисленные выше свойства ограниченных равномерных областей выполнены в точке b, т. е. справедливы в локальном смысле. Отсюда следует, что множество ∂D гомеоморфно прямой из $\mathbb{R}^2$ и D не может иметь нулевых пиков в любой точке ∂D, в том числе и на бесконечности. Таким образом, имеет место следующий результат, уточняющий общую теорему 5.

Теорема 7. *Любая плоская односвязная равномерная область всегда жорданова и не может иметь на границе нулевых пиков, направленных внутрь или наружу.*

§ 5. Условия равномерности и квазиизометрии

5.1. Области Джона и ρ-квазиизометрии. Пусть D — гомеоморфная шару область Джона из $\mathbb{R}^n$ и $f : D \to G$ — некоторая ρ-квазиизометрия D на область G из $\mathbb{R}^n$; $K \in [1, \infty)$ — коэффициент квазиизометричности отображения f. Пусть L (см. п. 1.2) — внешний радиус области D, $b \in \partial D$, $w \in D$ — отмеченная точка области D и $\gamma(s) : [0, \lambda] \to \overline{D}$, $\lambda = \lambda(\gamma)$ — спрямляемая кривая, лежащая в $\overline{D}$, соединяющая точки b и w таким образом, что $\gamma(0) = b$, $\gamma(\lambda) = w$ (здесь s — параметр длины), $\gamma((0, \lambda]) \subset D$, и удовлетворяющая граничному условию Джона 3) из п. 1.2.

Пусть $\gamma' = f^* \circ \gamma : [0, \lambda] \to G$ — образ кривой γ при отображении f^*, являющемся непрерывным продолжением f вдоль кривой γ. Тогда $\lambda' = \lambda(\gamma') \leq K\lambda(\gamma) \leq KL$, кривая γ' спрямляема, лежит в G и оканчивается в некоторой точке $b' \in \partial G$. Кроме того, в силу результатов из [19, 20] область G R-достижима на границе, ограничена, предкомпактна по множеству $V_0^\rho[G]$, $V_0^\rho[G] = RV_0^\rho[G]$, и $\lambda(\gamma') \geq \frac{\lambda(\gamma)}{K}$.

Пусть γ' параметризована по длине дуги $s', w' = f(w)$, $\gamma'(0) = b'$ и $\gamma'(\lambda') = w'$. Пусть, кроме того, $\gamma(t) = f^{-1}(\gamma'(s'))$. Тогда

$$\frac{d(\gamma'(s'), \partial G)}{s'} = \frac{d(\gamma'(s'), \partial G)}{\lambda(\gamma'[0, s'])} \geq \frac{(1/K)d(\gamma(t), \partial D)}{K\lambda(\gamma[0, t])} \geq \frac{1}{K^2}a.$$

Следовательно, G удовлетворяет в точке $b' \in \partial G$ граничному условию Джона с константой $a' = a/(K^2)$.

Пусть точка $b' \in \partial G$ выбрана произвольно. В силу [5, с. 160] отображение f продолжается до гомеоморфизма $f^* : D \cup V_0^\rho[D] \to G \cup V_0^\rho[G]$ и точка $b' \in \partial G$ обязательно является носителем хотя бы одного элемента $U' \in V_0^\rho[G]$. Тогда, взяв за точку b носитель простого ρ-предконца U области D, являющегося прообразом элемента U' при отображении f^*, и применив проведенные выше построения для точки b, получим, что в точке b' область G не может иметь нулевого внутреннего угла относительно элемента U'. (Как было отмечено при доказательстве теоремы 4, всегда в области D найдется необходимая нам спрямляемая кривая γ, сходящаяся к элементу U, оканчивающаяся в точке b и удовлетворяющая условию Джона 3) из п. 1.2.) Следовательно, G является областью Джона, и доказана следующая

Теорема 8. *Семейство областей Джона из $\mathbb{R}^n$ замкнуто относительно класса ρ-квазиизометрических гомеоморфизмов.*

Как нетрудно заметить, класс областей Джона из $\mathbb{R}^n$ совпадает с классом ограниченных внутренне равномерных областей из $\mathbb{R}^n$. Далее, основным критерием внутренней равномерности неограниченной области из $\mathbb{R}^n$ является выполнение граничного условия Джона 3) из п. 1.2 в каждой конечной точке ее евклидовой границы. А мы только что показали, что оно сохраняется при ρ-квазиизометриях. Кроме того, очевидно, условие (6) из п. 3.1 равномерности области D на бесконечности влечет выполнение такого же условия для области G, если G есть образ ρ-квазиизометрии f области D. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 9. *Семейство неограниченных внутренне равномерных областей из $\mathbb{R}^n$ замкнуто относительно класса ρ-квазиизометрических гомеоморфизмов.*

В частности, семейство областей $\mathbb{R}^n$, ρ-квазиизометрически эквивалентных шару (полупространству), образует подсемейство в классе областей Джона (неограниченных внутренне равномерных областей) из $\mathbb{R}^n$. Отсюда класс областей Джона, например, распадается на подклассы, замкнутые относительно ρ-квазиизометрий.

5.2. Равномерные области и билипшицевы гомеоморфизмы. Пусть D является равномерной областью в $\mathbb{R}^n$ и $f : D \to G$ — билипшицевым гомеоморфизмом области D на область G из $\mathbb{R}^n$. Покажем, что G представляет собой равномерную область.

Пусть a — константа из условий 1), 2) равномерности области D (см. п. 1.2). Выберем две произвольные точки $u, v \in G$, и пусть $x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v)$ —

прообразы этих точек при отображении f. По условию для точек $x, y \in D$ найдется спрямляемая кривая γ в D, соединяющая эти точки и такая, что для нее выполнены условия 1) и 2) из п. 1.2.

Пусть $\gamma' = f \circ \gamma$ — образ кривой γ при отображении f. Очевидно, γ' соединяет в G точки u и v. Докажем, что для кривой γ' выполнены условия 1) и 2) равномерности с некоторой константой $a' \in (0,1]$. Имеем

$$\frac{|u-v|}{\lambda(\gamma')} \geq \frac{(1/K)\,|f^{-1}(u)-f^{-1}(v)|}{K\lambda(\gamma)} = \frac{1}{K^2}\frac{|x-y|}{\lambda(\gamma)} \geq \frac{a}{K^2},$$

и для точек u, v в G выполнено условие 1) с константой $a' = a/(K^2)$.

Далее, пусть $w \in \gamma'$, $z = f^{-1}(w)$. Тогда

$$\frac{d(w,\partial G)}{\min\{\lambda(\gamma'(u,w)),\lambda(\gamma'(w,v))\}} \geq \frac{(1/K)d(z,\partial D)}{\min\{K\lambda(\gamma(x,z)),K\lambda(\gamma(z,y))\}} = \frac{1}{K^2}\frac{d(z,\partial D)}{\min\{\lambda(\gamma(x,z)),\lambda(\gamma(z,y))\}} \geq \frac{a}{K^2},$$

если точка w достаточно близка к u или к v и условие 2) для области G выполнено с той же константой $a' = a/(K^2) \in (0,1]$. Кроме того, очевидно, что если для области D выполнено условие (6) п. 3.1 равномерности на бесконечности, то, как легко видеть, это же условие будет выполнено для ее образа G при билипшицевом отображении f. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 10. *Семейство равномерных областей из $\mathbb{R}^n$ замкнуто относительно класса билипшицевых гомеоморфизмов. Кроме того, свойства ограниченности или неограниченности равномерных областей инвариантны при билипшицевых отображениях.*

5.3. Связи между ρ-квазиизометричностью и билипшицевостью в равномерных областях. Прежде чем установить эти связи, мы, следуя [10], введем следующее понятие. Пусть на множестве M определены две метрики μ и λ. Будем говорить, что это множество (μ,λ)-*квазивыпукло*, если существует константа $C \in [1,\infty)$ такая, что для любых точек $x, y \in M$ выполнено соотношение

$$\frac{\mu(x,y)}{C} \leq \lambda(x,y) \leq C\mu(x,y). \tag{7}$$

Предложение 1. *Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$ равномерна с константой $a \in (0,1]$. Тогда она (d,ρ_D)-квазивыпукла с константой $C = 1/a$.*

Доказательство. Условие 1) равномерности области D (см. п. 1.2) дает, что

$$\rho_D(x,y) \leq (1/a)|x-y| = C|x-y| \quad \forall x, y \in D.$$

Тогда из условия $\rho_D(x,y) \geq |x-y|$ $\forall x, y \in D$ и предыдущего неравенства получаем, что для любых точек $x, y \in D$

$$d(x,y) \leq \rho_D(x,y) \leq Cd(x,y)$$

и область D (d,ρ_D)-квазивыпукла с константой $C = 1/a$. Предложение доказано.

Теорема 11. *Пусть области D, G из $\mathbb{R}^n$ соответственно (d,ρ_D)- и (d,ρ_G)-квазивыпуклы с константами C и C' и $f: D \to G$ есть ρ-квазиизометрия с константой квазиизометричности $K \in [1,\infty)$. Тогда f является билипшицевым гомеоморфизмом с липшицевой константой $L = \max\{KC, KC'\}$.*

Доказательство. По условию имеем
(i) $\forall x, y \in D\ d(x,y) \le \rho_D(x,y) \le Cd(x,y)$;
(ii) $\forall u, v \in G\ d(u,v) \le \rho_G(u,v) \le C'd(u,v)$;
(iii) $\forall x, y \in D\ (1/K)\rho_D(x,y) \le \rho_G(f(x),f(y)) \le K\rho_D(x,y)$.

Здесь условия (i), (ii) записаны в более точном выражении, чем в общей формуле (7), если учесть, что в любой области D из $\mathbb{R}^n$ будет $d(x,y) \le \rho_D(x,y)$ $\forall x, y \in D$. Пусть x, y суть произвольные точки из D, $u = f(x)$, $v = f(y)$ — их образы при отображении f. Тогда в силу (i)–(iii) имеем

$$|f(x) - f(y)| = d(u,v) \le \rho_G(u,v) \le K\rho_D(x,y) \le KCd(x,y) = KC|x-y|$$

и, с другой стороны,

$$|f(x) - f(y)| = d(u,v) \ge \frac{\rho_G(u,v)}{C'} \ge \frac{\rho_D(x,y)}{C'K} \ge \frac{d(x,y)}{C'K} = \frac{|x-y|}{C'K}.$$

Следовательно, $\forall x, y \in D$

$$\frac{|x-y|}{C'K} \le |f(x) - f(y)| \le CK|x-y|,$$

и гомеоморфизм $f: D \to G$ билипшицев с константой $L = \max\{KC, KC'\}$. Теорема доказана.

Предложение 1 и теорема 11 дают следующие просто доказываемые утверждения.

Следствие 1. *Пусть области D, G соответственно a-, a'-равномерны и $f: D \to G$ есть ρ-квазиизометрия с константой квазиизометричности K. Тогда f — билипшицев гомеоморфизм с константой $L = \max\{K/a, K/a'\}$.*

Следствие 2. *Пусть $f: D \to G$ — ρ-квазиизометрия с константой квазиизометричности K области D из $\mathbb{R}^n$ на область G, которая есть либо шар B^n, либо верхнее полупространство $\mathbb{R}^n_+$ в $\mathbb{R}^n$, и область D (d,ρ_D)-квазивыпукла с константой C. Тогда f — билипшицево отображение с константой $L = KC$. В частности, если область D a-равномерна, то f билипшицево с константой $L = K/a$.*

Таким образом, любые две равномерные области D, G из $\mathbb{R}^n$, ρ-квазиизометрически эквивалентные друг другу, будут и билипшицево эквивалентны друг другу. При этом класс равномерных областей $\mathbb{R}^n$ распадается на подклассы, замкнутые относительно семейства билипшицевых гомеоморфизмов.

5.4. О продолжении ρ-квазиизометрий областей Джона и билипшицевых отображений равномерных областей. Результаты из [5, разд. 1, приложение 1] и теорема 1 дают, что любая ρ-квазиизометрия $f: D \to G$ областей Джона D, G из $\mathbb{R}^n$ всегда продолжается до гомеоморфизма $f^*: D \cup V_0^\rho[D] \to G \cup V_0^\rho[G]$, причем если области D, G жордановы, то f всегда продолжается до гомеоморфизма $\bar{f}: \overline{D} \to \overline{G}$. В общем случае последнее утверждение неверно: в [17] приведен пример жордановых областей D, G из $\mathbb{R}^3$, ρ-квазиизометрия $f: D \to G$ которых не продолжается до гомеоморфизма

$\bar{f} : \overline{D} \to \overline{G}$. Кроме того, для плоских областей Джона D, G со спрямляемыми границами граничное отображение $f^* : V_0^\rho[D] \to V_0^\rho[G]$ является квазиизометрией относительно граничных римановых метрик областей D и G (см. [21]).

Известно, что для областей D, G из $\mathbb{R}^n$ билипшицев гомеоморфизм $f : D \to G$ всегда продолжается до билипшицева гомеоморфизма $\bar{f} : \overline{D} \to \overline{G}$. В частности, это справедливо, если области D, G равномерны. Тогда отсюда, например, следует, что если одна из этих областей D или G жорданова, то таковой же является и другая область.

5.5. Условие Альфорса и равномерность плоских областей. В силу [22, гл. 4, теорема 5] жорданова кривая γ из $\mathbb{R}^2$ допускает K-квазиконформное отражение в $\mathbb{R}^2$ с коэффициентом $K \in [1,\infty)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему условию: если x, y, z суть произвольные три точки на γ такие, что z разделяет на γ точки x и y, то

$$\left|\frac{z-x}{x-y}\right| \le C, \quad C \in [1,\infty). \tag{8}$$

Как известно (см. [14]), условие (8) необходимо и достаточно для того, чтобы γ ограничивала равномерную область D в $\mathbb{R}^2$. В силу леммы 3 из [22, гл. 4] в этом случае существует $M(K)$-квазиконформное отражение относительно этой же кривой γ, которое является дифференцируемым и изменяет евклидовы длины самое большое в $M(K) \in [1,\infty)$ раз.

Замечание 2. В [23] установлено, что плоская односвязная область D ρ-квазиизометрически эквивалентна кругу тогда и только тогда, когда она R-достижима на границе, ее граница $\gamma = \partial D$ спрямляема и для любых точек $x, y \in \gamma$ справедлива оценка

$$\frac{\delta_D(x,y)}{\lambda(\gamma(x,y))} \ge a, \quad a \in (0,1]. \tag{9}$$

(Здесь $\delta_D(x,y)$ — инфимум диаметров кривых из D, соединяющих точки x и y.) Очевидно, условие (9) влечет, что область D не может иметь нулевых внутренних углов на границе и, следовательно, представляет собой область Джона в $\mathbb{R}^2$.

Т. Г. Латфуллин любезно сообщил автору пример плоской равномерной области со спрямляемой границей (она одновременно будет и областью Джона), для граничной кривой γ которой не выполняется условие (9), и эта область не является ρ-квазиизометрически эквивалентной кругу. Таким образом, из (9) следует (8), а обратное, как показывает данный пример, не всегда верно.

Далее, известный пример «снежинки» Шварца показывает, что существуют плоские ограниченные односвязные равномерные области, имеющие неспрямляемые и даже, более того, локально неспрямляемые границы. Общий подход к построению примеров такого типа дан, например, в [24, гл. 2, § 3].

Кроме того, в [13] Мартио доказал теорему о липшицевой структуре областей Джона из $\mathbb{R}^n$, по-видимому, являющуюся первым результатом в этом направлении.

В заключение автор благодарит С. К. Водопьянова и Т. Г. Латфуллина за ряд ценных замечаний и полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кармазин А. П.* Простые предконцы пространственных областей / Томский гос. ун-т. Томск, 1992. 55 с. Деп. в ВИНИТИ , № 2220-В92.

2. *Кармазин А. П.* Теория предконцов пространственных областей: факторизация предконцов по их общему цоколю / Ред. «Сиб. мат. журн.». Новосибирск, 1995. 60 с. Деп. в ВИНИТИ , № 1102-В95.
3. *Кармазин А. П.* Основные теоремы теории предконцов пространственных областей // Мат. труды. 1998. Т. 1, № 2. С. 79–110.
4. *Кармазин А. П.* Метрические структуры пространственных областей и граничное поведение квазиизометрий / Ред. «Сиб. мат. журн.». Новосибирск, 1999. 74 с. Деп. в ВИНИТИ , № 3244-В99.
5. *Кармазин А. П.* Квазиизометрии, теория предконцов и метрические структуры пространственных областей. Сургут: Изд-во Сургутск. ун-та, 2003.
6. *John F.* Rotation and strain // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14, N 3. P. 391–413.
7. *Martio O., Sarvas J.* Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 1978. V. 4, N 2. P. 383–401.
8. *Jones P. W.* Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces // Acta Math. 1981. V. 147. P. 71–88.
9. *Balogh Z., Volberg A.* Geometric localization, uniformly John property and separated semihyperbolic dynamics // Ark. Math. 1996. V. 34. P. 21–49.
10. *Bonk M., Heinonen J., Koskela P.* Uniformizing Gromov hyperbolic spaces // Astérisque. 2001. V. 270. P. 1–100.
11. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Наука, 1982.
12. *Троценко Д. А.* Свойства областей с негладкой границей // Сиб мат. журн. 1981. Т. 22, № 4. С. 180–190.
13. *Martio O.* John domains, bilipschitz balls and Poincaré inequality // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1988. V. 33, N 1–2. P. 107–112.
14. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Пространства Соболева и специальные классы отображений. Новосибирск: Изд-во Новосибирского гос. ун-та, 1981.
15. *Balogh Z., Volberg A.* Boundary Harnack principle for separated semihyperbolic repellers, harmonic measure applications // Rev. Mat. Iberoamericana. 1996. V. 12. P. 299–336.
16. *Nakai M.* Radon — Nikodym densities and Jacobians // Pacific J. Math. 1972. V. 40, N 2. P. 375–396.
17. *Васильчик М. Ю., Гольдштейн В. М.* Квазиконформные отображения «гребня на пик» // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 4. С. 20–34.
18. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Lecture Notes in Math.; v. 229).
19. *Кармазин А. П.* Простые концы и пространственные квазиизометрии // Экстремальные задачи теории функций. Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1985. С. 12–49.
20. *Кармазин А. П.* О граничном поведении квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 1. С. 82–85.
21. *Кармазин А. П.* Плоские квазиизометрии и простые концы // Экстремальные задачи теории функций. Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1982. С. 15–35.
22. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
23. *Латфуллин Т. Г.* О существовании квазиизометрических отображений / Тюменский гос. ун-т М., 1982. 4 с. Деп. в ВИНИТИ, № 3484-92
24. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформых отображений. Новосибирск: Наука, 1974.

Статья поступила 8 апреля 2004 г.

Кармазин Александр Петрович
Сургутский гос. университет, факультет информационных технологий,
ул. Энергетиков, 14, Сургут 628412 Тюменской области
kap@kpm.surgu.ru