Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 517.946

НЕРАВЕНСТВА КОРНА ДЛЯ СОЧЛЕНЕНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ С ТОНКИМИ ПЛАСТИНАМИ

С. А. Назаров

Аннотация: Доказаны анизотропные неравенства Корна для упругого сочленения массивного тела с тонкими пластинами, защемленными по частям боковых поверхностей. Распределение весовых множителей в используемых нормах существенно зависит от взаимного расположения пластин, способа их крепления к телу и их относительных (в сравнении с телом) жесткостей.

Ключевые слова: весовое пространство Корна, сочленение тонких упругих тел, мультиструктуры.

1. Описание упругого сочленения. Пусть $\Xi \in \mathbb{R}^3$ — область с гладкой границей $\partial\Xi$ и компактным замыканием $\overline{\Xi} = \Xi \cup \partial\Xi$ (всюду в статье термин «гладкий» означает «класса C^1»). Зафиксируем плоскости $\Pi^1, \dots, \Pi^J$ и соотнесем с ними системы декартовых координат $\left(y_1^j, y_2^j, z^j\right)$, направив ось z^j перпендикулярно Π^j. Обозначив через $\omega^j \subset \Pi^j$ двумерные области с гладкими границами и компактными замыканиями, определим тонкие пластины

$$\Omega_h^j = \left\{x : y^j = \left(y_1^j, y_2^j\right) \in \omega^j, -hH_-^j(y^j) < z^j < hH_+^j(y^j)\right\}, \tag{1}$$

где $h \in (0, h_0]$ — малый параметр, а $H^\pm$ — гладкие функции на $\overline{\omega^j}$, причем их сумма $H^j = H_+^j + H_-^j$ положительна. Далее мы не различаем в обозначениях двумерные объекты и их погружения в пространство $\mathbb{R}^3$ на плоскости Π^j. Считаем, что перечисленные множества и граница $h_0 \in (0, 1]$ изменения параметра h выбраны так, что $\Omega_h^j \cap \Omega_h^j = \varnothing$ при $j \neq k$, а $\omega^j \cap \Xi \subset \Pi^j$ и $\Upsilon^j = \omega^j \cap \partial\Xi$ — непустые область и дуга. Не исключается случай $\Pi^j = \Pi^k$ при $j \neq k$; при этом в формулировках последующих теорем удобно называть «параллельными» и совпадающие плоскости.

Как подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ сочленение тела и пластин определено формулой

$$G(h) = \Xi \cup \Omega_h^1 \cup \dots \cup \Omega_h^J, \tag{2}$$

однако далее различаем два типа *упругого сочленения*: пластины Ω_h^j пронизывают тело или усеченные пластины

$$\Omega^j(h) = \left\{x \in \Omega_h^j : y^j \in \omega^j(h)\right\} \tag{3}$$

вставлены в пазы $\xi^j(h) = \Xi \cap \Omega^j(h)$ глубиной $O(h)$. Подобласть $\omega^j(h)$ отрезана от области ω^j гладкой дугой $\upsilon^j(h) = \left\{y^j : s^j \in \Upsilon^j,\, n^j = hH_0^j(s^j)\right\}$, где (s^j, n^j) —

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00835).

криволинейные координаты, s^j — длина дуги на Υ^j, n^j — расстояние до Υ^j, взятое на множестве $\omega^j \setminus \overline{\Xi}$ со знаком минус, а H_0^j — гладкая положительная функция.

В обоих случаях конструкция (1) закреплена по частям $\Gamma_h^j = \{x \in \partial\Omega_h^j : y^j \in \gamma^j\}$ выступающих из тела Ξ боковых поверхностей пластин; здесь γ^j — непустая дуга на контуре $\partial\omega^j$, причем $\overline{\gamma^j} \subset \partial\omega^j \setminus \overline{\Xi}$.

Многие требования введены лишь для упрощения изложения — в разд. 6 они будут сняты.

В основном занимаемся более сложным случаем, когда пластины определены формулой (3). Пластины $\Omega^j(h)$ и тело $\Xi(h) = \Xi \setminus (\overline{\Omega^1(h)} \cup \dots \cup \overline{\Omega^J(h)})$ считаем изготовленными из контрастных упругих материалов, т. е. рассматриваем следующий энергетический функционал:

$$\mathscr{E}_\mu(u; G(h)) = \|D(\nabla_x)u^0; L_2(\Xi(h))\|^2 + \mu \sum_{j=1}^{J} \|D(\nabla_x)u^j; L_2(\Omega^j(h))\|^2. \tag{4}$$

Здесь u^0 и u^j — сужения на множества $\Xi(h)$ и $\Omega^j(h)$ поля смещений $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ из соболевского класса $H^1(G(h))^3$, $\mu > 0$ — относительная жесткость материала пластин, $\top$ — знак транспонирования, а 6×3-матрица $D(\nabla_x)$ дифференциальных операторов выглядит так:

$$D(\nabla_x)^\top = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \nabla_x = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}.$$

Иными словами, применяется алгебраическая форма записи [1, 2] упругих полей: вектор смещений интерпретируется как столбец в $\mathbb{R}^3$, а вместо тензора деформаций вводится столбец деформаций высотой 6,

$$D(\nabla_x)u = (\varepsilon_{11}(u), \varepsilon_{22}(u), \varepsilon_{33}(u), \varepsilon_{23}(u), \varepsilon_{31}(u), \varepsilon_{12}(u))^\top,$$
$$\varepsilon_{pq}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p}\right).$$

Еще одна похожая 3×6-матрица

$$d(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

фигурирует в определении $\mathscr{R} = \{u(x) = d(x)b : b \in \mathbb{R}^6\}$ линеала жестких смещений. Столбец b разбивается на два столбца b' и b'' высотой 3, первый из которых отвечает поступательным смещениям, а второй — вращательным. Отметим, что $D(\nabla_x)d(x)$ — нулевая матрица размером 6×6.

2. Анизотропные неравенства Корна. Известно (см. [3–5] и др.), что для поля $u \in \mathring{H}^1(G(h); \Gamma(h))^3$, обращающегося в нуль на множестве $\Gamma(h) = \Gamma_h^1 \cup \dots \cup \Gamma_h^J$, выполняется неравенство Корна

$$\|u; H^1(G(h))\|^2 \le C(h, \mu)\mathscr{E}_\mu(u; G(h)). \tag{5}$$

Однако обычные методы проверки неравенства (5) не позволяют выяснить, как множитель $C(h, \mu)$ зависит от формы области (2), в частности, от малого параметра h. Для тонких пластин ответ на вопрос о множителе $C(h, 1)$ был впервые дан, по-видимому, в работе [6], посвященной обоснованию теории пластин Кирхгофа.

Теорема 1 [6]. *Для поля* $u^j \in H^1(\Omega_h^j)^3$ *справедливо неравенство*

$$\|u^j; \Omega_h^j\|^2 \le c\mathscr{E}_1(u; \Omega_h), \tag{6}$$

в котором постоянная c *не зависит от вектор-функции* u *и параметра* $h \in (0,1]$, *а анизотропная соболевская норма из левой части имеет вид*

$$\|u^j; \Omega_h^j\| = \left\{ \int\limits_{\Omega_h^j} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{k=1}^{2} \left| \frac{\partial u_i^j}{\partial y_k^j} \right|^2 + h^2 \left| \frac{\partial u_i^j}{\partial z^j} \right|^2 + h^2 \left| \frac{\partial u_3^j}{\partial y_i^j} \right|^2 + |u_i^j|^2 \right) \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left| \frac{\partial u_3^j}{\partial z^j} \right|^2 + h^2 |u_3^j|^2 \right] dy^j dz^j \right\}^{1/2}. \tag{7}$$

Сформулированное утверждение впоследствии было усилено путем добавления в норму (7) весовых множителей, пропорциональных расстоянию до зоны защемления Γ_h^j, и исследования пластин с нерегулярными кромками (см. [7, 2, 8]). Так, теорема 1 сохраняет силу после замены пластин (1) пластинами (3) с переменными продольными сечениями.

Использование весовых анизотропных норм, в которых весовые множители различаются для поперечных и продольных смещений и зависят от направления дифференцирования, приобретает принципиальное значение при анализе сочленений упругих тел с различными предельными размерностями. Показательным в этом плане оказывается сочленение $G(h)$ упругого тела Ξ с тонкими стержнями (кактус с длинными иглами): в публикациях [9] и [10, 11], оперирующих с обычными соболевскими нормами, доказаны соответственно оценки $\beta(h) \ge ch^{10}$ и $\beta(h) \ge ch^8$ множителя в неравенстве

$$\beta(h)\|u; H^1(\Xi)\|^2 \le \mathscr{E}_1(u; G(h)). \tag{8}$$

На самом деле $\beta(h) \ge ch^4$ или даже $\beta(h) = O(h^2)$ при некоторых дополнительных ограничениях на конфигурацию игл (см. [12, 13]) и такие соотношения асимптотически точны!

В настоящей статье установлены весовые анизотропные неравенства Корна для сочленения (2). Соответствующие нормы для пластин уже предопределены теоремой 1, однако множитель $\beta(h,\mu)$ при норме $\|u; H^1(\Xi)\|$ в аналогичной (8) оценке существенно зависит от взаимного расположения пластин, способа их крепления и относительной жесткости. Сформулируем утверждение, относящееся к пластинам (1), которые внедрены в глубокие прорези $\Omega_h^j \cap \Xi$, и дающее разные ответы в двух геометрических ситуациях. В случае пластин (3), вставленных в мелкие пазы, количество различаемых форм увеличивается, а их описание значительно усложняется.

Теорема 2. *Для поля* $u \in \mathring{H}^1(G(h); \Gamma(h))^3$ *справедливо неравенство Корна*

$$\beta(h,\mu)\|u; H^1(\Xi)\|^2 + \mu \sum_{j=1}^{J} \|u^j; \Omega_h^j\|^2 \le c\mathscr{E}_\mu(u; G(h)), \tag{9}$$

где $\mathscr{E}_\mu(u; G(h))$ — *квадратичная форма (4), в которой* $\Xi(h) = \Xi \setminus \left(\overline{\Omega_h^1} \cup \dots \cup \overline{\Omega_h^J}\right)$, *а усеченные пластины* $\Omega^j(h)$ *заменены нетронутыми* Ω_h^j. *Постоянная* c *не зависит от параметров* $h \in (0, h_0]$, $\mu > 0$ *и вектор-функции* u, *а множитель* $\beta(h,\mu)$ *определяется следующим образом:*

1) *если среди плоскостей* $\Pi^1, \dots, \Pi^J$ *найдутся три разные плоскости, две из которых пересекаются, а третья не содержит линию пересечения целиком, то*

$$\beta(h,\mu) = \min\{1, h\mu\};$$

2) *если множества* $\omega^1, \dots, \omega^J$ *лежат на параллельных плоскостях или на плоскостях, пересекающихся по общей прямой, то*

$$\beta(h,\mu) = \min\{1, h^3\mu\}.$$

Доказательство теоремы 2 и проверка асимптотической точности неравенства (9) проведены в разд. 4 и 5. Асимптотический анализ сочленений с пластинами Ω^j_h проводился в [14, 15] и др., но аналогичные исследования в случае пластин $\Omega^j(h)$ автору неизвестны (разве лишь в статье [16] рассматривалась скалярная краевая задача для уравнения Пуассона).

3. Вспомогательные неравенства. На множестве Ξ представим поле смещений u в виде

$$u(x) = u^\perp(x) + d(x)b, \tag{10}$$

а столбец $b \in \mathbb{R}^6$ определим так:

$$b = \Big\{ \int\limits_\Xi d(x)^\top d(x)\, dx \Big\}^{-1} \int\limits_\Xi d(x)^\top u(x) dx. \tag{11}$$

Отметим, что в фигурных скобках стоит симметрическая положительно определенная матрица Грама $\boldsymbol{d}(\Xi)$, построенная по линейно независимым в $L_2(\Xi)^3$ столбцам матрицы d. Формулы (10) и (11) влекут за собой условие ортогональности

$$\int\limits_\Xi d(x)^\top u^\perp(x) dx = 0 \in \mathbb{R}^6,$$

которое, в свою очередь, обеспечивает соотношение

$$\|u^\perp; H^1(\Xi)\|^2 \le c\mathscr{E}_1(u^\perp;\Xi) = c\mathscr{E}_1(u;\Xi) \tag{12}$$

(см., например, [4]). Последнее равенство в (12) справедливо потому, что жесткое смещение $d(x)b$ порождает нулевые деформации.

Одномерное неравенство Харди

$$\int\limits_0^1 \rho^{-1}|\log\rho|^{-2}|U(\rho)|^2 d\rho \le 4\int\limits_0^1 \rho\Big|\frac{dU}{d\rho}(\rho)\Big|^2 d\rho \quad \forall U \in C_0^1[0,1)$$

приводит к оценке

$$h(1+|\log h|)\|u^\perp; L_2(\xi^j(h))\| \le c\big\|\rho_j^{-1}(1+|\log\rho_j|)^{-1}u^\perp; L_2(\Xi)\big\| \le c\|u^\perp; H^1(\Xi)\|, \tag{13}$$

где фигурируют весовой множитель $\rho_j(x) = \operatorname{dist}(x, \Upsilon^j)$ и паз $\xi^j(h) = \Omega^j(h)\cap\Xi$.

Следствие еще одного варианта одномерного неравенства Харди

$$h^{-1}\int\limits_0^h |V(n)|^2 dn \le C\int\limits_0^2 \Big(\Big|\frac{dV}{dn}(n)\Big|^2 + |V(n)|^2\Big) dn \quad \forall V \in C^1[0,2],$$

в котором $h \in (0,1]$, а C — абсолютная постоянная, гарантирует, что

$$\|u_1^j; L_2(\xi^j(h))\| + \|u_2^j; L_2(\xi^j(h))\| + h^2\|u_3^j; L_2(\xi^j(h))\| \le ch\,|\!|\!| u^j; \Omega_h^j |\!|\!|. \tag{14}$$

Множитель h^2 при третьем слагаемом слева, обусловленный строением нормы (7), не позволяет ограничиться применением формулы (14) во всех последующих выкладках. Далее понадобится еще одно неравенство, получающееся на основе иных соображений и дающее вместе с (14) правильные оценки компонент столбца b из представления (10). Именно, в обработке нуждается интеграл

$$I^j(u^j; Q^h) = \int\limits_{Q_h} \eta_2 u_3^j(y^j, z^j)\, dx, \tag{15}$$

где Q_h — прямой круговой цилиндр с радиусом основания Rh и высотой $2H$, а (η_1, η_2, ζ) — декартова система координат с началом в центре тяжести цилиндра Q_h, осью η_1, направленной вдоль его оси вращения, и осью ζ, параллельной оси z.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$|I^j(u^j; Q^h)| \le ch^4\Bigg(\sum_{i=1}^{2}\|u_i^j; L_2(Q_h)\|^2 + h^2\mathscr{E}_1(u^j; Q_h)\Bigg), \tag{16}$$

в котором величина c не зависит от параметра $h \in (0,1]$ и поля $u \in H^1(\Omega^j(h))^3$.

Доказательство. Пусть N — целая часть числа $h^{-1}H$. Разобьем цилиндр Q_h на N малых цилиндров $q_h^n = \{x : \eta_2^2 + \zeta^2 < R^2h^2, |\eta_1 - \eta_1^n| < N^{-1}H\}$ высотой $2N^{-1}H \in [2h, 4h)$. На множестве q_h^n представим поле u^j в аналогичном (10) виде

$$u^j(y^j, z^j) = u^{j\perp}(y^j, z^j) + d(\eta_1 - \eta_1^n, \eta_2, \zeta)b^n, \quad \int\limits_{Q_h} d(x)^\top u^{j\perp}(y^j, z^j)\, dx = 0 \in \mathbb{R}^6.$$

Растянув координаты $(\eta_1 - \eta_1^n, \eta_2, \zeta)$ в h^{-1} раз, обращаемся к соотношению (12), где Ξ — цилиндр q_1^n единичных размеров, и по возвращению к исходным координатам получаем неравенство

$$\|\nabla_x u^{j\perp}; L_2(q_h^n)\|^2 + h^{-2}\|u^{j\perp}; L_2(q_h^n)\|^2 \le c\mathscr{E}_1(u^{j\perp}; Q_h) = c\mathscr{E}_1(u^j; Q_h). \tag{17}$$

Отметим, что согласно результатам [5] постоянная c не зависит от параметра h, так как высота раздутого кругового цилиндра q_1^n принадлежит полуинтервалу $[2,4)$. Кроме того, подразумевая под u_3^j и $u_{\eta_2}^j$ проекции вектора u^j на оси ζ и η_2 соответственно, имеем

$$\int\limits_{Q_h}\big(\eta_2 u_3^j(y^j, z^j) + \zeta u_{\eta_2}^j(y^j, z^j)\big)\, dx = \int\limits_{Q_h}\big(\eta_2 u_3^{j\perp}(y^j, z^j) + \zeta u_{\eta_2}^{j\perp}(y^j, z^j)\big)\, dx. \tag{18}$$

Пояснение: ввиду центральной симметрии цилиндра интеграл

$$\int\limits_{q_h^n}\big\{\eta_2\big(b_3^n + \eta_2 b_4^n - (\eta_1 - \eta_1^n)b_5^n\big) + \zeta\big(b_2^n - \zeta b_4^n + (\eta_1 - \eta_1^n)b_6^n\big)\big\}dx = 0,$$

происходящий от жесткого смещения db^n, исчез из правой части (18). Суммируя равенства (18) по $n = 1, \dots, N$ и возводя сумму в квадрат, обнаруживаем, что

$$\Big|\int\limits_{Q_h} \eta_2 u_3^j(y^j, z^j)\,dx\Big|^2 \le c\Big\{\Big|\int\limits_{Q_h} \zeta u_{\eta_2}^{j\perp}(y^j, z^j)\,dx\Big|^2 + \Big(\sum_{n=1}^N h^{3/2}h\big\|u^{j\perp}; L_2(q_h^n)\big\|\Big)^2\Big\}$$

$$\le c\Big\{h^2h^2\big(\big\|u_1^{j\perp}; L_2(Q_h)\big\|^2 + \big\|u_2^{j\perp}; L_2(Q_h)\big\|^2\big) + Nh^5\sum_{n=1}^N \big\|u^{j\perp}; L_2(q_h^n)\big\|^2\Big\}.$$

Отсюда при учете формул (17) и $Nh \le 1$ выводим соотношение (16). $\square$

4. Оценки компонент столбца *b*. Составляющая $u^\perp$ разложения (10) обрабатывается при помощи неравенства (12). Для составляющей db имеем

$$\|db; H^1(\Xi)\| \le c\|b; \mathbb{R}^6\|. \tag{19}$$

Приступим к исследованию компонент столбца b. С этой целью выберем какой-либо круговой цилиндр Q_h^m внутри паза $\xi^j(h)$ и введем соответствующие координаты (η^m, ζ^m) (ср. пояснения к определению (15)).

Лемма 2 (см., например, [12] и [2, гл. 2]). *При замене координат $x \mapsto (\eta^m, \zeta^m) = \Theta^m(x - x^m)$, где Θ^m — ортогональная матрица размером 3×3 и x^m — центр тяжести цилиндра Q_h^m, жесткое смешение $d(x)b$ принимает вид $d(\eta^m, \zeta^m)b^m$, где $b^{m\prime} = \Theta^m d(x^m)b$ и $b^{m\prime\prime} = \Theta^m b''$ — столбцы высотой 3, составляющие столбец $b^m \in \mathbb{R}^6$.*

Умножим равенство (10) на 6×3-матрицу $d(\eta, \zeta)^\top$ и проинтегрируем по области Q_h. Обращая легко вычисляемую матрицу Грама

$$\boldsymbol{d}\big(Q_h^m\big) = \int\limits_{Q_h^m} d(\eta^m, \zeta^m)^\top d(\eta^m, \zeta^m)\,dx$$

$$= 2\pi R^2h^2H\operatorname{diag}\Big\{1, 1, 1, \frac{1}{2}R^2h^2, \frac{1}{3}H^2 + \frac{1}{4}R^2h^2, \frac{1}{3}H^2 + \frac{1}{4}R^2h^2\Big\}, \tag{20}$$

приходим к аналогичному (11) соотношению

$$b^m = \boldsymbol{d}\big(Q_h^m\big)^{-1}\int\limits_{Q_h^m} d(\eta^m, \zeta^m)^\top(u^j(y^j, z^j) - u^\perp(x))\,dx. \tag{21}$$

Применяя неравенства (12)–(14), сразу же выводим из формул (20) и (21), что

$$\big|b_i^m\big| \le c\boldsymbol{d}_{ii}\big(Q_h^m\big)^{-1}\operatorname{mes}_3 Q_h^m\int\limits_{Q_h^m}(|u^\perp(x)|^2 + |u^j(y^j, z^j)|^2)\,dx$$

$$\le ch^{-4}h^2(h^2(1 + |\log h|)^2\mathscr{E}_1(u; \Xi) + h\mathscr{E}_1(u^j; \Omega^j(h)))$$

$$\le c((1 + |\log h|)^2\max\{1, \mu^{-1}\}\mathscr{E}_\mu(u; \Xi) + h^{-1}\mu^{-1}\mathscr{E}_\mu(u^j; \Omega^j(h)))$$

$$\le c\max\{(1 + |\log h|)^2, h^{-1}\mu^{-1}\}\mathscr{E}_\mu(u; G(h)), \quad i = 1, 2. \tag{22}$$

Поскольку третье слагаемое в левой части (14) имеет «лишний» множитель h^2, повторение преобразований дает для компоненты b_3^m более «плохую» оценку

$$\big|b_3^m\big| \le c\max\{(1 + |\log h|)^2, h^{-3}\mu^{-1}\}\mathscr{E}_\mu(u; G(h)). \tag{23}$$

По тем же причинам компоненты b_6^m и b_5^m удовлетворяют неравенствам разного сорта:

$$\begin{aligned}\big|b_6^m\big| \le c\boldsymbol{d}_{66}\big(Q_h^m\big)^{-1}\operatorname{mes}_3 Q_h^m \\ \times \int\limits_{Q_h^m} \big(|u^\perp(x)|^2 + \big|\eta_1^m\big|^2\big|u_2^j(y^j,z^j)\big|^2 + \big|\eta_2^m\big|^2\big|u_1^j(y^j,z^j)\big|^2\big)\,dx \\ \le ch^{-2}\big(\big\|u^\perp; L_2\big(\xi_h^j\big)\big\|^2 + \big\|u_1^j; L_2\big(\xi_h^j\big)\big\|^2 + h^2\big\|u_2^j; L_2\big(\xi_h^j\big)\big\|^2\big) \\ \le c\max\{(1+|\log h|)^2, h^{-1}\mu^{-1}\}\mathscr{E}_\mu(u; G(h)), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\big|b_5^m\big| \le c\boldsymbol{d}_{55}\big(Q_h^m\big)^{-1}\operatorname{mes}_3 Q_h^m \\ \times \int\limits_{Q_h^m} \big(|u^\perp(x)|^2 + \big|\eta_1^m\big|^2\big|u_3^j(y^j,z^j)\big|^2 + |\zeta^m|^2\big|u_1^j(y^j,z^j)\big|^2\big)\,dx \\ \le ch^{-2}\big(\big\|u^\perp; L_2\big(\xi_h^j\big)\big\|^2 + \big\|u_3^j; L_2\big(\xi_h^j\big)\big\|^2 + h^2\big\|u_1^j; L_2\big(\xi_h^j\big)\big\|^2\big) \\ \le c\max\{(1+|\log h|)^2, h^{-3}\mu^{-1}\}\mathscr{E}_\mu(u; G(h)). \end{aligned}$$

Подчеркнем, что в отличие от η_2^m и ζ^m величина η_1^m не является малой на множестве Q_h^m.

Наконец,

$$\begin{aligned} b_4^m = \boldsymbol{d}_{55}\big(Q_h^m\big)^{-1}\bigg\{\int\limits_{Q_h^m}\big(\zeta^m\big\{u_{\eta_2}^\perp(x) - \big\langle u_{\eta_2}^\perp\big\rangle\big(\eta_1^m\big)\big\} - \eta_2^m\big\{u_3^\perp(x) - \big\langle u_3^\perp\big\rangle\big(\eta_1^m\big)\big\}\big)\,dx \\ - \int\limits_{Q_h^m}\zeta^m u_{\eta_2}^j(y^j,z^j)\,dx + \int\limits_{Q_h^m}\eta_2^m u_3^j(y^j,z^j)\,dx\bigg\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Последний и предпоследний интегралы из фигурных скобок оцениваются при помощи формул (16) и (14) соответственно. В первом интеграле функции $u_{\eta_2}^\perp$ и $u_3^\perp$ заменены разностями $u_{\eta_2}^\perp - \big\langle u_{\eta_2}^\perp\big\rangle$ и $u_3^\perp - \big\langle u_3^\perp\big\rangle$, где

$$\langle v\rangle(\eta_1) = (\pi R^2h^2)^{-1}\int\limits_{\{\eta_2^2+\zeta^2<R^2h^2\}} v(\eta,\zeta)\,d\eta_2 d\zeta.$$

Такая перестройка возможна потому, что средние величин ζ^m и η_2^m по сечениям цилиндра Q_h^m равны нулю. В итоге неравенство Пуанкаре

$$\big\|v - \langle v\rangle; L_2\big(Q_h^m\big)\big\| \le ch^2\big(\big\|\partial v/\partial\eta_2; L_2\big(Q_h^m\big)\big\| + \big\|\partial v/\partial\zeta; L_2\big(Q_h^m\big)\big\|\big)$$

используется вместо неравенства Харди (13), что позволяет избавиться от логарифмического множителя и вывести оценку

$$\begin{aligned}\big|b_4^m\big| \le ch^{-8}h^2\big(h^2h^2\|\nabla_x u^\perp; L_2(\Xi)\| + h^2\big(\big\|u_1^j; L_2(\xi^j(h))\big\|^2 \\ + \big\|u_2^j; L_2(\xi^j(h))\big\|^2 + h^2\mathscr{E}_1(u;\xi^j(h))\big) \\ \le ch^{-2}(\max\{1,\mu^{-1}\}\mathscr{E}_\mu(u;\Xi) + h^{-2}(h+h^2)\mu^{-1}\mathscr{E}_\mu(u^j;\Omega^j(h))) \\ \le ch^{-2}\max\{1, h^{-1}\mu^{-1}\}\mathscr{E}_\mu(u; G(h)). \end{aligned} \tag{26}$$

При этом мажоранта в (26) превосходит мажоранты в (22)–(25), а значит, в силу леммы 2 верны соотношения

$$\beta(h,\mu)|b^m| \le c\beta(h,\mu)|b| \le c\mathscr{E}_\mu(u;G(h)), \quad \beta(h,\mu) = h^2\min\{1,h\mu\}. \tag{27}$$

Теперь из формул (6), (12), (19) и (27_1) вытекает неравенство Корна

$$\beta(h,\mu)\|u;H^1(\Xi)\|^2 + \mu\sum_{j=1}^{J} \left|\!\left|\!\left| u^j;\Omega^j(h) \right|\!\right|\!\right|^2 \le c\mathscr{E}_\mu(u;G(h)), \tag{28}$$

причем формула (27) для множителя $\beta(h,\mu)$ получена без каких-либо геометрических ограничений и, вообще говоря, ее правая часть может быть и будет увеличена.

Предположим, что дуги $\Upsilon^1,\dots,\Upsilon^J$ не являются отрезками одной прямой, т. е. выполнено условие треугольника:

на кривых $\Upsilon^1,\dots,\Upsilon^J$ найдутся три точки, представляющие собой вершины невырожденного треугольника. (29)

Если Υ^1 — отрезок прямой, то для выполнения условия (29) необходимо, чтобы $J>1$, однако при искривленной дуге Υ^1 условие (29) соблюдено в любом случае.

Теперь помимо цилиндра Q_h^1 (положили $m=1$ в предшествующих формулах) внутри какого-нибудь паза $\xi^k(h)$ найдется такой цилиндр Q_h^2 с радиусом основания Rh и высотой $2H$, что его центр тяжести x^2 находится на положительном расстоянии $\lambda>0$ от оси $\{x:\eta_2^1=\zeta^1=0\}$ цилиндра Q_h^1. Заметим, что в силу леммы 2 столбцы b^1 и b^2 из представлений жесткого смешения $d(x)b$ в координатах (η^1,ζ^1) и (η^2,ζ^2) связаны равенством

$$(\Theta^{21})^{-1}b^{2\prime} = d(\eta^{12},\zeta^{12})b^1 = \begin{pmatrix} b_1^1+\zeta^{12}b_5^1-\eta_2^{12}b_6^1 \\ b_2^1-\zeta^{12}b_4^1+\eta_1^{12}b_6^1 \\ b_3^1+\eta_2^{12}b_4^1-\eta_1^{12}b_5^1 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

где $\Theta^{21}=(\Theta^1)^{-1}\Theta^2$ — ортогональная матрица поворотов при замене координат, а (η^{12},ζ^{12}) — координаты точки x^2 в системе (η^1,ζ^1). Поскольку $|\eta_2^{12}|^2+|\zeta^{12}|^2=\lambda^2$, соотношение (30) гарантирует, что

$$|b_4^1|^2 \le c\big(|b^{2\prime}|^2+|b^{1\prime}|^2+|b_5^1|^2+|b_6^1|^2\big). \tag{31}$$

Таким образом, применив формулы (22), (23) при $m=1,2$ и (24) при $m=1$, заключаем, что при весовом множителе

$$\beta(h,\mu) = \min\{(1+|\log h|)^{-2},h^3\mu\} \tag{32}$$

верны неравенства (27) и (28), вытекающие из проверенного в (31) соотношения

$$\beta(h,\mu)|b_4^1| \le c\mathscr{E}_\mu(u;G(h)).$$

Условие треугольника (29) допускает алгебраическую формулировку

$$\mathfrak{L}\{x\in\Upsilon^j \mid j=1,\dots,J\} = \mathbb{R}^3. \tag{33}$$

Иными словами, линейная оболочка векторов $x\in\Upsilon=\Upsilon^1\cup\dots\cup\Upsilon^J$ заполняет все пространство $\mathbb{R}^3$. Изучим сочленение (2) при другом, более ограничительном, требовании

$$\mathfrak{L}\{d(x)^\top e_i^j \mid x\in\Upsilon^j,\ i=1,2,\ j=1,\dots,J\} = \mathbb{R}^6, \tag{34}$$

где под e_i^j подразумеваются орты осей y_i^j в плоскости Π^j пластины $\Omega^j(h)$. Нетрудно убедиться в том, что равенство (33) влечет за собой равенство (34) (ср. с [12]).

Требование (34) означает, что существуют шесть точек $x^1,\dots,x^6\in\Upsilon$, для которых

$$\mathfrak{L}\{d(x^m)^\top e_i^j \mid i=1,2,\ m=1,\dots,6,\ x^m\in\Upsilon^j\}=\mathbb{R}^6. \tag{35}$$

Благодаря гладкости границ и положительности функций $H_\pm^j$, H_0^j найдутся такие число $R>0$ и шесть отрезков $\Lambda^1,\dots,\Lambda^6\in\mathbb{R}^3$ длиной $H>0$, что в случае $x\in\Upsilon^j$ отрезок Λ^m лежит на касательной к дуге Υ^j в точке x^m и делится этой точкой пополам, а прямой круговой цилиндр Q_h^m с осью Λ^m и радиусом основания Rh располагается внутри паза $\xi^j(h)$. Умножим равенство (10) на 6×3-матрицы $d(x)^\top e_i^j\big(e_i^j\big)^\top$, проинтегрируем произведения по цилиндру Q_h^m и просуммируем по $i=1,2,\ m=1,\dots,6$. В результате получим систему шести линейных алгебраических уравнений для столбца $b\in\mathbb{R}^6$:

$$Mb=f. \tag{36}$$

Здесь M — матрица размером 6×6, $f\in\mathbb{R}^6$ — столбец,

$$\begin{gathered}M=\sum_{m=1}^{6}M^m,\quad M^m=\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_h^m}d(x)^\top e_i^j\big(e_i^j\big)^\top d(x)\,dx,\\ f=\sum_{m=1}^{6}f^m,\quad f^m=-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_h^m}d(x)^\top e_i^j\big(e_i^j\big)^\top(u^\perp(x)-u^j(x))\,dx.\end{gathered} \tag{37}$$

Столбцы (37_2) обрабатываем при помощи оценок (13) и (14). Поскольку $\big(e_i^j\big)^\top u^j$ — проекции вектора u^j на плоскость Π^j, действуем аналогично выкладке (22) и находим, что

$$|f^m|^2\le ch^4\max\{(1+|\log h|)^2,h^{-1}\mu^{-1}\}\mathscr{E}_\mu(u;\Omega(h)). \tag{38}$$

Матрицы M^m из левой части формулы (37_1) удовлетворяют соотношению

$$\big\|M^m-2\pi R^2h^2Hd(x^m)^\top e_i^j\big(e_i^j\big)^\top d(x^m);\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^6\big\|\le ch^3,$$

обеспечивающему оценку

$$\|M^{-1};\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^6\|\le ch^{-2}\quad\text{при}\quad h\in(0,h_0]. \tag{39}$$

В самом деле, благодаря предположению (35) справедливо неравенство

$$\sum_{m=1}^{6}\sum_{i=1}^{2}b^\top d(x^m)^\top e_i^j\big(e_i^j\big)^\top d(x^m)b\ge c_0|b|^2,\quad c_0>0$$

(иначе линейные комбинации столбцов $d(x^m)^\top e_i^j$ не заполнят пространство $\mathbb{R}^6$). Следовательно,

$$\begin{aligned}b^\top Mb=\sum_{m=1}^{6}b^\top M^m b&\ge h^2\sum_{m=1}^{6}\sum_{i=1}^{2}\big\{\big|\big(e_i^j\big)^\top d(x^m)b\big|^2-ch|b|^2\big\}\\ &\ge c_1h^2(1-c_2h)|b|^2\ge\frac12 c_1h^2|b|^2\end{aligned}$$

при ограничении $h_0 \leq (2c_2)^{-1}$.

Итак, формулы (36)–(39) гарантируют справедливость оценки (27) и неравенства Корна (28) при таком весовом множителе:

$$\beta(h,\mu) = \min\{(1+|\log h|)^{-2}, h\mu\}. \tag{40}$$

В случае пластины (1), глубоко погруженной в тело Ξ, воспользуемся возможностью увеличить объем цилиндра. Именно, после параллельного переноса системы координат (y^j, z^j) всегда можно добиться того, чтобы цилиндр $Q_h^j = \{x : |y^j| < R,\ |z^j| < Hh\}$ с высотой $O(h)$ и радиусом основания $O(1)$ содержался в пересечении $\Xi \cap \Omega_h^j$. Теперь все элементы матрицы Грама

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}(Q_h^j) &= \int\limits_{Q_h^j} d(y^j, z^j)^\top d(y^j, z^j)\,dx \\ &= 2\pi R^2 Hh \operatorname{diag}\left\{1,1,1,\frac{1}{2}R^2, \frac{1}{3}H^2h^2 + \frac{1}{4}R^2, \frac{1}{3}H^2h^2 + \frac{1}{4}R^2\right\}\end{aligned}$$

оказываются величинами $O(h)$, а оценка (6) дополняется оценкой

$$\left\|u^\perp; L_2(\Omega_h^j \cap \Xi)\right\|^2 \leq ch\|u^\perp; H^1(\Xi)\|^2, \tag{41}$$

обеспеченной упоминавшимся следствием варианта неравенства Харди и заменяющей оценку (13). В результате соотношения

$$\begin{aligned}\left|b_k^j\right|^2 &\leq c\max\{1, h^{-1}\mu^{-1}\}\mathscr{E}_\mu(u; G(h)), \quad k = 1,2,6, \\ \left|b_l^j\right|^2 &\leq c\max\{1, h^{-3}\mu^{-1}\}\mathscr{E}_\mu(u; G(h)), \quad l = 3,4,5,\end{aligned} \tag{42}$$

а также утверждение п. 2 теоремы 2 становятся очевидными.

Займемся первым утверждением теоремы 2. Если плоскости Π^1 и Π^2 параллельны, но не совпадают, то в силу леммы 2 столбцы b^1 и $b^{2\prime}$ связаны формулой (30), где $\zeta^{12} \neq 0$, η_i^{12} — какие-то числа, а ортогональная матрица Θ^{12} имеет блочную структуру и ее правый нижний элемент равен единице. Следовательно,

$$\left|b_4^1\right|^2 + \left|b_5^1\right|^2 \leq c\left(\left|b_1^2\right|^2 + \left|b_2^2\right|^2 + \left|b_1^1\right|^2 + \left|b_2^1\right|^2 + \left|b_6^1\right|^2\right),$$

и в силу формул (42_1) при $j = 1, 2$ выполняется оценка

$$\left|b_4^1\right|^2 + \left|b_5^1\right|^2 \leq c\max\{1, h^{-1}\mu^{-1}\}\mathscr{E}_\mu(u; G(h)). \tag{43}$$

Если плоскости Π^1 и Π^3 пересекаются по оси абсцисс и угол θ между ними принадлежит интервалу $(0,\pi)$, то, меняя при необходимости направление оси z^3, получаем в силу леммы 2, что

$$b_6^3 = b_6^1\cos\theta - b_5^1\sin\theta, \quad \left|b_5^1\right|^2 \leq c\left(\left|b_6^3\right|^2 + \left|b_6^1\right|^2\right).$$

Таким образом, наличие плоскости, параллельной Π^1, или двух непараллельных (между собой) плоскостей, пересекающихся с Π^1, достаточно для выполнения неравенства (43). Условия п. 1 теоремы 2 обеспечивают при надлежащем выборе плоскости Π^1 одну из указанных ситуаций.

После того, как неравенство (43) установлено, еще раз рассмотрим плоскость Π^3 и столбец $b^{3\prime}$. По лемме 2

$$b_2^3 = \left(b_2^1 - x_3^{13}b_4^1 + x_1^{13}b_6^1\right)\cos\theta + \left(b_3^1 + x_2^{13}b_4^1 - x_1^{13}b_5^1\right)\sin\theta,$$

а значит, в силу оценок (43) и (42_1) при $j = 1, 2, 6$

$$\left|b_3^1\right|^2 \le c\left(\left|b_2^3\right|^2 + \left|b_2^1\right|^2 + |b^{1\prime\prime}|^2\right) \le c\max\{1, h^{-1}\mu^{-1}\}\mathscr{E}_\mu(u; G(h)).$$

Доказательство п. 1 теоремы 2 закончено.

5. Анизотропные неравенства Корна (продолжение). Выкладки, проведенные в предыдущем разделе, составляют доказательства теоремы 2 и следующей теоремы, относящейся к пластинам $\Omega^j(h)$, вставленным в неглубокие пазы.

Теорема 3. *Для поля $u \in \mathring{H}^1(G(h); \Gamma(h))^3$ справедливо неравенство Корна (28), в котором $\mathscr{E}_\mu(u; G(h))$ — квадратичная форма (4), постоянная c не зависит от параметров $h \in (0, h_0], \mu > 0$ и вектор-функции u, а множитель $\beta(h, \mu)$ имеет вид (27), если линии $\Upsilon^j = \omega^j \cap \partial\Xi$ лежат на общей прямой, или вид (32) и (40) в случае выполнения условий (33) = (29) и (34) соответственно.*

Множители $\beta(h, \mu)$, указанные теоремами 2 и 3, связаны следующим образом:

$$\min\{1, h^3\mu\} \le \min\{1, h\mu\},$$
$$h^2 \min\{1, h\mu\} \le \min\{(1 + |\log h|)^{-2}, h^3\mu\} \le \min\{(1 + |\log h|)^{-2}, h\mu\}.$$

Видно, что они возрастают по мере усиления требований, накладываемых на геометрическое строение сочленения. Заметим, что $h\mu$ и $h^3\mu$ — величины, пропорциональные жесткостям пластины на продольное растяжение и изгиб соответственно.

Проверка очередных утверждений, поясняющих требование (34) и условия теоремы 2, необременительна.

Лемма 3. 1. *Если дуги $\Upsilon^1, \dots, \Upsilon^J$ лежат в одной плоскости $\Pi = \{x : x_3 = 0\}$, то линейная оболочка из левой части (34) трехмерна и ее ортогональное дополнение натянуто на столбцы $\boldsymbol{e}_l = (\delta_{1,l}, \dots, \delta_{6,l})^\top$, где $l = 3, 4, 5$, а $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера. Жесткие смещения $d(x)\boldsymbol{e}_l$ соответствуют параллельному переносу плоскости Π и вращениям вокруг прямых, лежащих в этой плоскости.*

2. *Если дуги $\Upsilon^1, \dots, \Upsilon^J$ лежат в параллельных плоскостях $\Pi^j = \{x : x_3 = x_3^j\}$ и $x_3^1 \ne x_3^k$ при каком-то номере k, то линейная оболочка из левой части (34) пятимерна и ей ортогонален столбец $\boldsymbol{e}_3$, отвечающий параллельному переносу плоскостей.*

3. *Если дуги $\Upsilon^1, \dots, \Upsilon^J$ лежат в плоскостях Π^j, пересекающихся по оси аппликат $\Lambda = \{x : x_1 = x_2 = 0\}$, но $\Upsilon^j \setminus \Lambda \ne \varnothing$ по крайней мере для двух различных номеров j, то линейная оболочка из левой части (34) пятимерна и ей ортогонален столбец $\boldsymbol{e}_6$, отвечающий вращению вокруг прямой Λ.*

4. *Если среди $\Upsilon^1, \dots, \Upsilon^J$ имеются три дуги, содержащиеся в плоскостях Π^k, две из которых пересекаются, а третья не проходит через эту линию пересечения, и сами дуги не лежат целиком на линиях пересечения отобранных плоскостей, то требование (34) соблюдено.*

В отличие от условия треугольника условие (34) согласно п. 1 леммы 3 безразлично к искривленности дуг $\Upsilon^1, \dots, \Upsilon^J$.

Лемма 4. 1. *Если $J = 1$ и $\Pi^1 = \{x : x_3 = 0\}$, то подпространство*

$$\mathfrak{L}\left\{d(x)^\top e_i^j \mid x \in \Xi \cap \omega^j,\ i = 1, 2,\ j = 1, \dots, J\right\} \subset \mathbb{R}^6 \qquad (44)$$

трехмерно и его ортогональное дополнение натянуто на столбцы $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5$.

2. *Если $J > 1$ и $\Pi^1 = \{x : x_3 = 0\}$, а остальные плоскости $\Pi^2, \dots, \Pi^J$ параллельны Π^1 (пересекаются с Π^1 по оси абсцисс), но хотя бы одна из них не совпадает с Π^1, то подпространство* (44) *пятимерно и ортогонально столбцу $\boldsymbol{e}_3$ (столбцу $\boldsymbol{e}_4$).*

3. *Если выполнены условия п.* 1 *теоремы* 2, *то линейная оболочка* (44) *совпадает с евклидовым пространством $\mathbb{R}^6$.*

Последнее утверждение показывает, что условие «заполнения пространства $\mathbb{R}^6$» (ср. с формулами (34) и (44)) играет решающую роль при анализе любого сочленения массивного тела с пластинами.

Приведем несколько примеров, подтверждающих точность проверенных неравенств Корна и сформулированных геометрических требований. Сразу же отметим, что обосновать возникновение в (32) и (40) параметра $\log h$, унаследованного от неравенства Харди (13), автору не удалось (похожий вопрос с логарифмом остался нерешенным и в статье [5]). Сначала обсудим сочленения с пластинами, вставленными в неглубокие пазы.

Если пластины «жесткие» ($h\mu \geq 1$), то в случае $\Upsilon^1, \dots, \Upsilon^J \subset \{x : x_1 = x_2 = 0\}$ рассмотрим вектор смещений u^Ξ, определенный на теле и пластинах следующим образом:

$$u^\Xi(x) = \bigl(-X_h^\Xi(x)x_2, X_h^\Xi(x)x_1, 0\bigr)^\top,\ x \in \Xi, \quad u^\Xi(x) = 0,\ x \in \Omega^j(h). \tag{45}$$

Здесь $X_h^\Xi(x)$ — произведение разностей $1 - \chi(h^{-1}r_j)$, r_j — расстояние до (гладкой) дуги Υ^j, а $\chi \in C_0^\infty(-2, 2)$ — срезающая функция, $\chi(t) = 1$ при $|t| < 1$. Поле (45) превращает обе части неравенства (28) с множителем $\beta(h, \mu)$ из формулы (27), равным h^2, в величины того же порядка h^2. Одновременно поле (45) демонстрирует, что без условия треугольника множитель (32) недопустим.

Пусть теперь жесткость пластин на изгиб больше жесткости самого тела, т. е. $h^3\mu \geq (1 + |\log h|)^{-2}$ и величина (32) обращается в $(1 + |\log h|)^{-2}$. Любое смещение из линеала $\mathscr{R}$, например поворот вокруг оси x_3, фигурирующий в определении (45), умножим на срезку X_h^Ξ в области Ξ и продолжим нулем на области $\Omega^j(h)$ — для построенной вектор-функции обе части неравенства (28) с множителем $\beta(h, \mu) = 1$ станут равными $O(h^0)$.

Введем срезающие функции $\chi_j \in C^\infty(\omega^j)$, равные единице и нулю в окрестностях дуг $\overline{\Upsilon^j}$ и $\overline{\gamma^j}$ соответственно. Для столбца $b \in \mathbb{R}^6$ определим поле смещений u^Ω по формулам

$$u^\Omega(x) = d(x)b, \quad x \in \Xi,$$

$$u_i^{\Omega j}(x) = \chi^j(y^j)\bigl(b_i^j + (-1)^i y_{3-i}^j b_6^j\bigr) - z^j \frac{\partial}{\partial y_i^j}\chi^j(y^j)\bigl(b_3^j + y_2^j b_4^j - y_1^j b_5^j\bigr), \quad i = 1, 2, \tag{46}$$

$$u_3^{\Omega j}(x) = \chi^j(y^j)\bigl(b_3^j + y_2^j b_4^j - y_1^j b_5^j\bigr), \quad x \in \Omega^j(h),\ j = 1, \dots, J,$$

где b^j — столбец b, преобразованный согласно лемме 2 при замене координат $x \mapsto (y^j, z^j)$. Ясно, что

$$\|u^\Omega; H^1(\Xi)\| \geq c|b|, \quad \mathscr{E}_1(u^\Omega; \Xi) = 0.$$

Прямой подсчет выражений (7) и (4) приводит к соотношениям

$$C \,\|\!| u^j; \Omega^j(h) |\!\|^2 \geq h\bigl\{|b_1^j|^2 + |b_2^j|^2 + |b_6^j|^2 + h^2\bigl(|b_3^j|^2 + |b_4^j|^2 + |b_5^j|^2\bigr)\bigr\} \geq c\mathscr{E}_1(u; \Omega^j(h)),$$

где C и c — положительные постоянные.

При мягких ($h\mu < (1+|\log h|^2)^{-2}$) пластинах вектор-функция (46) указывает на асимптотическую точность неравенства (28) с множителем (40) и необходимость условия (34). В самом деле, последнее условие означает, что при любом столбце $b \in \mathbb{R}^6$ хотя бы одно из чисел $b_1^1, b_2^1, \dots, b_1^J, b_2^J$ отлично от нуля и, следовательно, обе части неравенства (28) с множителем $\beta(h,\mu) = h\mu$ будут $O(h\mu)$. Если же требование (34) нарушено, то найдется столбец $b \in \mathbb{R}^3 \times \{0\}^3$, для которого $b_i^j = 0$, $i = 1,2$, $j = 1,\dots,J$ (ср. с леммой 3), а множитель $\beta(h,\mu)$ в неравенстве (28) не может быть больше $h^3\mu$.

Теперь обратимся к глубоко посаженным пластинам (1). Всякая нетривиальная вектор-функция с носителем на множестве $\overline{\Xi} \setminus \big(\overline{\Omega_{h_0}^1} \cup \dots \cup \overline{\Omega_{h_0}^J}\big)$ демонстрирует точность неравенства (9) с множителем $\beta(h,\mu) = 1$ в пп. 1, 2 теоремы 2, когда соответственно жесткости пластин на растяжение и изгиб больше жесткости тела. Если $h\mu \ge 1$, но $h^3\mu < 1$, то годится поле смещений (46) при любом столбце $b \in \mathbb{R}^6$. Пусть теперь $h\mu < 1$. Для плоскостей $\Pi^1,\dots,\Pi^J$, параллельных плоскости $\{x : x_3 = 0\}$ или пересекающихся по оси абсцисс $\{x : x_2 = x_3 = 0\}$, возьмем поле (46) при $b = \boldsymbol{e}_3$ или $b = \boldsymbol{e}_5$ соответственно (ср. с леммой 4). В обоих случаях $b^p = 0$ при $p = 1,2,6$, а значит, правая часть неравенства (9) составляет $O(h^3\mu)$ и множитель $\beta(h,\mu) = h\mu$ неправомерен, т. е. геометрическое условие, сформулированное в п. 1 теоремы 2, оказывается необходимым.

6. Варианты и обобщения. Границы $\partial\Xi$ и $\partial\omega^j$ тела и продольных сечений пластин могут быть сильно липшицевыми, а функции $H_\pm^j, H_0^j$ — удовлетворять условию Липшица. Гладкость границ и функций использовалась лишь для того, чтобы сформулировать геометрические условия в терминах множеств $\Upsilon^j = \partial\Xi \cap \omega^j$ и ω^j. По утрате гладкости построение цилиндров Q_h^m становится проблематичным и при введении необходимых ограничений на структуру сочленения требуется предполагать существование цилиндров $Q_h^m \subset \xi^j(h)$ с нужными размерами и направлениями осей.

Допустимы локально периодические пластины, у которых периоды осцилляции границы сравнимы с малым параметром h (по поводу неравенств Корна для таких тонких областей см. [2, гл. 3] и [17]). Пластины не обязательно вставлять в пазы, но допустимо приклеивать встык к поверхности $\partial\Xi$; в этом случае вместо множеств $\Xi(h)$ и $\Omega^j(h)$ формула (4) содержит множества Ξ и $\Omega_h^j \setminus \Xi$. Подобное соединение можно осуществлять и при помощи точечной пайки диаметром $O(h)$ на расстояниях $O(h)$ или креплением пластин посредством вставки шипов в периодические пазы размером $O(h)$. Приемы, позволяющие перенести оценки с урезанной пластины $\Omega_h^j \setminus \Xi$ на пересечение окрестности дуги Υ с областью Ξ, разработаны в [2, гл. 3] и [18, 19].

Края некоторых из пластин $\Omega^j(h)$ и Ω_h^j, $j = 1,\dots,J$, могут быть свободными, т. е. условия $u(x) = 0$, $x \in \Gamma_h^j$, при некоторых индексах j могут отсутствовать. В этом случае объекты, соответствующие указанным индексам j, изымаются из требований (29) = (33) и (34). В последнем утверждении статьи содержатся неравенства Корна, обслуживающие незакрепленные пластины. Они вытекают из соотношений (13), (41) и теорем 3.2.1 и 3.3.3 из [2].

Теорема 4. *Для поля $u \in H^1\big(\Xi \cup \Omega_h^j\big)^3$ справедливы неравенства*

$$\| u^j; \Omega_h^j \|^2 \le c\big(\mathscr{E}_1\big(u; \Omega_h^j\big) + h\|u; H^1(\Xi)\|^2\big),$$

$$\| u^j; \Omega_h^j \|^2 \le c(\mathscr{E}_1(u; \Omega^j(h)) + (1 + |\log h|)^2 \|u; H^1(\Xi)\|^2),$$

причем постоянные c не зависят от параметров $h \in (0, h_0]$, $\mu > 0$ и вектор-функции u.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
2. *Назаров С. А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002.
3. *Friedrichs K. O.* On the boundary value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 441–471.
4. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Мир, 1980.
5. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 5. С. 55–98.
6. *Шойхет Б. А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37, № 5. С. 913–924.
7. *Назаров С. А.* Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1992. Т. 2, № 8. С. 19–24.
8. *Назаров С. А.* Оценки вторых производных собственных векторов для тонких анизотропных пластин с переменой толщиной // Зап. научн. семинаров ПОМИ РАН. 2004. Т. 308. С. 161–181.
9. *Cioranescu D., Oleinik O. A., Tronel G.* On Korn's inequalities for frame type structures and junctions // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1989. V. 309. P. 591–596.
10. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B.* Asymptotic representation of elastic fields in a multi-structure // Asymptotic Anal. 1995. V. 11. P. 343–415.
11. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B.* Asymptotic analysis of fields in multi-structures. Oxford: Clarendon Press, 1999.
12. *Nazarov S. A.* Korn's inequalities for junctions of spatial bodies and thin rods // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20, N 3. P. 219–243.
13. *Назаров С. А.* Неравенство Корна для упругого соединения тела со стержнем // Проблемы механики деформируемого твердого тела. СПб: Изд-во СПбГУ, 2002. С. 234–240.
14. *Caillerie D.* The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body // Math. Meth. Appl. Sci. 1980. V. 2, N 3. P. 251–270.
15. *Ciarlet P. G.* Plates and junctions in elastic multi-structures: An asymptotic analysis. Paris: Masson, 1988.
16. *Назаров С. А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 2 // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1997. № 20. С. 155–195.
17. *Акимова Е. А., Назаров С. А., Чечкин Г. А.* Асимптотика решения задачи о деформации произвольной локально периодической пластины // Тр. моск. мат. об-ва. 2004. Т. 65. С. 3–34.
18. *Назаров С. А., Слуцкий А. С.* Неравенство Корна для произвольной системы тонких искривленных стержней // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1319–1331.
19. *Назаров С. А.* Весовое анизотропное неравенство Корна для сочленения пластины со стержнями // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 4. С. 97–126.

Статья поступила 17 сентября 2004 г.

Назаров Сергей Александрович
Институт проблем машиноведения РАН,
Большой пр. В. О., 61, Санкт-Петербург 199178
serna@snark.ipme.ru