Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 535.59

ОБОСНОВАНИЕ ДИПОЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ГЕНЕРАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ПОГРУЖЕННОЙ СФЕРОЙ

Е. В. Пяткина

Аннотация: Для нестационарной задачи о движении твердой сферы под свободной поверхностью построено нелинейное дипольное приближение. Это приближение обосновано в классе аналитических функций, убывающих на бесконечности.

Ключевые слова: погруженная сфера, дипольное приближение, шкала банаховых пространств аналитических функций.

1. Введение и постановка задачи. В работе рассматривается математическая модель, описывающая неустановившееся безвихревое движение жидкости со свободной границей при наличии полностью погруженной сферы. Требуется найти гармоническую в области $\Omega(t) = \{\vec{x} = (x, z),\ x = (x_1, x_2) \mid -\infty < z < h(x,t),\ |\vec{x} - \vec{x}_c| > \varepsilon\}$ функцию $\Phi(\vec{x}, t)$ такую, что

$$\Phi_{x_1x_1} + \Phi_{x_2x_2} + \Phi_{zz} = 0,$$

для которой выполняются следующие граничные условия:

$$h_t + \Phi_{x_1}h_{x_1} + \Phi_{x_2}h_{x_2} = \Phi_z, \quad \Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + \mathrm{Fr}^{-2}\,h = 0 \quad \text{на } \Gamma(t),$$

$$\vec{n}\cdot(\nabla\Phi(x,z,t) - \vec{v}_c(t)) = 0 \quad \text{на } S_\varepsilon : |\vec{x} - \vec{x}_c| = \varepsilon,$$

$$|\nabla\Phi| \to 0, \quad h(x,t) \to 0 \quad \text{при } |x| + |z| \to \infty.$$

Также задаются начальные данные $h(x,0) = h_0(x)$ и $\Phi(x,z,0) = \Phi_0(x,z)$ и условия согласования начальных и граничных условий

$$\Delta\Phi_0 = 0, \quad \vec{n}\cdot(\nabla\Phi_0(x,z) - \vec{v}_c(0)) = 0.$$

В приведенной системе уравнением свободной поверхности жидкости $\Gamma(t)$ является $z = h(x,t)$. Известен вектор $\vec{x}_c = (a(t), c(t))$, задающий координаты центра сферы в соответствующий момент времени, где $a(t) = (a_1(t), a_2(t))$. Тогда $\vec{v}_c = (\vec{x}_c)'_t$ — скорость сферы. Через ε обозначен ее радиус, а через $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к ней. Декартова система координат вводится так, что плоскость Ox_1x_2 совпадает с невозмущенной свободной поверхностью, ось z направлена вертикально вверх. Ускорение свободного падения g направлено вниз вдоль оси z. Через $\mathrm{Fr} = V/\sqrt{gH}$ обозначен безразмерный параметр — число Фруда, где H — это расстояние от невозмущенной свободной поверхности

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ–440.2003.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00250).

до центра сферы в начальный момент времени в размерных переменных, V — некоторый выбранный масштаб скорости.

В задаче о движении тела под свободной поверхностью ранее было сделано следующее. В работе [1] задача о движении кругового цилиндра под свободной границей была исследована с помощью сведения исходной задачи к системе интегродифференциальных уравнений на поверхности жидкости. В [2] доказано существование решения задачи об обтекании вихря потоком идеальной жидкости со свободной границей над ровным дном. Там же дан обзор литературы, касающейся исследования существования и единственности решений задач с особенностями потенциала поля скоростей, движущимися под свободной границей.

Для задачи о всплывании пузыря к свободной поверхности жидкости было показано существование аналитического по времени решения и построена его начальная асимптотика в работе [3]. Так как при движении форма пузыря меняется, то к задаче с фиксированной областью определения неизвестных функций удалось перейти с помощью лагранжевых координат. Задача о движении газового пузыря в сферическом сосуде была рассмотрена в работе [4], где для доказательства теоремы существования и единственности методом аналитических мажорант построена подходящая шкала банаховых пространств.

Целью настоящей статьи является вывод и обоснование приближенной модели в задаче о генерации нелинейных волн погруженной сферой. Для этого в разд. 2 исходная задача сводится к системе дифференциальных уравнений на свободной поверхности и строится интегральное уравнение для замыкания полученной системы. В разд. 3 исследуются ядра интегрального уравнения и показывается способ построения различных приближений задачи. Там же выводится система уравнений нелинейного дипольного приближения, которая получается как главный член разложения ядер интегрального уравнения по степеням безразмерного радиуса ε. В разд. 4 выводится оценка решения интегрального уравнения в классе аналитических функций, убывающих на бесконечности. В заключительном разд. 5 на основании абстрактной формы теоремы Коши — Ковалевской, доказанной Л. В. Овсянниковым [5], обосновывается построенное дипольное приближение.

2. Сведение на границу и построение интегрального уравнения для оператора «нормальная производная». В исходной задаче область определения искомой функции $\Phi(x, h(x,t), t)$ является неизвестной. От этого можно избавиться с помощью метода, использованного в [6]. Введем вспомогательные функции $\varphi(x,t) = \Phi(x, h(x,t), t)$, $\psi(x,t) = \Phi_z(x, h(x,t), t)$. Тогда исходная задача распадается на две: задачу Коши для функций $h(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ и смешанную краевую задачу для уравнения Лапласа в области $\Omega(t)$. С помощью формул

$$\Phi_t = \varphi_t - \psi h_t, \quad \Phi_{x_1} = \varphi_{x_1} - \psi h_{x_1}, \quad \Phi_{x_2} = \varphi_{x_2} - \psi h_{x_2}$$

исключим Φ из условий на свободной границе исходной задачи. Получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$h_t = -\nabla\varphi \cdot \nabla h + (1 + |\nabla h|^2)\psi, \tag{1}$$

$$\varphi_t = -\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 - \mathrm{Fr}^{-2}\, h + \frac{1}{2}(1 + |\nabla h|^2)\psi^2.$$

Вместе с начальными данными

$$h(x,0) = h_0(x), \quad \varphi(x,0) = \Phi_0(x, h_0(x))$$

систему (1) можно трактовать как нелокальную задачу Коши, решение которой описывает эволюцию свободной поверхности и значение потенциала на ней. Эту систему уравнений можно замкнуть относительно функций $\varphi(x,t)$ и $h(x,t)$, поскольку функция $\psi(x,t)$ однозначно через них определяется. Для нахождения $\psi(x,t)$ согласно определению этой функции необходимо решить краевую задачу для функции Φ, удовлетворяющей уравнению Лапласа в области Ω и следующим граничным условиям:

$$\Phi = \varphi(x) \quad \text{на } \Gamma, \qquad \vec{n}\cdot\nabla\Phi = \vec{n}\cdot\vec{v}_c \quad \text{на } S_\varepsilon, \qquad |\nabla\Phi| \to 0 \quad \text{при } |x|+|z|\to\infty.$$

К функции Φ применима формула Грина

$$4\pi\Phi(\vec{x}) = \int\limits_S G(\vec{x},\vec{y})\vec{n}\cdot\nabla\Phi(\vec{y})\,dS - \int\limits_S \Phi(\vec{y})\vec{n}\cdot\nabla G(\vec{x},\vec{y})\,dS,$$

где $\vec{x}=(x,z)$, $\vec{y}=(y,h(y))$, $y=(y_1,y_2)$, $S=\Gamma(t)\cup S_\varepsilon$, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе S, $G(\vec{x},\vec{y})$ — функция Грина внешней задачи Неймана для шара [7]:

$$G(\vec{x},\vec{y}) = G_1(\vec{x},\vec{y}) + G_2(\vec{x},\vec{y}).$$

Здесь

$$G_1(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}, \quad G_2(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\varepsilon}{|\vec{x}-\vec{x}_c||(\vec{x}-\vec{x}_c)^* - (\vec{y}-\vec{x}_c)|} + \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{|\vec{x}-\vec{x}_c||\vec{y}-\vec{x}_c| - (\vec{x}-\vec{x}_c,\vec{y}-\vec{x}_c)}{\varepsilon^2 + |\vec{x}-\vec{x}_c||(\vec{x}-\vec{x}_c)^* - (\vec{y}-\vec{x}_c)| - (\vec{x}-\vec{x}_c,\vec{y}-\vec{x}_c)}.$$

Звездочка означает инверсию $(\vec{x}-\vec{x}_c)^* = \varepsilon^2(\vec{x}-\vec{x}_c)/|\vec{x}-\vec{x}_c|^2$ точки $\vec{x}$ относительно сферы S_ε.

Так как по построению $\vec{n}\cdot\nabla G(\vec{x},\vec{y})|_{S_\varepsilon}=0$, один из интегралов по поверхности сферы обращается в нуль, а второй является решением задачи о движении сферы в безграничном потоке жидкости:

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_\varepsilon} G(\vec{x},\vec{y})\vec{n}\cdot\nabla\Phi(\vec{y})\,dS = -\frac{\varepsilon^3\vec{v}_c\cdot(\vec{x}-\vec{x}_c)}{2|\vec{x}-\vec{x}_c|^3}.$$

Тогда в формуле Грина остаются интегралы только по свободной поверхности,

$$4\pi\Phi(\vec{x}) = \int\limits_{\Gamma(t)} G(\vec{x},\vec{y})\vec{n}\cdot\nabla\Phi(\vec{y})\,dS - \int\limits_{\Gamma(t)} \Phi(\vec{y})\vec{n}\cdot\nabla G(\vec{x},\vec{y})\,dS - 2\pi\frac{\varepsilon^3\vec{v}_c\cdot(\vec{x}-\vec{x}_c)}{|\vec{x}-\vec{x}_c|^3}.$$

Преобразуем последнюю формулу, используя явное представление для вектора нормали к свободной поверхности и элемента площади $d\Gamma$:

$$\vec{n} = (1+|\nabla h|^2)^{-\frac12}\vec{\nu}, \quad \vec{\nu} = (-\nabla h, 1), \quad d\Gamma = (1+|\nabla h|^2)^{\frac12}\,dy_1dy_2,$$

и продифференцируем полученное равенство по z. Получим

$$4\pi\Phi_z(\vec{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} G_{1z}(\vec{x},\vec{y})\vec{\nu}\cdot\nabla\Phi(\vec{y})\,dy_1dy_2 - \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Phi(\vec{y})\vec{\nu}\cdot\nabla G_{1z}(\vec{x},\vec{y})\,dy_1dy_2 + f(\vec{x}), \quad (2)$$

где функция

$$f(\vec{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} G_{2z}(\vec{x},\vec{y})\vec{\nu}\cdot\nabla\Phi(\vec{y})\,dy_1dy_2$$

$$
- \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Phi(\vec{y})\vec{\nu} \cdot \nabla G_{2z}(\vec{x},\vec{y})\, dy_1 dy_2 - 2\pi\varepsilon^3 \left\{ \frac{\vec{v}_c \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c)}{|\vec{x} - \vec{x}_c|^3} \right\}_z
$$

непрерывно меняется при стремлении точки $\vec{x}$ к поверхности $\Gamma(t)$. Для того чтобы выяснить поведение остальных слагаемых в (2) при стремлении $\vec{x}$ к $\Gamma(t)$, необходимо представить интегралы с G_1 в виде суммы потенциала простого слоя, его производных и потенциала двойного слоя:

$$
\begin{aligned}
4\pi\Phi_z(\vec{x}) = f(\vec{x}) &- \int\limits_{\Gamma(t)} \Phi_{y_3}(\vec{y}) \frac{d}{dn_{\vec{y}}} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right] dS \\
&+ \frac{h_{x_1}}{\sqrt{1 + |\nabla_x h|^2}} \int\limits_{\Gamma(t)} \frac{\Phi_{y_1}(\vec{y})}{\sqrt{1 + |\nabla_y h|^2}} \frac{d}{dn_{\vec{x}}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}\, dS \\
&- \sqrt{\frac{1 + h_{x_2}^2}{1 + |\nabla_x h|^2}} \int\limits_{\Gamma(t)} \frac{\Phi_{y_1}(\vec{y})}{\sqrt{1 + |\nabla_y h|^2}} \frac{d}{d\tau_{\vec{x}}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}\, dS \\
&+ \frac{h_{x_2}}{\sqrt{1 + |\nabla_x h|^2}} \int\limits_{\Gamma(t)} \frac{\Phi_{y_2}(\vec{y})}{\sqrt{1 + |\nabla_y h|^2}} \frac{d}{dn_{\vec{x}}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}\, dS \\
&- \sqrt{\frac{1 + h_{x_1}^2}{1 + |\nabla_x h|^2}} \int\limits_{\Gamma(t)} \frac{\Phi_{y_2}(\vec{y})}{\sqrt{1 + |\nabla_y h|^2}} \frac{d}{d\tau_{\vec{x}}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}\, dS \\
&- \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_x h|^2}} \int\limits_{\Gamma(t)} \frac{\Phi_{y_1} h_{y_1} + \Phi_{y_2} h_{y_2}}{\sqrt{1 + |\nabla_y h|^2}} \frac{d}{dn_{\vec{x}}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}\, dS \\
&- \sqrt{\frac{|\nabla_x h|^2}{1 + |\nabla_x h|^2}} \int\limits_{\Gamma(t)} \frac{\Phi_{y_1} h_{y_1} + \Phi_{y_2} h_{y_2}}{\sqrt{1 + |\nabla_y h|^2}} \frac{d}{d\tau_{\vec{x}}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}\, dS.
\end{aligned}
$$

В этой формуле значки $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в обозначениях нормальной и касательной производных, а также x и y в обозначениях градиентов указывают, по каким переменным ведется дифференцирование.

Устремляя точку $\vec{x}$ к свободной поверхности и учитывая скачок потенциала двойного слоя, равный величине $-2\pi\Phi_z$, получаем уравнение, замыкающее систему (1) дифференциальных уравнений на свободной поверхности:

$$
\begin{aligned}
2\pi\psi(x,t) = &- \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{h(x,t) - h(y,t)}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} [(1 + |\nabla h|^2)\psi - \nabla h \cdot \nabla\varphi]\, dy_1 dy_2 \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(x - y) \cdot \nabla\varphi(y,t)}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}\, dy_1 dy_2 - \frac{2\pi\varepsilon^3 c'(t)}{|\vec{x} - \vec{x}_c|^3} + 6\pi \frac{\varepsilon^3 (h(x,t) - c(t))}{|\vec{x} - \vec{x}_c|^5} \vec{v}_c \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c) \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^2} G_{2z}(\vec{x},\vec{y}) [(1 + |\nabla h|^2)\psi - \nabla h \cdot \nabla\varphi]\, dy_1 dy_2 - \int\limits_{\mathbb{R}^2} \vec{\nu} \cdot \nabla G_{2z}(\vec{x},\vec{y}) \varphi(y,t)\, dy_1 dy_2.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Решение этого уравнения реализует действие оператора «нормальная производная» $\psi = N(h, \varepsilon, \vec{x}_c, \vec{v}_c)\varphi$, сопоставляющего функциям φ и h, координатам центра сферы, скорости ее движения и безразмерному радиусу ε значение функции ψ.

Слагаемые в правой части уравнения (3) естественно разбиваются на три группы. В первой из них все величины не зависят явно от ε. Они сохраняются и в том случае, когда радиус сферы равен нулю, при этом получается уравнение для задачи о свободных волнах. Вторая группа — внеинтегральные слагаемые — является решением задачи о движении сферы в безграничной жидкости. Слагаемые первых двух групп образуют уравнение для классического дипольного приближения. В этом приближении вместо выполнения граничного условия на сфере предполагается, что она при движении под свободной поверхностью заменяется тем же диполем, что и при движении в безграничной жидкости. Последние два интеграла в правой части уравнения (3) отвечают за взаимодействие сферы и свободной поверхности и исчезают, когда $\varepsilon = 0$. Наличие последних двух интегралов в правой части (3) означает, что рассматривается задача с точным выполнением условий на границе области Ω.

Уравнения (1), (3) образуют замкнутую систему. Решив ее, с помощью формулы

$$
\begin{aligned}
4\pi\Phi(\vec{x},t) = &-\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}[(1+|\nabla h|^2)\psi - \nabla h\cdot\nabla\varphi]\,dy_1dy_2 \\
&+\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)\cdot\nabla h(y,t)}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}\varphi(y,t)\,dy_1dy_2 - \int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{(z-h(y,t))}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}\varphi(y,t)\,dy_1dy_2 \\
&-\frac{2\pi\varepsilon^3\vec{v}_c\cdot(\vec{x}-\vec{x}_c)}{|\vec{x}-\vec{x}_c|^3} + \int\limits_{\mathbb{R}^2} G_2(\vec{x},\vec{y})[(1+|\nabla h|^2)\psi - \nabla h\cdot\nabla\varphi]\,dy_1dy_2 \\
&-\int\limits_{\mathbb{R}^2}\vec{\nu}\cdot\nabla G_2(\vec{x},\vec{y})\varphi(y,t)\,dy_1dy_2 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

(в этой формуле $\vec{x} = (x_1, x_2, z) \in \Omega(t)$) можно восстановить решение смешанной краевой задачи для потенциала скорости жидкости всюду в области течения.

3. Мультипольное разложение потенциала скорости жидкости. В этом разделе показывается, что точное выполнение граничных условий задачи соответствует предположению, что в центре сферы сосредоточено бесконечное число мультиполей.

Введем обозначения

$$
\cos\gamma = \frac{(\vec{x}-\vec{x}_c, \vec{y}-\vec{x}_c)}{|\vec{x}-\vec{x}_c||\vec{y}-\vec{x}_c|}, \quad t = \frac{\varepsilon^2}{|\vec{x}-\vec{x}_c||\vec{y}-\vec{x}_c|}.
$$

По построению функция $G_2(\vec{x},\vec{y})$ аналитична при $t < 1$ и может быть представлена в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда. Так как точка $\vec{y}$ в интегральном уравнении и в формуле Грина находится на поверхности $\Gamma(t)$, то требуемое неравенство автоматически выполняется для всех $\vec{x}$, принадлежащих как $\Omega(t)$, так и $\Gamma(t)$. Тогда первое из слагаемых, составляющих функцию $G_2(\vec{x},\vec{y})$, представляется в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{|\vec{x}-\vec{x}_c||(\vec{x}-\vec{x}_c)^*-(\vec{y}-\vec{x}_c)|} &= \frac{\varepsilon}{|\vec{x}-\vec{x}_c||\vec{y}-\vec{x}_c|} \\
&+\frac{\varepsilon}{|\vec{x}-\vec{x}_c||\vec{y}-\vec{x}_c|}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\varepsilon^{2n}(\varepsilon^2-2(\vec{x}-\vec{x}_c,\vec{y}-\vec{x}_c))^n}{|\vec{x}-\vec{x}_c|^{2n}|\vec{y}-\vec{x}_c|^{2n}}.
\end{aligned}
$$

Второе слагаемое преобразуется к виду

$$\ln \frac{\varepsilon^2 + |\vec{x}-\vec{x}_c||(\vec{x}-\vec{x}_c)^* - (\vec{y}-\vec{x}_c)| - (\vec{x}-\vec{x}_c, \vec{y}-\vec{x}_c)}{|\vec{x}-\vec{x}_c||\vec{y}-\vec{x}_c| - (\vec{x}-\vec{x}_c, \vec{y}-\vec{x}_c)}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n \right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!} \frac{t^{n+1}(1-\cos\gamma)^n}{(1-t)^{2n}} \right)^k.$$

Введенные ранее обозначения были использованы в последней формуле для сокращения записи. После дальнейших преобразований функция $G_2(\vec{x}, \vec{y})$ может быть представлена в виде ряда по степеням ε:

$$\begin{aligned} G_2(\vec{x}, \vec{y}) = {} & \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^3 (\vec{x}-\vec{x}_c, \vec{y}-\vec{x}_c)}{|\vec{x}-\vec{x}_c|^3 |\vec{y}-\vec{x}_c|^3} - \frac{\varepsilon^5}{|\vec{x}-\vec{x}_c|^3 |\vec{y}-\vec{x}_c|^3} \\ & + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-1}}{|\vec{x}-\vec{x}_c|^n |\vec{y}-\vec{x}_c|^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \frac{k!}{i_1! \ldots i_n!} \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} C_n^k (-2)^k \varepsilon^{4n-2k+1} \frac{(\vec{x}-\vec{x}_c, \vec{y}-\vec{x}_c)^k}{|\vec{x}-\vec{x}_c|^{2n+1} |\vec{y}-\vec{x}_c|^{2n+1}} \\ & + \sum_{i=4}^{\infty} \sum_{k=1}^{[i/2]} \frac{(-1)^k}{k} \frac{k!}{j_2! \ldots j_i!} \sum_{m=0}^{\sum_{q=2}^{i} [(q-1)/2] \cdot j_q} B_{k,i,m,j_2,\ldots,j_i} \varepsilon^{2i-2m-1} \frac{(\vec{x}-\vec{x}_c, \vec{y}-\vec{x}_c)^m}{|\vec{x}-\vec{x}_c|^i |\vec{y}-\vec{x}_c|^i}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $i_1 + 2i_2 + \cdots + ni_n = n$, $2j_2 + \ldots + ij_i = i$, $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k$, $j_2 + \ldots + j_i = k$. Здесь $B_{k,i,m,j_2,\ldots,j_i}$ — числовые коэффициенты:

$$\begin{aligned} B_{k,i,m,j_2,\ldots,j_i} = \sum_{m_2=\max\{0, m - \sum\limits_{q=2, q\neq 2}^{i} [\frac{q-1}{2}] \cdot j_q\}}^{\min(m,0)} \cdots \sum_{m_{i-1}=\max\{0, m - \sum\limits_{q=2, q\neq i-1}^{i} [\frac{q-1}{2}] \cdot j_q\}}^{\min(m, [\frac{q-1}{2}] \cdot j_i)} A_{2,m_2,j_2} \\ \times \cdots \times A_{i-1,m_{i-1},j_{i-1}} \cdot A_{i, m-m_2-\cdots-m_{i-1}, j_i}, \end{aligned}$$

$$A_{p,l_p,j_p} = C_{j_p}^{k_1} C_{j_p-k_1}^{k_2} \ldots C_{j_p-k_1-\cdots-k_{[\frac{p-1}{2}]-1}}^{k_{[\frac{p-1}{2}]}} a_{p,0}^{j_p-(k_1+\cdots+k_{[\frac{p-1}{2}]})} a_{p,1}^{k_1} \ldots a_{p,[\frac{p-1}{2}]}^{k_{[\frac{p-1}{2}]}},$$

$$k_1 + 2k_2 + \cdots + \left[\frac{p-1}{2}\right] k_{[\frac{p-1}{2}]} = l_p,$$

где $0 \le l_p \le [\frac{p-1}{2}] \cdot j_p$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_{[\frac{p-1}{2}]} \le j_p$,

$$a_{p,j} = (-1)^j \sum_{\max(1,j)}^{p-j-1} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!} C_{n+p-j-2}^{p-j-n-1} C_n^j,$$

$i_1, \ldots, i_n, j_2, \ldots, j_i, k_1, \ldots, k_{[\frac{p-1}{2}]}$ — целые неотрицательные числа, $[\nu]$ — целая часть числа ν.

Таким образом, можно сделать вывод, что точное выполнение граничного условия на сфере соответствует предположению, что в центре сферы сосредоточено бесконечное число мультиполей. Мощности мультиполей определяются в результате подстановки представления (5) в формулу (4) и, следовательно, являются функционалами мгновенной формы свободной поверхности и скорости жидкости на ней.

Нелинейное дипольное приближение рассматриваемой задачи получается при удержании в уравнении (3) главного члена разложения $G_2(\vec{x},\vec{y})$ по степеням ε:

$$G_2(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^3(\vec{x}-\vec{x}_c(t),\vec{y}-\vec{x}_c(t))}{|\vec{x}-\vec{x}_c(t)|^3|\vec{y}-\vec{x}_c(t)|^3}. \tag{6}$$

В этом случае функция потенциала скорости жидкости имеет вид

$$\begin{gathered}4\pi\Phi(x,z) = \Phi_{\mathrm{reg}}(x,z) + \Phi_{\mathrm{dip}}(x,z) \\ + \frac{\varepsilon^3(\vec{x}-\vec{x}_c)}{2|\vec{x}-\vec{x}_c|^3}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{(\vec{y}-\vec{x}_c)}{|\vec{y}-\vec{x}_c|^3}[(1+|\nabla h|^2)\psi - \nabla h\cdot\nabla\varphi]\,dy_1dy_2 \\ - \frac{\varepsilon^3(\vec{x}-\vec{x}_c)}{2|\vec{x}-\vec{x}_c|^3}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\vec{\nu}\varphi(y)}{|\vec{y}-\vec{x}_c|^3}\,dy_1dy_2 + \frac{3\varepsilon^3(\vec{x}-\vec{x}_c)}{|\vec{x}-\vec{x}_c|^3}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{(\vec{y}-\vec{x}_c)}{|\vec{y}-\vec{x}_c|^5}(\vec{y}-\vec{x}_c)\cdot\vec{\nu}\varphi(y)\,dy_1dy_2,\end{gathered}$$

где функция

$$\begin{gathered}\Phi_{\mathrm{reg}}(x,z) = \int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}[(1+|\nabla h|^2)\psi - \nabla h\cdot\nabla\varphi]\,dy_1dy_2 \\ - \int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{z-h(y)}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}\varphi(y)\,dy_1dy_2 + \int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{(x-y)\cdot\nabla h}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}\varphi(y)\,dy_1dy_2\end{gathered}$$

непрерывна в $\Omega(t)$. Это приближение соответствует замене условия Неймана на S_ε предположением о том, что в центре сферы находится диполь. Его мощность является суммой мощностей диполя, моделирующего движение сферы в безграничной жидкости со скоростью $\vec{v}_c$:

$$\Phi_{\mathrm{dip}}(x,z) = -2\pi\varepsilon^3\frac{\vec{v}_c\cdot(\vec{x}-\vec{x}_c)}{|\vec{x}-\vec{x}_c|^3},$$

и индуцированного диполя с моментом

$$\begin{gathered}\vec{M}_{\mathrm{ind}}(t) = \frac{\varepsilon^3}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{(\vec{y}-\vec{x}_c)}{|\vec{y}-\vec{x}_c|^3}[(1+|\nabla h|^2)\psi - \nabla h\cdot\nabla\varphi]\,dy_1dy_2 - \frac{\varepsilon^3}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\vec{\nu}\varphi(y)}{|\vec{y}-\vec{x}_c|^3}\,dy_1dy_2 \\ + 3\varepsilon^3\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{(\vec{y}-\vec{x}_c)}{|\vec{y}-\vec{x}_c|^5}(\vec{y}-\vec{x}_c)\cdot\vec{\nu}\varphi(y)\,dy_1dy_2.\end{gathered}$$

Наличие индуцированного диполя определяет отличие выведенного приближения от классического дипольного приближения.

Пример. В работе [8] построена начальная по времени асимптотика решения задачи о равноускоренном движении сферы из состояния покоя. В нелинейном дипольном приближении мощность индуцированного диполя, вычисленная по последней формуле с точностью до t^6, имеет вид

$$\vec{M}_{\mathrm{ind}} = \left(M_{\mathrm{ind}}^{[1]}, M_{\mathrm{ind}}^{[2]}, M_{\mathrm{ind}}^{[3]}\right),$$

где

$$M_{\mathrm{ind}}^{[1]} = \frac{1}{8}\pi\varepsilon^3\frac{A_1}{|\vec{A}|}t - \frac{1}{16}\,\mathrm{Fr}^{-2}\,\pi\varepsilon^3\frac{A_1}{|\vec{A}|}t^3 + O(t^6),$$

$$M_{\text{ind}}^{[2]} = \frac{1}{8}\pi\varepsilon^3\frac{A_2}{|\vec{A}|}t - \frac{1}{16}\,\mathrm{Fr}^{-2}\,\pi\varepsilon^3\frac{A_2}{|\vec{A}|}t^3 + O(t^6),$$
$$M_{\text{ind}}^{[3]} = \frac{1}{6}\pi\varepsilon^3\frac{A_3}{|\vec{A}|}t - \frac{5}{24}\,\mathrm{Fr}^{-2}\,\pi\varepsilon^3\frac{A_3}{|\vec{A}|}t^3 + O(t^6).$$

Здесь $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ — вектор ускорения сферы. В качестве масштаба скорости выбрана величина $\sqrt{|\vec{A}|H}$, и поэтому число Фруда Fr равно $\sqrt{|\vec{A}|/g}$.

Аналогично дипольному строится следующее приближение задачи, когда в решении слагаемые седьмого и выше порядков малости по параметру ε считаются пренебрежимо малыми. В этом случае потенциал скорости жидкости представляется в виде

$$4\pi\Phi(x,z,t) = \Phi_{\text{reg}}(x,z,t) - 2\pi\varepsilon^3\frac{\vec{v}_c(t)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_c)}{|\vec{x}-\vec{x}_c(t)|^3} + \frac{\varepsilon^3\vec{M}_{\text{ind}}(t)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_c(t))}{|\vec{x}-\vec{x}_c(t)|^3}$$
$$+ \sum_{i+k+l=2,\,i\geq 0,\,k\geq 0,\,l\geq 0}\varepsilon^5 M_{i,k,l}(t)\frac{\partial^2}{\partial x_1^i\partial x_2^k\partial z^l}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_c(t)|}.$$

Здесь $\Phi_{\text{reg}}(x,z,t)$ и $\vec{M}_{\text{ind}}(t)$ определяются по тем же формулам, что и в нелинейном дипольном приближении, а коэффициенты $M_{i,k,l}(t)$ являются функционалами мгновенной формы свободной поверхности и скорости жидкости на ней. По ним определяются зависящие от t мощность и оси квадруполя.

Подставив в интегральное уравнение (3) функцию $G_2(\vec{x},\vec{y})$ вида (6), получим приближенную систему интегродифференциальных уравнений (1), (3). Назовем ее *дипольным приближением* P_{dip}. В этом случае граничные условия на сфере и свободной поверхности выполняются с точностью до ε^5.

Система (1), (3), в которой ядро $G_2(\vec{x},\vec{y})$ определяется по формуле (5), соответствует задаче о генерации нелинейных волн погруженной сферой в точной постановке, т. е. в этом случае предполагается точное выполнение граничных условий на сфере и свободной поверхности. Назовем эту систему P_{sf}. Потенциал скорости жидкости задачи в точной постановке дается формулой (4).

Далее обосновывается дипольное приближение задачи о генерации волн погруженной сферой, т. е. показывается

1) существование единственного решения точной и приближенной задач с одинаковыми начальными данными;

2) сходимость решения точной задачи к решению приближенной как ε^5 при стремлении моделирующего параметра ε к нулю.

4. Оценка оператора «нормальная производная». Пусть B_ρ, $\rho > 0$, — банахово пространство аналитических функций, убывающих на бесконечности, с конечной нормой

$$\|u\|_\rho = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{\rho|\xi|}|\hat{u}(\xi)|\,d\xi, \tag{7}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\hat{u}$ — преобразование Фурье функции u:

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi\cdot x}u(x)\,dx.$$

Норма в B_ρ является аналитической функцией параметра ρ. Кроме того, она мультипликативна, т. е. $\|u_1u_2\|_\rho \leq \|u_1\|_\rho\|u_2\|_\rho$ для любых $u_1, u_2 \in B_\rho$. Для $u = (u_1, u_1) \in B_\rho \times B_\rho$ положим $\|u\|_\rho = \|u_1\|_\rho + \|u_2\|_\rho$.

Рассмотрим задачу Коши об отыскании элемента $u(t)$ в шкале банаховых пространств $B_0 = \bigcup\limits_{\rho>0} B_\rho$, удовлетворяющего уравнениям

$$\frac{du}{dt} = F(u,t), \quad u(0) = u_0. \tag{8}$$

Обозначим через $O_\rho(r)$ открытый шар радиуса r с центром в нуле в пространстве B_ρ, и пусть $O(r,\rho_0) = \bigcup\limits_{0<\rho\le\rho_0} O_\rho(r)$. Отображение $F : O(r,\rho_0) \mapsto B_0$ назовем *квазидифференциальным оператором*, если существует такая константа $Q > 0$, с которой для любых $(u_1, u_2) \in O_\rho(r) \times O_\rho(r)$, $\rho < \rho_0$,

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_\rho \le Q\left(1 + \frac{\partial}{\partial\rho}\right)[(1 + \|u_1\|_\rho + \|u_2\|_\rho)\|u_1 - u_2\|_\rho]. \tag{9}$$

Отображение $F : O(r,\rho_0) \times [0,T] \mapsto B_0$ назовем *непрерывным* по t, если для любых $\rho \le \rho_0$, $u \in O_\rho(r)$ и $t \in [0,T]$ будет

$$\|F(u, t+\tau) - F(u,t)\|_\rho \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to 0.$$

Пусть $\rho_0 > 0$ и $k > 0$. Обозначим через $\Delta(\rho_0, k)$ треугольник в плоскости переменных ρ_0 и t:

$$\Delta(\rho_0, k) = \{(\rho, t) \mid \rho > 0,\ t > 0,\ \rho + kt \le \rho_0\}. \tag{10}$$

Теорема Овсянникова [5] (абстрактная форма теоремы Коши — Ковалевской). *Пусть $F : O(r,\rho_0) \times [0,T] \mapsto B_0$ — квазидифференциальный оператор с константой Q, непрерывный по t, и пусть $F(u_0, t) \in B_{\rho_0}$ для любого $t \in [0,T]$, а начальные данные u_0 принадлежат $O_{\rho_0}(r)$. Тогда задача (8) имеет единственное решение $u(t)$, принадлежащее $C^1([0,t^*]; B_\rho)$ для $(\rho, t^*) \in \Delta(\rho_0, k)$ и допускающее оценку*

$$\|u(t) - u_0\|_\rho \le \frac{1}{k} \int\limits_\rho^{\rho+kt} e^\sigma \sup_{t\in[0,T]} \|F(u_0,t)\|_\sigma \, d\sigma. \tag{11}$$

Константа k определяется формулой

$$k = \max\left\{\frac{\rho_0}{T}, Q(1+4r), \frac{\rho_0 e^{\rho_0}}{r} \sup_{t\in[0,T]} \|F(u_0,t)\|_{\rho_0}\right\}. \tag{12}$$

Представим интегральное уравнение (3) в операторной форме:

$$\psi = A_0\psi + B_0\varphi + w_{\mathrm{dip}} + A_\varepsilon \Lambda(1 + |\nabla h|^2)\psi - A_\varepsilon \Lambda(\nabla h)\nabla\varphi + B_\varepsilon\varphi, \tag{13}$$

где

$$w_{\mathrm{dip}} = -\frac{\varepsilon^3 c'(t)}{|\vec{x} - \vec{x}_c|^3} + 3\frac{\varepsilon^3(h(x,t) - c(t))}{|\vec{x} - \vec{x}_c|^5} \vec{v}_c \cdot (\vec{x} - \vec{x}_c), \tag{14}$$

$$A_0\psi = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{h(x,t) - h(y,t)}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} (1 + |\nabla h(y,t)|^2)\psi(y,t)\, dy_1 dy_2,$$

$$B_0\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y) + (h(x,t) - h(y,t))\nabla h(y,t)}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \nabla\varphi(y,t)\, dy_1 dy_2,$$

$$A_\varepsilon u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} G_{2z}(\vec{x},\vec{y})u(y,t)\,dy_1dy_2, \tag{15}$$

$$B_\varepsilon \varphi = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \vec{\nu}\cdot\nabla G_{2z}(\vec{x},\vec{y})\varphi(y,t)\,dy_1dy_2, \tag{16}$$

обозначение $\Lambda(f)$ использовано для оператора умножения на функцию f.

Из разложения (5) ядра $G_2(\vec{x},\vec{y})$ по степеням параметра ε видно, что операторы A_ε и B_ε имеют сходную структуру. Введем интегральный оператор

$$\begin{aligned} P_\alpha u = {} & \frac{(x_1-a_1)^{\alpha_{x_1}}(x_2-a_2)^{\alpha_{x_2}}(h(x)-c)^{\alpha_z}}{\{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(h(x)-c)^2\}^{\frac{l}{2}+\beta_1}} \\ & \times\int\limits_{R_2}\frac{(y_1-a_1)^{\alpha_{y_1}}(y_2-a_2)^{\alpha_{y_2}}(h(y)-c)^{\alpha_\zeta}}{\{(y_1-a_1)^2+(y_2-a_2)^2+(h(y)-c)^2\}^{\frac{l}{2}+\beta_2}}(\vec{x}-\vec{x}_c,\vec{y}-\vec{x}_c)^k u(y)\ dy_1dy_2, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\alpha=(k,l,\alpha_{x_1},\alpha_{x_2},\alpha_z,\alpha_{y_1},\alpha_{y_2},\alpha_\zeta,\beta_1,\beta_2)$ — мультииндекс. Индексы β_1 и β_2 могут быть равны либо нулю, либо единице, $0\le\alpha_{x_1}+\alpha_{x_2}+\alpha_z\le 2$, $0\le\alpha_{y_1}+\alpha_{y_2}+\alpha_\zeta\le 2$. Например, для оператора

$$P_\alpha u = \frac{(h(x)-c)}{|\vec{x}-\vec{x}_c|^{2n+3}}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{(\vec{x}-\vec{x}_c,\vec{y}-\vec{x}_c)^k}{|\vec{y}-\vec{x}_c|^{2n+1}}u(y)\,dy_1dy_2$$

мультииндекс α имеет вид $\alpha=(k,2n+1,0,0,1,0,0,0,1,0)$.

Используя введенный оператор и учитывая представление (5) ядра G_2 в виде ряда по степеням параметра ε, получим следующий вид интегральных операторов A_ε и B_ε:

$$A_\varepsilon u = A_{\rm dip}u + R_{A_\varepsilon}u,\quad B_\varepsilon u = B_{\rm dip}u + R_{B_\varepsilon}u.$$

Здесь $A_{\rm dip}u$ и $B_{\rm dip}u$ являются значениями соответственно операторов Au и Bu в дипольном приближении и представляют собой величины порядка ε^3:

$$A_{\rm dip}u = \frac{\varepsilon^3}{4\pi}P_{0,3,0,0,0,0,0,1,0,0}u - \frac{3\varepsilon^3}{4\pi}P_{1,3,0,0,1,0,0,0,1,0}u,$$

$$\begin{aligned} B_{\rm dip}u = {} & -\frac{\varepsilon^3}{4\pi}P_{0,3,0,0,0,0,0,0,0,0}u - \frac{3\varepsilon^3}{2\pi}(P_{0,3,0,0,0,1,0,1,0,0}\Lambda(h_{y_1})u \\ & \qquad + P_{0,3,0,0,0,0,1,1,0,0}\Lambda(h_{y_2})u - P_{0,3,0,0,0,0,0,2,0,0}u) \\ & - \frac{3\varepsilon^3}{4\pi}(P_{0,3,1,0,1,0,0,0,1,0}\Lambda(h_{y_1})u + P_{0,3,0,1,1,0,0,0,1,0}\Lambda(h_{y_2}u) - P_{0,3,0,0,2,0,0,0,1,0}u) \\ & + \frac{9\varepsilon^3}{2\pi}(P_{1,3,0,0,1,1,0,0,0,0}\Lambda(h_{y_1})u + P_{1,3,0,0,1,0,1,0,0,0}\Lambda(h_{y_2})u - P_{1,3,0,0,1,0,0,1,0,0}u). \end{aligned}$$

Операторы $R_{A_\varepsilon}u$ и $R_{B_\varepsilon}u$ состоят из слагаемых пятого и выше порядка по ε и находятся подстановкой (5) в (15) и (16) соответственно.

Оценка оператора $P_\alpha u$ и условия, при которых она справедлива, указаны в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть* $c^*=\max\limits_{t\in[0,T]}|c(t)|$, $c_0=\min\limits_{t\in[0,T]}|c(t)|$. *Пусть* $u\in B_\rho(\mathbb{R}^2)$, $h\in O_\rho(r)$, *где* $0<\rho\le\rho_0<c_0$, *причем выполняется условие*

$$0<r<-c^*+c^*\sqrt{1+\left(\frac{c_0-\rho_0}{2\pi c^*}\right)^2}. \tag{18}$$

Если $l+2\beta_1-(k+\alpha_{x_1}+\alpha_{x_2})\geq 2$, $l+2\beta_2-(k+\alpha_{y_1}+\alpha_{y_2})>2$, *то для оператора* $P_\alpha u$ *справедлива оценка*

$$\|P_\alpha u\| \leq \mu_{P_\alpha}(\|h\|, c^*, c_0, \rho)\|u\|, \tag{19}$$

где функция $\mu_{P\alpha}$ *имеет вид*

$$\mu_{P\alpha} = 8\pi^3\left(\frac{2\pi}{(c_0-\rho-\|h\|)^2}\right)^{l+2\beta_1+2\beta_2} \times \frac{3^k(28c^*)^{k+\alpha_{x_1}+\alpha_{x_2}+1}(\|h\|+c^*)^{2k+\alpha_z+\alpha_\zeta}}{((c_0-\rho)^2-4\pi^2(\|h\|^2+2\|h\|c^*))^{\frac{k+\alpha_{x_1}+\alpha_{x_2}}{2}+1}}.$$

(Здесь и далее индекс ρ в обозначении нормы опущен.)

Доказательство. Обозначим через

$$Q_{i,j,k,l,m}(x,\alpha) = \frac{(x_1-a_1)^i(x_2-a_2)^j\alpha^k}{\{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\alpha^2\}^{\frac{l}{2}+m}}$$

ядро интегрального оператора $P_\alpha u$, где i, j, k, l, m — целые неотрицательные числа. Тогда оценка оператора $P_\alpha u$ разбивается на несколько этапов. Запишем $P_\alpha u$ в следующем виде:

$$P_\alpha u = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} C_k^i C_i^j Q_{j+\alpha_{x_1},i-j+\alpha_{x_2},k-i+\alpha_z,l,\beta_1}(x,h(x)-c) \times \int\limits_{R_2} Q_{j+\alpha_{y_1},i-j+\alpha_{y_2},k-i+\alpha_\zeta,l,\beta_2}(y,h(y)-c)u(y)\,dy_1dy_2. \tag{20}$$

Ясно, что надо, во-первых, оценить интеграл

$$\int\limits_{R_2} Q_{j+\alpha_{y_1},i-j+\alpha_{y_2},k-i+\alpha_\zeta,l,\beta_2}(y,h(y)-c)u(y)\,dy_1dy_2,$$

являющийся функционалом некоторой функции $u(y)$, принадлежащей пространству $B_\rho(R^2)$, а во-вторых, получить оценку нормы функций $Q_{0,0,0,1,0}(x,h(x)-c)$ и $Q_{j,l-j,0,l,1}(x,\alpha)$, где для второй функции выполняются условия $\alpha>0$, $l\geq 0$, $0\leq j\leq l$. Тогда, представив аналитическую в окрестности $h=0$ функцию $Q_{j,l-j,0,l,1}(x,h(x)-c)$ в виде ряда Тейлора по степеням функции h, получим оценку мажорантного типа для $Q_{j,l-j,0,l,1}(x,h(x)-c)$, а затем и для оператора $P_\alpha u$.

Условие для индексов $l+2\beta_2-(k+\alpha_{y_1}+\alpha_{y_2})>2$ используется при выводе следующей оценки функционала:

$$\left|\int\limits_{R_2} Q_{j+\alpha_{y_1},i-j+\alpha_{y_2},k-i+\alpha_\zeta,l,\beta_2}(y,h(y)-c)u(y)\,dy_1dy_2\right| \leq 4\pi(\|h\|+c^*)^{k-i+\alpha_\zeta}(c_0-\|h\|)^{i+\alpha_{y_1}+\alpha_{y_2}-l-2\beta_2}\|u\|. \tag{21}$$

Для того чтобы найти оценку нормы функции $Q_{0,0,0,1,0}(x,h(x)-c)$, воспользуемся равенством

$$\frac{1}{\{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(h(x)-c)^2\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2} e^{-i(x-a)\cdot\xi}\frac{e^{-(h(x)-c)|\xi|}}{|\xi|}\,d\xi_1 d\xi_2.$$

Следовательно,

$$Q_{0,0,0,1,0}(x,h(x)-c)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}h^n(x)p_n(x-a),$$

где

$$p_n(x-a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2}e^{-i(x-a)\cdot\xi}|\xi|^{n-1}e^{-|c||\xi|}\,d\xi_1d\xi_2,$$

откуда сразу получаем преобразование Фурье введенной функции

$$\hat{p}_n(\xi)=|\xi|^{n-1}e^{-|c||\xi|}.$$

Тогда

$$\|Q_{0,0,1,0}(x,h(x)-c)\|\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\|h\|^n\int\limits_{R^2}e^{\rho|\xi|}|\xi|^{n-1}e^{-|c||\xi|}\,d\xi_1d\xi_2.$$

После вычисления интеграла и суммирования ряда получим оценку

$$\|Q_{0,0,0,1,0}(x,h(x)-c)\|\le\frac{2\pi}{c_0-\rho-\|h\|},\tag{22}$$

которая справедлива при условии, что $h\in B_\rho(R^2)$ и $0<\rho\le\rho_0<c_0$, причем $\|h\|<c_0-\rho_0$. Условие на норму функции h, необходимое для оценки (22), слабее, чем условие (18).

Для получения оценки нормы функции $Q_{j,l-j,0,l,1}(x,\alpha)$ необходимо вычислить преобразование Фурье указанной функции. Оно имеет различный вид для четных и нечетных значений l. Если l нечетное, то

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_{j,l-j,0,l,1}&(x,\alpha)(\xi)\\&=e^{ia\xi}\frac{i}{\pi}\sum_{q=0}^{[l/2]}\sum_{n=\max(0,2q-l+j)}^{\min(j,2q)}C_j^nC_{l-j}^{2q-n}(-1)^{j-n}\xi_1^{l-j-2q+2n}\xi_2^{j+2q-2n}\\&\qquad\times\sum_{\gamma=0}^{q}C_q^\gamma(-1)^{q-\gamma}\Gamma\left(\frac{l}{2}-\gamma\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\&\qquad\times\sum_{\kappa=0}^{\gamma}C_\gamma^\kappa(-1)^{\gamma-\kappa}\frac{\alpha^{\gamma-\kappa+1/2}|\xi|^{-l+\gamma-\kappa+1/2}}{2^{\gamma-\kappa+1/2}\Gamma(\frac{l}{2}-\kappa+1)}K_{\kappa-\gamma+\frac{1}{2}}(\alpha|\xi|).\end{aligned}$$

При четном l имеем

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_{j,l-j,0,l,1}(x,\alpha)&=e^{ia\xi}\frac{1}{\pi}\sum_{q=0}^{l/2}\sum_{n=\max(0,2q-l+j)}^{\min(j,2q)}C_j^nC_{l-j}^{2q-n}(-1)^{j-n}\xi_1^{l-j-2q+2n}\xi_2^{j+2q-2n}\\&\times\sum_{\gamma=0}^{q}C_q^\gamma(-1)^{q-\gamma}\Gamma\left(\frac{l}{2}-\gamma+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\&\qquad\times\sum_{\kappa=0}^{\gamma}C_\gamma^\kappa(-1)^{\gamma-\kappa}\frac{\alpha^{\gamma-\kappa}|\xi|^{-l+\gamma-\kappa}}{2^{\gamma-\kappa}\Gamma(\frac{l}{2}-\kappa+1)}K_{\kappa-\gamma}(\alpha|\xi|),\end{aligned}$$

где $K_\nu(z)$ — функция Макдональда. Поскольку функции Макдональда на бесконечности убывают как экспонента, для нормы функции $Q_{j,l-j,0,l,1}(x,\alpha)$ удается получить оценку

$$\|Q_{j,l-j,0,l,1}(x,\alpha)\| \le 2\pi^2 \frac{(28c^*)^{l+1}}{(c_0-\rho)^{l+2}}. \tag{23}$$

Последнее неравенство справедливо при $\rho < c_0$ и $c_0 \le \alpha \le c^*$.

Теперь для оценки нормы функции $Q_{j,l-j,0,l,1}(x,h(x)-c)$ преобразуем ее к следующему виду:

$$Q_{j,l-j,0,l,1}(x,h(x)-c) = Q_{j,l-j,0,l,1}(x,c)\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k((h^2-2hc)Q_{0,0,0,2,0}(x,c))^k\right\}^{l/2+1}.$$

Тогда при $0 \le j \le l$

$$\|Q_{j,l-j,0,l,1}(x,h(x)-c)\| \le \|Q_{j,l-j,0,l,1}(x,c)\|\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\|h^2-2hc\|^k\|Q_{0,0,0,1,0}(x,c)\|^{2k}\right\}^{l/2+1}.$$

Отсюда, воспользовавшись оценкой (23), получаем

$$\|Q_{j,l-j,0,l,1}(x,h(x)-c)\| \le 2\pi^2 \frac{(28c^*)^{l+1}}{((c_0-\rho)^2-4\pi^2(\|h\|^2+2\|h\|c^*))^{l/2+1}}. \tag{24}$$

При выполнении условия (18) знаменатель в последней оценке положителен.

Равенство (20) дает следующую оценку:

$$\|P_\alpha u\| \le \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} C_k^i C_i^j(\|h\|+c^*)^{k-i+\alpha_z}\|Q_{j+\alpha_{x_1},i-j+\alpha_{x_2},0,l,\beta_1}(x,h(x)-c)\| \times \left|\int_{\mathbb{R}_2} Q_{j+\alpha_{y_1},i-j+\alpha_{y_2},k-i+\alpha_\zeta,l,\beta_2}(y,h(y)-c)u(y)\,dy_1dy_2\right|.$$

При $l+2\beta_1-(k+\alpha_{x_1}+\alpha_{x_2}) \ge 2$ последнее неравенство можно продолжить, получив

$$\|P_\alpha u\| \le \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i} C_k^i C_i^j(\|h\|+c^*)^{k-i+\alpha_z}\|Q_{j+\alpha_{x_1},i-j+\alpha_{x_2},0,i+\alpha_{x_1}+\alpha_{x_2},1}(x,h(x)-c)\| \times \|Q_{0,0,0,1,0}(x,h(x)-c)\|^{l+2\beta_1-(i+\alpha_{x_1}+\alpha_{x_2}+2)} \times \left|\int_{\mathbb{R}_2} Q_{j+\alpha_{y_1},i-j+\alpha_{y_2},k-i+\alpha_\zeta,l,\beta_2}(y,h(y)-c)u(y)\,dy_1dy_2\right|.$$

Подставив сюда оценки (21)–(23), приходим к неравенству (19), завершающему доказательство леммы 1.

Лемма 2. *Если $u \in O_\rho(r)$, где r удовлетворяет условию (18), выполнены условия леммы 1 и траектория движения сферы является гладкой функцией времени на некотором промежутке, т. е. $(a_1(t),a_2(t),c(t)) \in (C^1[0,T])^3$, то оператор $P_\alpha u$ непрерывен по t.*

Доказательство. Покажем, что

$$\lim_{\tau\to 0}\|P_\alpha(u,t+\tau)-P_\alpha(u,t)\| = 0. \tag{25}$$

Для этого используем формулу конечных приращений

$$P_\alpha(u,t+\tau)-P_\alpha(u,t)=\tau\int\limits_0^1 P'_{\alpha t}(u,t+\omega\tau)\,d\omega. \tag{26}$$

Сначала найдем производную по t ядра $Q_{i,j,k,l,m}$:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{i,j,k,l,m}&=-i\dot{a}_1Q_{i-1,j,k,l,m}-j\dot{a}_2Q_{i,j-1,k,l,m}\\&\quad-k\dot{c}Q_{i,j,k-1,l,m}+(l+2m)\dot{a}_1Q_{i+1,j,k,l,m+1}\\&\quad+(l+2m)\dot{a}_2Q_{i,j+1,k,l,m+1}+(l+2m)\dot{c}Q_{i,j,k+1,l,m+1}.\end{aligned} \tag{27}$$

Нетрудно проверить, что в правой части равенства (27) присутствуют ядра, индексы которых удовлетворяют неравенствам леммы 1, если этим неравенствам удовлетворяет ядро $Q_{i,j,k,l,m}$. Из представления (20) ясно, что этого достаточно, чтобы для нормы оператора $P'_{\alpha t}(u,t)$ была справедлива равномерная по t оценка в пространстве B_ρ, аналогичная (19): существует такое $M>0$, не зависящее от t, что $\|P'_{\alpha t}(u,t)\|_\rho<M$. Тогда из формулы (26) следует, что

$$\|P_\alpha(u,t+\tau)-P_\alpha(u,t)\|\le|\tau|\int\limits_0^1\|P'_{\alpha t}(u,t+\omega\tau)\|d\omega<|\tau|M.$$

Полученная оценка доказывает равенство (25). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если функция h принадлежит $O_\rho(r)$ при $0<\rho\le\rho_0<c_0$, где r удовлетворяет условию (18), то функция w_{dip} принадлежит пространству B_ρ, причем выполняется оценка*

$$\|w_{\mathrm{dip}}\|\le\varepsilon^3\max_t|v_c(t)|W(c_0,c^*,\rho,\|h\|),$$

где

$$W(c_0,c^*,\rho,\|h\|)=2\left(\frac{2\pi}{c_0-\rho-\|h\|}\right)^5\frac{(28c^*)^2(\|h\|+c^*)^2}{((c_0-\rho)^2-4\pi^2(\|h\|^2+2\|h\|c^*))^{3/2}}.$$

Доказательство. Из оценок (22) и (24) для функций $f_1(x)$ и $f_3(x)$ соответственно получаем

$$\begin{aligned}\|w_{\mathrm{dip}}\|&\le2\pi\varepsilon^3\max_t|v_c(t)|\|Q_{0,0,0,3,0}(x,h(x)-c)\|\\&\quad+6\pi\varepsilon^3\max_t|v_c(t)|\{\|Q_{1,0,1,5,0}(x,h(x)-c)\|\\&\quad+\|Q_{0,1,1,5,0}(x,h(x)-c)\|+\|Q_{0,0,2,5,0}(x,h(x)-c)\|\}\\&\le2\pi\varepsilon^3\max_t|v_c(t)|\left(\frac{2\pi}{c_0-\rho-\|h\|}\right)^3+6\pi\varepsilon^3\max_t|v_c(t)|(\|h\|+c^*)\\&\times\biggl\{2\pi^2\left(\frac{2\pi}{c_0-\rho-\|h\|}\right)^2\frac{(28c^*)^2}{((c_0-\rho)^2-4\pi^2(\|h\|^2+2\|h\|c^*))^{3/2}}+2\pi^2\left(\frac{2\pi}{c_0-\rho-\|h\|}\right)^2\\&\times\frac{(28c^*)^2}{((c_0-\rho)^2-4\pi^2(\|h\|^2+2\|h\|c^*))^{3/2}}+(\|h\|+c^*)\left(\frac{2\pi}{c_0-\rho-\|h\|}\right)^5\biggr\}\\&\le2\varepsilon^3\max_t|v_c(t)|\left(\frac{2\pi}{c_0-\rho-\|h\|}\right)^5\frac{(28c^*)^2(\|h\|+c^*)^2}{((c_0-\rho)^2-4\pi^2(\|h\|^2+2\|h\|c^*))^{3/2}}.\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Нетрудно проверить, что в выражениях для A_ε и B_ε присутствуют операторы типа $P_\alpha u$ с мультииндексами α, удовлетворяющими условиям леммы 1.

Лемма 4. *Пусть* $u \in B_\rho(R^2)$, $h \in O_\rho(r)$, *где* $0 < \rho \le \rho_0 < c_0$, *а для* r *выполняется условие* (18). *Тогда существует такое* ε_0, *удовлетворяющее неравенствам*

$$0 < \varepsilon_0 < \frac{c_0 - \rho_0 - r}{\sqrt{8\pi}}, \tag{28}$$

что при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *для операторов* $A_\varepsilon u$ *и* $B_\varepsilon u$ *в пространстве* B_ρ *справедливы оценки*

$$\|A_\varepsilon u\| \le \mu_{A_\varepsilon}(\varepsilon, \|h\|, c^*, c_0, \rho)\|u\|, \quad \|B_\varepsilon u\| \le \mu_{B_\varepsilon}(\varepsilon, \|h\|, c^*, c_0, \rho)\|u\|.$$

Доказательство. Для оператора $A_\varepsilon u$ получаем оценку

$$\|A_\varepsilon u\| \le \|A_{\mathrm{dip}} u\| + \|R_{A_\varepsilon} u\|.$$

Для $A_{\mathrm{dip}} u$ выполняется неравенство

$$\|A_{\mathrm{dip}} u\| \le \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon^3}{2}\|P_{0,3,0,0,0,0,0,0,1,0,0}u\| + \frac{1}{2\pi}\frac{3\varepsilon^3}{2}\|P_{1,3,0,0,1,0,0,0,0,1,0}u\|.$$

Из оценки (19) оператора $P_\alpha u$ получаем

$$\|P_{0,3,0,0,0,0,0,0,1,0,0}u\| \le 8\pi^3\|u\| \left(\frac{2\pi}{(c_0 - \rho - \|h\|)^2}\right)^3 \frac{28c^*(\|h\| + c^*)}{(c_0-\rho)^2 - 4\pi^2(\|h\|^2 + 2\|h\|c^*)},$$

$$\|P_{1,3,0,0,1,0,0,0,0,1,0}u\| \le 8\pi^3\|u\| \left(\frac{2\pi}{(c_0 - \rho - \|h\|)^2}\right)^5$$
$$\times 3\frac{(28c^*)^2(\|h\| + c^*)^3}{(c_0-\rho)^2 - 4\pi^2(\|h\|^2 + 2\|h\|c^*)^{3/2}}.$$

Значит, для нормы $A_{\mathrm{dip}} u$ имеем

$$\|A_{\mathrm{dip}} u\| \le \varepsilon^3 2\pi^2\|u\| \left(\frac{2\pi}{(c_0 - \rho - \|h\|)^2}\right)^3 \frac{28c^*(\|h\| + c^*)}{(c_0-\rho)^2 - 4\pi^2(\|h\|^2 + 2\|h\|c^*)}$$
$$+ 9\varepsilon^3 2\pi^2\|u\| \left(\frac{2\pi}{(c_0 - \rho - \|h\|)^2}\right)^5 \frac{(28c^*)^2(\|h\| + c^*)^3}{((c_0-\rho)^2 - 4\pi^2(\|h\|^2 + 2\|h\|c^*))^{3/2}}$$
$$\le \mu_{A_{\mathrm{dip}}}(\varepsilon, \|h\|, c^*, c_0, \rho)\|u\|,$$

где

$$\mu_{A_{\mathrm{dip}}}(\varepsilon, \|h\|, c^*, c_0, \rho) = 20\pi^2\varepsilon^3 \left(\frac{2\pi}{(c_0 - \rho - \|h\|)^2}\right)^5$$
$$\times \frac{(28c^*)^2(\|h\| + c^*)^3}{((c_0-\rho)^2 - 4\pi^2(\|h\|^2 + 2\|h\|c^*))^{3/2}}.$$

Оценка оператора $R_{A_\varepsilon} u$ получается суммированием рядов, составляющих выражение для оператора $A_\varepsilon u$. В результате приходим к следующему выражению для мажорантной функции:

$$\mu_{A_\varepsilon}(\varepsilon, \|h\|, c^*, c_0, \rho) = \mu_{A_{\mathrm{dip}}} + 4\pi^2\varepsilon^5 \left(\frac{2\pi}{(c_0 - \rho - \|h\|)^2}\right)^5$$

$$\times \frac{28c^*(\|h\|+c^*)(1+6(\|h\|+c^*)^2 28c^*)^2}{((c_0-\rho)^2-4\pi^2(\|h\|^2+2\|h\|c^*))^2}\Bigg\{\left(\frac{(c_0-\rho-\|h\|)^2}{2\pi}-2\varepsilon^2\right)^2$$

$$-4\varepsilon^2\left(\frac{(c_0-\rho-\|h\|)^2}{2\pi}+\frac{12(\|h\|+c^*)^2 28c^*}{((c_0-\rho)^2-4\pi^2(\|h\|^2+2\|h\|c^*))^{1/2}}\right)\Bigg\}^{-2}$$

$$+66\varepsilon^7 4\pi^2\left(\frac{2\pi}{(c_0-\rho-\|h\|)^2}\right)^4\frac{28c^*(1+6(\|h\|+c^*)^2 28c^*)^2}{((c_0-\rho)^2-4\pi^2(\|h\|^2+2\|h\|c^*))^{3/2}}$$

$$\times\Bigg\{\left(\frac{(c_0-\rho-\|h\|)^2}{2\pi}-2\varepsilon^2\right)^2-6\varepsilon^2\Bigg(\frac{(c_0-\rho-\|h\|)^2}{2\pi}$$

$$+\frac{6(\|h\|+c^*)^2 28c^*}{((c_0-\rho)^2-4\pi^2(\|h\|^2+2\|h\|c^*))^{1/2}}\Bigg)\Bigg\}^{-2}.$$

Аналогично выводится оценка мажорантного типа для оператора B_ε. Функция μ_{B_ε} имеет сходную с μ_{A_ε} структуру, т. е. состоит из слагаемых порядка ε^3, которые соответствуют мажорантной функции оператора B_ε в дипольном приближении, и слагаемых пятого и седьмого порядков малости по ε, которые дают оценку оператора $R_{B_\varepsilon}u$. Условие (28) означает, что знаменатели мажорантных функций μ_{A_ε} и μ_{B_ε} положительны для всех значений параметров, входящих в выражения.

Лемма 4 доказана.

Теперь можно приступить к оценке операторов «нормальная производная» для дипольного приближения и точной задачи.

Оценки операторов $A_0\psi$ и $B_0\varphi$ по норме, определенной формулой (7), получены в работе [6]:

$$\|A_0(h)\psi\|\le\mu_{A_0}(\|\nabla h\|)\|\psi\|,\quad \|B_0(h)\varphi\|\le\mu_{B_0}(\|\nabla h\|)\|\nabla\varphi\|.$$

Здесь

$$\mu_{A_0}(\alpha)=\frac{\alpha(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \mu_{B_0}(\alpha)=\frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ясно, что оценки операторов $\Lambda(1+|\nabla h|^2)\psi$ и $\Lambda(\nabla h)\nabla\varphi$ имеют вид

$$\|\Lambda(1+|\nabla h|^2)\psi\|\le(1+\|\nabla h\|^2)\|\psi\|,\quad \|\Lambda(\nabla h)\nabla\varphi\|\le\|\nabla h\|\|\nabla\varphi\|.$$

Лемма 5. *Пусть $\varphi\in B_\rho(R^2)$, $\nabla\varphi\in B^2_\rho(R^2)$, $h\in O_\rho(r)$, $\nabla h\in O_\rho(r)\times O_\rho(r)$, где $0<\rho\le\rho_0<c_0$, а для r выполняется условие*

$$0<r<\min\left\{0.25,\frac{c^*}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{c_0-\rho_0}{2\pi c^*}\right)^2}-1\right)\right\}. \tag{29}$$

Тогда существуют такие мажорантная функция $\mu(\varepsilon,c_0,c^*,\rho,\|h\|,\|\nabla h\|)$ и ε_0, что при любом $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ для оператора «нормальная производная» задачи P_{sf} справедлива оценка

$$\|\psi\|\le\mu(\varepsilon,c_0,c^*,\rho,\|h\|,\|\nabla h\|)(\|\varphi\|+\|\nabla\varphi\|+\max_t|\vec v_c|), \tag{30}$$

где мажоранта μ имеет вид

$$\mu=\{1-\mu_{A_0}-(1+\|\nabla h\|^2)\mu_{A_\varepsilon}\}^{-1}\{\mu_{B_0}+\max_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0;0<\rho\le\rho_0;\|h\|,\|\nabla h\|<r}(\varepsilon^3W,\mu_{A_\varepsilon},\mu_{B_\varepsilon})\}. \tag{31}$$

Замечание. Константа ε_0, удовлетворяющая условию (28), определяется из неравенства

$$\mu_{A_0}(2r) + (1+4r^2)\mu_{A_\varepsilon}(\varepsilon_0, 2r, c^*, c_0, \rho_0) < 1. \tag{32}$$

Доказательство леммы 5. Покажем, что из условия (29) для константы r, ограничивающей норму функций h и ∇h, следует, что знаменатель функции μ положителен. Для этого необходимо, во-первых, чтобы выполнялось неравенство $\mu_{A_0}(r) < 1$, что при $0 < r < 1$ равносильно неравенству $2r^6 - r^4 + 4r^2 - 1 < 0$. Отсюда $0 < r \le 0.5$. Во-вторых, должны выполняться оценки мажорантного типа для операторов A_ε и B_ε, указанные в лемме 4, а это возможно, только если r удовлетворяет условию (18). Таким образом, если выполняется (29), то при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ с ε_0, удовлетворяющим условиям (28) и (32), знаменатель функции μ положителен.

Оценивая почленно (13), получим

$$\begin{aligned}\|\psi\| \le \{1 - \mu_{A_0} - \mu_{A_\varepsilon}(1 + \|\nabla h\|^2)\}^{-1}\{\mu_{B_0}\|\nabla\varphi\| \\ + \varepsilon^3 \max_t |v_c(t)| W(c_0, c^*, \rho, \|h\|) + \mu_{A_\varepsilon}\|\nabla h\|\|\nabla\varphi\| + \mu_{B_\varepsilon}\|\varphi\|\}.\end{aligned} \tag{33}$$

Из оценки (33) легко выводится (30). Лемма 5 доказана.

Интегральное уравнение для дипольного приближения имеет вид

$$\psi = A_0\psi + B_0\varphi + w_{\mathrm{dip}} + A_{\mathrm{dip}}\Lambda(1 + |\nabla h|^2)\psi - A_{\mathrm{dip}}\Lambda(\nabla h)\nabla\varphi + B_{\mathrm{dip}}\varphi. \tag{34}$$

Для этого приближения аналогично задаче в точной постановке справедлива следующая

Лемма 6. *Если выполняются условия, указанные в лемме* 5, *то существуют мажорантная функция* $\mu_{\mathrm{dip}}(\varepsilon, c_0, c^*, \rho, \|h\|, \|\nabla h\|)$ *и такая постоянная* ε_0 *(та же, что и в лемме* 5*), что для всех значений параметра* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *для оператора «нормальная производная» задачи* P_{dip} *справедлива оценка*

$$\|\psi_{\mathrm{dip}}\| \le \mu_{\mathrm{dip}}(\varepsilon, c_0, c^*, \rho, \|h\|, \|\nabla h\|)(\|\varphi\| + \|\nabla\varphi\| + \max_t |\vec{v}_c|).$$

Лемма 6 доказывается так же, как лемма 5. Разница только в том, что в оценке, аналогичной (33), присутствуют мажорантные оценки операторов A_{dip} и B_{dip}:

$$\begin{aligned}\|\psi_{\mathrm{dip}}\| \le \{1 - \mu_{A_0} - \mu_{A_{\mathrm{dip}}}(1 + \|\nabla h\|^2)\}^{-1}\{\mu_{B_0}\|\nabla\varphi\| \\ + \varepsilon^3 \max_t |v_c(t)| W(c_0, c^*, \rho, \|h\|) + \mu_{A_{\mathrm{dip}}}\|\nabla h\|\|\nabla\varphi\| + \mu_{B_{\mathrm{dip}}}\|\varphi\|\}.\end{aligned}$$

Тогда функция μ_{dip} имеет вид

$$\begin{aligned}\mu_{\mathrm{dip}} = \{1 - \mu_{A_0} - (1 + \|\nabla h\|^2)\mu_{A_{\mathrm{dip}}}\}^{-1} \\ \times \{\mu_{B_0} + \max_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0; 0<\rho\le\rho_0; \|h\|, \|\nabla h\| < r}(\varepsilon^3 W, \mu_{A_{\mathrm{dip}}}, \mu_{B_{\mathrm{dip}}})\}.\end{aligned}$$

Из утверждений лемм 5 и 6 следует, что при указанных в лемме 5 условиях операторы «нормальная производная» являются квазидифференциальными и для дипольного приближения, и для задачи в точной постановке.

Лемма 7. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in O_\rho(r)$, $\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2 \in O_\rho(r) \times O_\rho(r)$, $h_1, h_2 \in O_\rho(r)$, $\nabla h_1, \nabla h_2 \in O_\rho(r) \times O_\rho(r)$, *где* $0 < \rho \le \rho_0 < c_0$, *а для* r *выполняется условие* (29). *Тогда существует такое* ε_0, *удовлетворяющее условиям* (28), (32), *что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *оператор «нормальная производная» задачи* $P_{\rm sf}$ *является квазидифференциальным.*

Доказательство. Из леммы 5 следует, что при произвольных функциях $(h, \varphi, \nabla\varphi) \in O_\rho^4(r)$ оператор ψ принадлежит $B_\rho(R^2)$. Покажем, что существует такая константа $Q_{\rm sf}$, что для оператора «нормальная производная» выполняется неравенство вида (9).

Из оценки леммы 5 получаем

$$\|\psi\| \le \mu(\|h\|, \|\nabla h\|)\|\varphi\| + \mu(\|h\|, \|\nabla h\|)\|\nabla\varphi\| + \mu(\|h\|, \|\nabla h\|) \max_{t\in[0,T]} |\vec{v}_c|,$$

где функция $\mu(\varepsilon, c_0, c^*, \rho, \|h\|, \|\nabla h\|)$ имеет вид (31).

Обозначим

$$\psi_1 = N(h_1)\varphi_1, \quad \psi_2 = N(h_2)\varphi_2, \quad \mu(\varepsilon, c_0, c^*, \rho, \|h\|, \|\nabla h\|) = \mu(\varepsilon, c_0, c^*, \rho, \alpha, \beta).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|\psi_1 - \psi_2\| \le \dot\mu_\alpha(\|h_1\| + \|h_2\|, \|\nabla h_1\|)(\|\varphi_1\| + \|\nabla\varphi_1\| + \max_{t\in[0,T]} |\vec{v}_c|)\|h_1 - h_2\| \\ + \dot\mu_\beta(\|h_1\|, \|\nabla h_1\| + \|\nabla h_2\|)(\|\varphi_1\| + \|\nabla\varphi_1\| + \max_{t\in[0,T]} |\vec{v}_c|)\|\nabla h_1 - \nabla h_2\| \\ + \mu(\|h\|, \|\nabla h\|)(\|\varphi_1 - \varphi_2\| + \|\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2\|).\end{aligned}$$

Положив

$$\begin{gathered} Q_{\psi_{\rm sf}} = \max\{\dot\mu_\alpha(\varepsilon_0, c_0, c^*, \rho_0, 2r, r)(2r + \max_{t\in[0,T]} |\vec{v}_c|), \\ \dot\mu_\beta(\varepsilon_0, c_0, c^*, \rho_0, r, 2r)(2r + \max_{t\in[0,T]} |\vec{v}_c|), \quad \mu(\varepsilon_0, c_0, c^*, \rho_0, r, r)\}, \end{gathered} \tag{35}$$

получим оценку

$$\|\psi_1 - \psi_2\| \le Q_{\psi_{\rm sf}}(\|h_1 - h_2\| + \|\nabla h_1 - \nabla h_2\| + \|\varphi_1 - \varphi_2\| + \|\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2\|),$$

доказывающую утверждение леммы 7.

Лемма 8. *Пусть выполнены условия леммы* 7, *тогда существует такое* ε_0, *удовлетворяющее условиям* (28), (32), *что для любого* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *оператор «нормальная производная» задачи* $P_{\rm dip}$ *является квазидифференциальным.*

Лемма 8 доказывается так же, как лемма 7, только в выражении для константы $Q_{\psi_{\rm dip}}$, аналогичном (35), мажорантная функция μ заменяется на $\mu_{\rm dip}$.

Тот факт, что если траектория сферы является гладкой функцией времени и выполнены условия леммы 7, то операторы ψ и $\psi_{\rm dip}$ непрерывны по t, является следствием леммы 2.

5. Теорема существования и единственности. Введем обозначения

$$\alpha = h, \quad \beta = \varphi, \quad \gamma = h_{x_1}, \quad \delta = h_{x_2}, \quad \theta = \varphi_{x_1}, \quad \kappa = \varphi_{x_2}.$$

Тогда система уравнений (1) на свободной поверхности дифференцированием сводится к квазилинейной системе дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
\alpha_t = -\gamma\theta - \delta\kappa + (1+\gamma^2+\delta^2)\psi, \\
\beta_t = -\frac{1}{2}(\theta^2+\kappa^2) - \mathrm{Fr}^{-2}\,\alpha + \frac{1}{2}(1+\gamma^2+\delta^2)\psi^2, \\
\gamma_t = -\gamma_{x_1}\theta - \delta_{x_1}\kappa - \gamma\theta_{x_1} - \delta\kappa_{x_1} + (1+2\gamma\gamma_{x_1}+2\delta\delta_{x_1})\psi + (1+\gamma^2+\delta^2)\psi_{x_1}, \\
\delta_t = -\gamma_{x_2}\theta - \delta_{x_2}\kappa - \gamma\theta_{x_2} - \delta\kappa_{x_2} + (1+2\gamma\gamma_{x_2}+2\delta\delta_{x_2})\psi + (1+\gamma^2+\delta^2)\psi_{x_2}, \\
\theta_t = -(\theta\theta_{x_1}+\kappa\kappa_{x_1}) - \mathrm{Fr}^{-2}\,\gamma + \gamma\gamma_{x_1}\psi + \delta\delta_{x_1}\psi + \frac{1}{2}(1+\gamma^2+\delta^2)\psi\psi_{x_1}, \\
\kappa_t = -(\theta\theta_{x_2}+\kappa\kappa_{x_2}) - \mathrm{Fr}^{-2}\,\delta + \gamma\gamma_{x_2}\psi + \delta\delta_{x_2}\psi + \frac{1}{2}(1+\gamma^2+\delta^2)\psi\psi_{x_2}.
\end{gathered}
\tag{36}
$$

Эта система замыкается интегральным уравнением (3). Начальные условия для системы (36) получаются из начальных условий системы (1) дифференцированием:

$$
\alpha(x,0)=h_0(x),\quad \beta(x,0)=\Phi_0(x,h_0(x)),\quad \gamma(x,0)=h_{0x_1}(x),\quad \delta(x,0)=h_{0x_2}(x),
$$

$$
\theta(x,0)=\Phi_{0x_1}(x,h_0(x)),\quad \kappa(x,0)=\Phi_{0x_2}(x,h_0(x)).
$$

Таким образом, приходим к задаче Коши вида (8) где $u=(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\theta,\kappa)$, а правая часть $F(u,t)$ определена в (36). Если в правой части (36) присутствует оператор ψ, то имеем квазилинейную систему уравнений для точной задачи P_{sf}. Если в (36) присутствует ψ_{dip}, то получаем систему для P_{dip} и обозначаем ее правую часть через $F_{\mathrm{dip}}(u,t)$.

Теперь сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть траектория центра сферы является гладкой,* $(a_1,a_2,c)\in(C^1[0,T])^3$*, причем* $c_0=\min\limits_{t\in[0,T]}|c(t)|$, $c^*=\max\limits_{t\in[0,T]}|c(t)|$. *Если* $(\varphi_0,\nabla\varphi_0,h_0,\nabla h_0)\in O^6_{\rho_0}(r)$*, а постоянные* ρ_0 *и* r *удовлетворяют условиям*

$$
0<\rho_0<c_0,\quad 0<r<\min\left\{0.25,\frac{c^*}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{c_0-\rho_0}{2\pi c^*}\right)^2}-1\right)\right\},
$$

то существует $\varepsilon_0>0$*, удовлетворяющее условиям* (28), (32), *что для всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *каждая из задач* P_{sf} *и* P_{dip} *имеет единственное решение* $(\varphi,\nabla\varphi,h,\nabla h)\in(C^1([0,t^*];O_\rho(r)))^6$, $(\varphi_{\mathrm{dip}},\nabla\varphi_{\mathrm{dip}},h_{\mathrm{dip}},\nabla h_{\mathrm{dip}})\in(C^1([0,t^*];O_\rho(r)))^6$, где $(\rho,t^*)\in\Delta(\rho_0,k)$. *Треугольник* $\Delta(\rho_0,k)$ *определяется по формуле* (10), *а константа* k*, определяющая время существования решения, находится по формуле* (12) *с константой* $Q_{\psi_{\mathrm{sf}}}$ *и функцией* $F(u_0,t)$ *для точной задачи. Разность решений точной и приближенной задач при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *допускает оценку*

$$
\|h-h_{\mathrm{dip}}\|+\|\varphi-\varphi_{\mathrm{dip}}\|\le C\varepsilon^5,
\tag{37}
$$

где C *не зависит от* ε.

Доказательство. Для доказательства существования решений точной и приближенной задач согласно теореме Овсянникова достаточно показать, что операторы «нормальная производная» и той, и другой задачи являются квазидифференциальными и непрерывными по t. Из лемм 7 и 8 следует квазидифференциальность правых частей соответствующих систем уравнений. Непрерывность по t вытекает из леммы 2, так как в правых частях этих систем только функция w_{dip} и операторы $A_\varepsilon u$, $B_\varepsilon u$ явно зависят от времени. Время существования решений определяется константой k в каждой задаче отдельно. Из вида мажорантных функций в оценке операторов ψ и ψ_{dip} ясно, что константа k в точной задаче больше, чем в дипольном приближении. Значит, время существования обоих решений t^* определяется треугольником $\Delta(\rho_0, k)$, где k берется из точной задачи. Значение t^* не зависит от ε, так как по выбору константы ε_0 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ни $Q_{\psi_{\text{sf}}}$, $Q_{\psi_{\text{dip}}}$, ни $\max\limits_{t\in[0,T]} \|F(u_0, t)\|$ не зависят от ε.

Для получения оценки разности решений построим задачу Коши для функции $\bar{u} = u - u_{\text{dip}}$. Имеем

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = F(u,t) - F_{\text{dip}}(u_{\text{dip}}, t), \quad \bar{u}(0) = 0.$$

Рассмотрим разность интегральных операторов ψ, ψ_{dip}, которые удовлетворяют уравнениям (13) и (34) соответственно:

$$\begin{gathered}
\psi - \psi_{\text{dip}} = A_0(\alpha)\psi - A_0(\alpha_{\text{dip}})\psi_{\text{dip}} + B_0(\alpha)\beta - B_0(\alpha_{\text{dip}})\beta_{\text{dip}} + w_{\text{dip}}(\alpha) - w_{\text{dip}}(\alpha_{\text{dip}}) \\
+ A_{\text{dip}}\Lambda(1+\gamma^2+\delta^2)\psi - A_{\text{dip}}\Lambda\big(1+\gamma_{\text{dip}}^2+\delta_{\text{dip}}^2\big)\psi_{\text{dip}} \\
- A_{\text{dip}}\Lambda(\gamma,\delta)(\theta,\kappa) + A_{\text{dip}}\Lambda(\gamma_{\text{dip}},\delta_{\text{dip}})(\theta_{\text{dip}},\kappa_{\text{dip}}) + B_{\text{dip}}\beta - B_{\text{dip}}\beta_{\text{dip}} \\
+ R_{A_\varepsilon}\Lambda(1+\gamma^2+\delta^2)\psi - R_{A_\varepsilon}\Lambda(\gamma,\delta)(\theta,\kappa) + R_{B_\varepsilon}\beta.
\end{gathered}$$

Отсюда находим, что $\bar{u}$ удовлетворяет системе вида

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = F_1(u, u_{\text{dip}}, t)\bar{u} + F_2(u, u_{\text{dip}}, t), \quad \bar{u}(0) = 0,$$

где слагаемое $F_2(u, u_{\text{dip}}, t)$ имеет пятый порядок малости по ε. Отсюда, используя оценку решения задачи (11), получаем, что разность решений точной задачи и ее дипольного приближения имеет пятый порядок малости по ε с константой C, не зависящей от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Ясно, что оценка разности решений выполняется для всех значений параметров ρ и t из треугольника $\Delta(\rho_0, k)$.

Теорема доказана.

Замечание. Оценки, аналогичные (37), могут быть получены и для других приближений. Например, если мы будем в интегральном уравнении пренебрегать слагаемыми порядка ε^7 и выше, то разность решений точной задачи и этого приближения будет величиной порядка ε^7.

Таким образом, в настоящей статье выведено и обосновано нелинейное дипольное приближение в нестационарной задаче о генерации волн погруженной сферой. Показано, что существует такое достаточно малое значение безразмерного радиуса сферы ε_0, что для любого $\varepsilon \le \varepsilon_0$ найдется такой малый промежуток времени, на котором аналитические решения обеих задач существуют, причем разность этих решений стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, как ε^5.

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. Н. И. Макаренко за постановку задачи, помощь в работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Макаренко Н. И.* Неустановившиеся поверхностные волны при наличии погруженного препятствия // Вычисл. технол. 1995. Т. 11, № 4. С. 169–175.

2. *Маклаков Д. В.* Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами. М.: Янус-К, 1997.

3. *Овсянников Л. В.* О всплывании пузыря // Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука, 1970. С. 209–222.

4. *Белых В. Н.* Теорема существования и единственности решения задачи о сферическом пузыре // Динамика сплошной среды. 1972. № 12. С. 63–76.

5. *Овсянников Л. В.* Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 4. С. 789–792.

6. *Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.

7. *Кошляков Н. С.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: ОНТИ, 1936.

8. *Пяткина Е. В.* Начальная асимптотика волнового движения, генерируемого погруженной сферой // Прикл. механика и техн. физика. 2003. Т. 44, № 1. С. 39–52.

Статья поступила 15 декабря 2003 г.

Пяткина Евдокия Владимировна
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
evdokiya@hydro.nsc.ru