Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 517.98

АБСТРАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СУПЕРПОЗИЦИИ НА ОТОБРАЖЕНИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ ДВУХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. II

В. В. Чистяков

Аннотация: Определяется и изучается метрическая полугруппа $\mathrm{BV}_2(I_a^b; M)$ отображений двух вещественных переменных ограниченной полной вариации в смысле Витали, Харди и Краузе на прямоугольнике I_a^b со значениями в метрической полугруппе или абстрактном выпуклом конусе M. Приводится полное описание непрерывных по Липшицу операторов суперпозиции Немыцкого, действующих из $\mathrm{BV}_2(I_a^b; M)$ в такую же полугруппу $\mathrm{BV}_2(I_a^b; N)$, и, как следствие, характеризуются многозначные операторы суперпозиции. Устанавливается связь отображений из $\mathrm{BV}_2(I_a^b; M)$ с отображениями ограниченной повторной вариации и исследуется повторный оператор суперпозиции на отображениях ограниченной повторной вариации. Результаты настоящей работы развивают и обобщают недавние результаты Матковского и Мища (1984), Завадзкой (1990) и автора (2002, 2003) на случай (многозначных) операторов суперпозиции на отображениях двух вещественных переменных.

Ключевые слова: отображения двух переменных, полная вариация, метрическая полугруппа, оператор суперпозиции Немыцкого, многозначный оператор, свойство типа банаховости алгебры, условие Липшица.

§ 4. Липшицевы операторы суперпозиции. Достаточное условие

Настоящая работа является продолжением исследований автора [1], посвященным полному описанию непрерывных по Липшицу операторов $\mathscr{H}$ суперпозиции Немыцкого, действующих из метрической полугруппы $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b; N\big)$ отображений ограниченной вариации двух вещественных переменных в такую же полугруппу $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$, где N и M — абстрактные метрические полугруппы. В работе [1] получено необходимое условие липшицевости оператора $\mathscr{H}$. Цель данной работы — установить достаточное условие липшицевости $\mathscr{H}$ (теоремы 2 и 3 в § 4) и охарактеризовать повторные операторы суперпозиции на пространствах $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b; N\big)$ (теорема 4 в § 5). Результаты настоящей работы анонсированы в [2, 3].

Всюду ниже мы придерживаемся терминологии и обозначений работы [1], где также представлены подробная мотивация, библиография и история задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00473).

Однако для удобства читателя вначале мы вкратце напомним основные определения из [1], необходимые для этой части. Отметим, что нумерация разделов и утверждений данной работы продолжает нумерацию из [1].

Пусть I, M и N — непустые множества и M^I — семейство всех отображений, действующих из I в M. Для заданного отображения $h : I \times N \to M$ оператор $\mathscr{H} : N^I \to M^I$, определенный правилом $(\mathscr{H}g)(x) = h(x, g(x))$ для $x \in I$ и $g \in N^I$, называется (*абстрактным*) *оператором суперпозиции* (*Немыцкого*) *с генератором* h.

Метрической полугруппой называется тройка $(M, d, +)$, где (M, d) — метрическое пространство с метрикой d, $(M, +)$ — абелева полугруппа по сложению $+$ и метрика d инвариантна относительно сдвигов: $d(u + w, v + w) = d(u, v)$ для всех $u, v, w \in M$. В метрической полугруппе M имеет место неравенство

$$d(u + \bar{u}, v + \bar{v}) \leq d(u, v) + d(\bar{u}, \bar{v}), \quad u, v, \bar{u}, \bar{v} \in M, \tag{1}$$

и, в частности, операция сложения $M \times M \ni (u, v) \mapsto u + v \in M$ непрерывна. Если M содержит элемент *нуль* $0 \in M$ (так что $u + 0 = 0 + u = u$ для всех $u \in M$), то для $u \in M$ полагаем $|u|_d = d(u, 0)$.

Абстрактным выпуклым конусом называется четверка $(M, d, +, \cdot)$, где $(M, d, +)$ — метрическая полугруппа с нулем $0 \in M$ и операция $\cdot : \mathbb{R}^+ \times M \to M$ умножения неотрицательных чисел на элементы M, действующая по правилу $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$, обладает для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ и $u, v \in M$ свойствами: $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$, $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$, $1 \cdot u = u$ и $d(\lambda u, \lambda v) = \lambda d(u, v)$.

Многочисленные примеры метрических полугрупп и абстрактных выпуклых конусов приведены в [1]. Здесь нас главным образом интересуют полугруппы и конусы отображений ограниченной вариации одной и двух переменных.

Пусть (M, d) — метрическое пространство и $[a, b] \subset \mathbb{R}$ — отрезок. Классическая *вариация* (*по Жордану*) *отображения* $\varphi : [a, b] \to M$ — это величина

$$V_a^b(\varphi) = \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} d(\varphi(t_i), \varphi(t_{i-1})),$$

где супремум берется по всем разбиениям $\xi = \{t_i\}_{i=0}^m$ отрезка $[a, b]$ (т. е. $m \in \mathbb{N}$ и $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$). Если $V_a^b(\varphi) < \infty$, пишем $\varphi \in \mathrm{BV}_1([a, b]; M)$ и говорим, что φ есть *отображение ограниченной вариации* на $[a, b]$. Если $(M, d, +)$ — (полная) метрическая полугруппа (или абстрактный выпуклый конус), то $\mathrm{BV}_1([a, b]; M)$ также является (полной) метрической полугруппой (или абстрактным выпуклым конусом), где операция сложения (и умножения на неотрицательные числа) определена поточечно, инвариантная относительно сдвигов метрика d_1 задана правилом

$$d_1(\varphi, \psi) = d(\varphi(a), \psi(a)) + W_a^b(\varphi, \psi), \quad \varphi, \psi \in \mathrm{BV}_1([a, b]; M),$$

а полуметрика $W_a^b(\varphi, \psi)$ определяется как

$$W_a^b(\varphi, \psi) = \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} d(\varphi(t_i) + \psi(t_{i-1}), \psi(t_i) + \varphi(t_{i-1})). \tag{2}$$

Ниже нам понадобится следующее неравенство [1, лемма 1(b)]:

$$d(\varphi(t), \psi(t)) \leq d_1(\varphi, \psi), \quad t \in [a, b]. \tag{3}$$

Для отображений двух переменных со значениями в полугруппе M соответствующие определения выглядят следующим образом.

Координатное представление точек $x, y \in \mathbb{R}^2$ будем записывать в виде $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ и считать, что $x \le y$ или $x < y$ (в $\mathbb{R}^2$), если эти неравенства выполнены покоординатно. Пусть $a = (a_1, a_2) < b = (b_1, b_2)$ в $\mathbb{R}^2$ и $I_a^b = I_{a_1,a_2}^{b_1,b_2} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ есть *основной* прямоугольник на плоскости (область определения большинства отображений). Для отображения $f : I_a^b \to M$ и точек $x_1 \in [a_1, b_1]$ и $x_2 \in [a_2, b_2]$ определяем два отображения одной переменной $f(\cdot, x_2) : [a_1, b_1] \to M$ и $f(x_1, \cdot) : [a_2, b_2] \to M$ правилами: $f(\cdot, x_2)(t) = f(t, x_2)$ для $t \in [a_1, b_1]$ и $f(x_1, \cdot)(s) = f(x_1, s)$ для $s \in [a_2, b_2]$.

Пусть $(M, d, +)$ — метрическая полугруппа и I_a^b — основной прямоугольник.

Смешанная разность (Витали) отображения $f : I_a^b \to M$ на подпрямоугольнике $I_x^y = [x_1, y_1] \times [x_2, y_2] \subset I_a^b$, где $x, y \in I_a^b$, $x \le y$, есть величина [1, 4]

$$\operatorname{md}\bigl(f, I_x^y\bigr) = \operatorname{md}\bigl(f, I_{x_1,x_2}^{y_1,y_2}\bigr) = d(f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2), f(x_1, y_2) + f(y_1, x_2)).$$

Пара (ξ, η) называется (сеточным) *разбиением* I_a^b, если найдутся такие $m, n \in \mathbb{N}$, что $\xi = \{t_i\}_{i=0}^m$ есть разбиение отрезка $[a_1, b_1]$ и $\eta = \{s_j\}_{j=0}^n$ есть разбиение отрезка $[a_2, b_2]$. Тогда на прямоугольниках

$$I_{ij} = I_{t_{i-1},s_{j-1}}^{t_i,s_j} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j], \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n, \tag{4}$$

составляющих это разбиение, смешанная разность $\operatorname{md}(f, I_{ij})$ вычисляется согласно равенству

$$\operatorname{md}\bigl(f, I_{t_{i-1},s_{j-1}}^{t_i,s_j}\bigr) = d(f(t_{i-1}, s_{j-1}) + f(t_i, s_j), f(t_{i-1}, s_j) + f(t_i, s_{j-1})).$$

Двойная вариация отображения $f : I_a^b \to M$ определяется правилом ([4] при $M = \mathbb{R}$):

$$V_2\bigl(f, I_a^b\bigr) = \sup_{(\xi,\eta)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \operatorname{md}(f, I_{ij}),$$

где супремум берется по всем разбиениям (ξ, η) прямоугольника I_a^b указанного выше вида. *Полной вариацией* (в модификации Харди и Краузе, см. [5, 6] при $M = \mathbb{R}$) отображения f называется величина

$$TV_d\bigl(f, I_a^b\bigr) = V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot, a_2)) + V_{a_2}^{b_2}(f(a_1, \cdot)) + V_2\bigl(f, I_a^b\bigr), \tag{5}$$

а класс всех отображений конечной полной вариации называется *пространством отображений ограниченной вариации* (в смысле Витали, Харди и Краузе) и обозначается через $\mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; M\bigr)$. Для $f \in \mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; M\bigr)$ справедливо неравенство [7, 8]

$$d(f(y), f(x)) \le TV_d\bigl(f, I_x^y\bigr) \le TV_d\bigl(f, I_a^y\bigr) - TV_d\bigl(f, I_a^x\bigr), \quad x, y \in I_a^b, \ x \le y. \tag{6}$$

Если метрическая полугруппа $(M, d, +)$ содержит нуль, также полагаем

$$\|f\|_d = |f(a)|_d + TV_d\bigl(f, I_a^b\bigr), \quad f \in \mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; M\bigr).$$

Основное свойство V_2 — *аддитивность*: для любого, как выше, разбиения (ξ, η) прямоугольника I_a^b на подпрямоугольники $\{I_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$ из (4) имеем

$$V_2\bigl(f, I_a^b\bigr) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n V_2(f, I_{ij}). \tag{7}$$

В случае, когда $(M, d, +)$ есть (полная) метрическая полугруппа (или абстрактный выпуклый конус), структура (полной) метрической полугруппы (или абстрактного выпуклого конуса) на $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)$ определяется следующим образом [1]. Пусть $f,g\in\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)$. Операция сложения $+$ (умножения на неотрицательное число) в $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)$ вводится поточечно, а инвариантная относительно сдвигов *метрика* d_2 определяется согласно правилу

$$d_2(f,g)=d(f(a),g(a))+TW_d\big(f,g,I_a^b\big),$$

где

$$TW_d\big(f,g,I_a^b\big)=W_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2),g(\cdot,a_2))+W_{a_2}^{b_2}(f(a_1,\cdot),g(a_1,\cdot))+W_2\big(f,g,I_a^b\big).$$

Здесь первое слагаемое справа есть величина (2), вычисленная в метрике d для отображений $t\mapsto f(t,a_2)$ и $t\mapsto g(t,a_2)$ на отрезке $[a_1,b_1]$, и аналогичный смысл имеет второе слагаемое, а $W_2\big(f,g,I_a^b\big)$ определяется в обозначениях (4) правилом

$$W_2\big(f,g,I_a^b\big)=\sup_{(\xi,\eta)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{md}_2\big(f,g,I_{ij}\big),$$

где супремум берется по всем разбиениям $\xi=\{t_i\}_{i=0}^m$ и $\eta=\{s_j\}_{j=0}^n$ отрезков $[a_1,b_1]$ и $[a_2,b_2]$ соответственно ($m,n\in\mathbb{N}$) и значение *совместной смешанной разности* $\mathrm{md}_2\big(f,g,I_x^y\big)$ на подпрямоугольнике $I_x^y=[x_1,y_1]\times[x_2,y_2]\subset I_a^b$ есть

$$\begin{aligned}\mathrm{md}_2\big(f,g,I_{x_1,x_2}^{y_1,y_2}\big)=d(&f(x_1,x_2)+f(y_1,y_2)+g(x_1,y_2)+g(y_1,x_2),\\&g(x_1,x_2)+g(y_1,y_2)+f(x_1,y_2)+f(y_1,x_2)).\end{aligned}$$

Отметим, что для $f,g\in\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)$ имеем [1, лемма 2(b)]

$$\big|TV_d\big(f,I_a^b\big)-TV_d\big(g,I_a^b\big)\big|\le TW_d\big(f,g,I_a^b\big)\le TV_d\big(f,I_a^b\big)+TV_d\big(g,I_a^b\big).\tag{8}$$

Пусть $(N,\rho,+)$ и $(M,d,+)$ — две метрические полугруппы (или два абстрактных выпуклых конуса). Оператор $T:N\to M$ называем *липшицевым*, если конечна его (наименьшая) *константа Липшица*:

$$L(T)=\sup\{d(Tu,Tv)/\rho(u,v)\mid u,v\in N,u\ne v\},$$

а множество всех таких операторов обозначаем через $\mathrm{Lip}(N;M)$. Оператор $T:N\to M$ называется *аддитивным*, если он удовлетворяет уравнению Коши: $T(u+v)=Tu+Tv$ для всех $u,v\in N$. Обозначим через $\mathrm{L}(N;M)$ множество всех липшицевых аддитивных операторов из N в M.

В дальнейшем будет рассматриваться только случай, когда N и M содержат нули (обозначаемые одним символом 0). В этом случае если $T\in\mathrm{L}(N;M)$, то $T(0)=0$, так как $T(0)=T(0+0)=T(0)+T(0)$ и $d(0,T(0))=d(T(0),T(0)+T(0))=0$. Множество $\mathrm{L}(N;M)$ замкнуто относительно поточечной операции сложения (умножения на неотрицательное число) в силу (1). Инвариантная относительно сдвигов метрика d_L на $\mathrm{L}(N;M)$ определяется правилом [9]

$$d_L(T,S)=\sup\{d(Tu+Sv,Su+Tv)/\rho(u,v)\mid u,v\in N,\ u\ne v\},\quad T,S\in\mathrm{L}(N;M).$$

Таким образом, $(\mathrm{L}(N;M),d_L,+)$ есть метрическая полугруппа (абстрактный выпуклый конус), являющаяся полной, если метрическая полугруппа $(X,d,+)$ полная, причем $L(T)=d_L(T,0)=|T|_{d_L}$. Для дальнейшего отметим, что [1, лемма 4(b)]

$$|L(T)-L(S)|\le d_L(T,S)\le L(T)+L(S),\quad T,S\in\mathrm{L}(N;M).\tag{9}$$

В работе [1, теорема 1] доказано следующее необходимое условие липшицевости оператора суперпозиции $\mathscr{H}$ (мы приводим ее при дополнительных предположениях, не влияющих на суть дела). *Пусть* $(N,\rho,+,\cdot)$ *и* $(M,d,+,\cdot)$ — *два абстрактных выпуклых конуса, причем* M *полный, и отображение* $h : I_a^b \times N \to M$ *является непрерывным по первому аргументу генератором оператора суперпозиции* $\mathscr{H}$ *при* $I = I_a^b$. *Если* $\mathscr{H} \in \mathrm{Lip}\big(\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;N\big);\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)\big)$, *то* $h(x,\cdot) \in \mathrm{Lip}(N;M)$ *для всех* $x \in I_a^b$ *и найдутся два отображения* $f : I_a^b \to \mathrm{L}(N;M)$ *и* $h_0 : I_a^b \to M$ *такие, что* $f(\cdot)u$, $h_0 \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)$ *при всех* $u \in N$ *и имеет место представление* $h(x,u) = f(x)u + h_0(x)$ *для всех* $x \in I_a^b$ *и* $u \in N$, *где* $f(\cdot)u$ *действует по правилу* $x \mapsto f(x)u$.

Главные результаты настоящего параграфа — теорема 2, в которой устанавливается свойство пространств $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)$ типа банаховости алгебры (ср. [7]), и теорема 3, дающая достаточное условие липшицевости оператора суперпозиции $\mathscr{H}$, который действует между метрическими полугруппами $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)$.

Теорема 2. *Предположим, что* $(N,\rho,+)$ *и* $(M,d,+)$ — *две метрические полугруппы с нулями. Если* $f \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b;\mathrm{L}(N;M)\big)$ *и* $g \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b;N\big)$, *то отображение* $fg : I_a^b \to M$, *действующее по правилу:* $(fg)(x) = f(x)g(x)$ *для всех* $x \in I_a^b$, *лежит в* $\mathrm{BV}_2(I_a^b;M)$, *и справедливо неравенство* $\|fg\|_d \le 4\|f\|_{d_L}\|g\|_\rho$.

Доказательство. Поскольку $fg : I_a^b \to M$, то в силу (5)

$$\|fg\|_d = |(fg)(a)|_d + V_{a_1}^{b_1}((fg)(\cdot,a_2)) + V_{a_2}^{b_2}((fg)(a_1,\cdot)) + V_2\big(fg, I_a^b\big). \tag{10}$$

Для первого слагаемого из определения константы Липшица оператора $f(a)$ имеем

$$\begin{aligned}|(fg)(a)|_d = d((fg)(a),0) = d(f(a)g(a), f(a)(0))\\ \le L(f(a))\rho(g(a),0) = |f(a)|_{d_L}\cdot|g(a)|_\rho.\end{aligned} \tag{11}$$

Оценим оставшиеся три слагаемых в (10). Для оценки второго слагаемого учитываем определение константы Липшица $L(\cdot)$ и метрики d_L, так что если $t,s \in [a_1,b_1]$, то

$$\begin{aligned}d((fg)(t,a_2),(fg)(s,a_2)) &\le d(f(t,a_2)g(t,a_2), f(t,a_2)g(s,a_2))\\ &\quad + d(f(t,a_2)g(s,a_2), f(s,a_2)g(s,a_2))\\ &\le L(f(t,a_2))\rho(g(t,a_2),g(s,a_2)) + d_L(f(t,a_2),f(s,a_2))\rho(g(s,a_2),0),\end{aligned}$$

откуда

$$V_{a_1}^{b_1}((fg)(\cdot,a_2)) \le \big(\sup_{[a_1,b_1]} L(f(\cdot,a_2))\big)V_{a_1}^{b_1}(g(\cdot,a_2)) + V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2))\big(\sup_{[a_1,b_1]}\rho(g(\cdot,a_2),0)\big).$$

Замечая, что (см., в частности, (9))

$$\sup_{t\in[a_1,b_1]} L(f(t,a_2)) \le L(f(a)) + V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2)),$$

$$\sup_{s\in[a_1,b_1]} \rho(g(s,a_2),0) \le \rho(g(a),0) + V_{a_1}^{b_1}(g(\cdot,a_2)),$$

найдем, что

$$\begin{aligned}V_{a_1}^{b_1}((fg)(\cdot,a_2)) \le |f(a)|_{d_L}V_{a_1}^{b_1}(g(\cdot,a_2)) + V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2))|g(a)|_\rho\\ + 2V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2))V_{a_1}^{b_1}(g(\cdot,a_2)).\end{aligned} \tag{12}$$

Аналогичная оценка имеет место и для третьего слагаемого в (10):

$$V_{a_2}^{b_2}((fg)(a_1,\cdot)) \le |f(a)|_{d_L} V_{a_2}^{b_2}(g(a_1,\cdot)) + V_{a_2}^{b_2}(f(a_1,\cdot))|g(a)|_\rho \\ + 2V_{a_2}^{b_2}(f(a_1,\cdot))V_{a_2}^{b_2}(g(a_1,\cdot)). \quad (13)$$

Для того чтобы оценить четвертое слагаемое $V_2\big(fg, I_a^b\big)$ в (10), воспользуемся следующим наблюдением, касающимся элементов метрической полугруппы $(M,d,+)$:

$$\text{если } n\in\mathbb{N},\ \{l_k,r_k\}_{k=0}^n \subset M \text{ и } \sum_{k=0}^n l_k = \sum_{k=0}^n r_k, \text{ то } d(l_0,r_0) \le \sum_{k=1}^n d(r_k,l_k). \quad (14)$$

Действительно, в силу инвариантности d относительно сдвигов и (1) имеем

$$d(l_0,r_0) = d\left(l_0 + \sum_{k=1}^n l_k, r_0 + \sum_{k=1}^n l_k\right) = d\left(r_0 + \sum_{k=1}^n r_k, r_0 + \sum_{k=1}^n l_k\right) \\ = d\left(\sum_{k=1}^n r_k, \sum_{k=1}^n l_k\right) \le \sum_{k=1}^n d(r_k,l_k).$$

Пусть $\{t_i\}_{i=0}^m$ и $\{s_j\}_{j=0}^n$ — разбиения отрезков $[a_1,b_1]$ и $[a_2,b_2]$ соответственно. Заметим, что в силу аддитивности оператора $f(x)$ при всех $x\in I_a^b$ для $i=1,\dots,m$ и $j=1,\dots,n$ имеет место равенство (нижние индексы у квадратных скобок в этом равенстве лишь осуществляют нумерацию и указывают на соответствие между слагаемыми в левой и правой его частях, которое будет использовано ниже)

$$\begin{aligned}
&[(fg)(t_{i-1},s_{j-1}) + (fg)(t_i,s_j)]_0 + [(f(t_{i-1},s_j) + f(t_i,s_{j-1}))g(t_{i-1},s_{j-1})]_1 \\
&+ [f(t_i,s_j)(g(t_{i-1},s_j) + g(t_i,s_{j-1}))]_2 + [f(a_1,s_{j-1})g(t_i,a_2) + f(a_1,s_j)g(t_{i-1},a_2)]_3 \\
&+ [f(a_1,s_{j-1})(g(t_{i-1},a_2) + g(t_i,s_{j-1})) + f(a_1,s_j)(g(t_{i-1},s_{j-1}) + g(t_i,a_2))]_4 \\
&+ [(f(a_1,s_j) + f(t_i,s_{j-1}))g(t_i,a_2) + (f(a_1,s_{j-1}) + f(t_i,s_j))g(t_{i-1},a_2)]_5 \\
&+ [(f(a_1,s_j) + f(t_i,s_{j-1}))(g(t_{i-1},a_2) + g(t_i,s_{j-1})) \\
&+ (f(a_1,s_{j-1}) + f(t_i,s_j))(g(t_{i-1},s_{j-1}) + g(t_i,a_2))]_6 \\
&+ [f(t_{i-1},a_2)g(a_1,s_j) + f(t_i,a_2)g(a_1,s_{j-1})]_7 \\
&+ [f(t_{i-1},a_2)(g(a_1,s_{j-1}) + g(t_{i-1},s_j)) + f(t_i,a_2)(g(a_1,s_j) + g(t_{i-1},s_{j-1}))]_8 \\
&+ [(f(t_{i-1},s_j) + f(t_i,a_2))g(a_1,s_j) + (f(t_{i-1},a_2) + f(t_i,s_j))g(a_1,s_{j-1})]_9 \\
&+ [(f(t_{i-1},s_j) + f(t_i,a_2))(g(a_1,s_{j-1}) + g(t_{i-1},s_j)) \\
&+ (f(t_{i-1},a_2) + f(t_i,s_j))(g(a_1,s_j) + g(t_{i-1},s_{j-1}))]_{10} \\
&= [(fg)(t_{i-1},s_j) + (fg)(t_i,s_{j-1})]_0 + [(f(t_{i-1},s_{j-1}) + f(t_i,s_j))g(t_{i-1},s_{j-1})]_1 \\
&+ [f(t_i,s_j)(g(t_{i-1},s_{j-1}) + g(t_i,s_j))]_2 + [f(a_1,s_j)g(t_i,a_2) + f(a_1,s_{j-1})g(t_{i-1},a_2)]_3 \\
&+ [f(a_1,s_j)(g(t_{i-1},a_2) + g(t_i,s_{j-1})) + f(a_1,s_{j-1})(g(t_{i-1},s_{j-1}) + g(t_i,a_2))]_4 \\
&+ [(f(a_1,s_{j-1}) + f(t_i,s_j))g(t_i,a_2) + (f(a_1,s_j) + f(t_i,s_{j-1}))g(t_{i-1},a_2)]_5 \\
&+ [(f(a_1,s_{j-1}) + f(t_i,s_j))(g(t_{i-1},a_2) + g(t_i,s_{j-1})) \\
&+ (f(a_1,s_j) + f(t_i,s_{j-1}))(g(t_{i-1},s_{j-1}) + g(t_i,a_2))]_6 \\
&+ [f(t_i,a_2)g(a_1,s_j) + f(t_{i-1},a_2)g(a_1,s_{j-1})]_7 \\
&+ [f(t_i,a_2)(g(a_1,s_{j-1}) + g(t_{i-1},s_j)) + f(t_{i-1},a_2)(g(a_1,s_j) + g(t_{i-1},s_{j-1}))]_8
\end{aligned}$$

$$+ [(f(t_{i-1}, a_2) + f(t_i, s_j))g(a_1, s_j) + (f(t_{i-1}, s_j) + f(t_i, a_2))g(a_1, s_{j-1})]_9$$
$$+ [(f(t_{i-1}, a_2) + f(t_i, s_j))(g(a_1, s_{j-1}) + g(t_{i-1}, s_j))$$
$$+ (f(t_{i-1}, s_j) + f(t_i, a_2))(g(a_1, s_j) + g(t_{i-1}, s_{j-1}))]_{10}.$$

Для $k = 0, 1, \dots, 10$ обозначим через l_k^{ij} (соответственно r_k^{ij}) k-е слагаемое в квадратной скобке слева (соответственно справа) в этом равенстве, так что его можно переписать в виде $\sum\limits_{k=0}^{10} l_k^{ij} = \sum\limits_{k=0}^{10} r_k^{ij}$. Согласно (4) и (14) находим, что

$$\mathrm{md}(fg, I_{ij}) = d\big(l_0^{ij}, r_0^{ij}\big) \le \sum_{k=1}^{10} d\big(r_k^{ij}, l_k^{ij}\big),$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{md}(fg, I_{ij}) \le \sum_{k=1}^{10}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d\big(r_k^{ij}, l_k^{ij}\big) = \sum_{k=1}^{10} S_k.$$

Оценим выражения $S_k = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} d\big(r_k^{ij}, l_k^{ij}\big)$, $k = 1, \dots, 10$, по отдельности. Из (6) следует, что если $(t, s) \in I_a^b$, то

$$|g(t,s)|_\rho = \rho(g(t,s), 0) \le \rho(g(a), 0) + \rho(g(t,s), g(a)) \le |g(a)|_\rho + TV_\rho\big(g, I_a^b\big) = \|g\|_\rho,$$

и аналогично из (9) и (6) вытекает, что

$$|f(t,s)|_{d_L} = L(f(t,s)) \le L(f(a)) + d_L(f(t,s), f(a))$$
$$\le |f(a)|_{d_L} + TV_{d_L}\big(f, I_a^b\big) = \|f\|_{d_L}.$$

В силу определения метрики d_L и оценки на $|g(t,s)|_\rho$ для S_1 имеем

$$d\big(r_1^{ij}, l_1^{ij}\big) \le d_L(f(t_{i-1}, s_{j-1}) + f(t_i, s_j), f(t_{i-1}, s_j) + f(t_i, s_{j-1}))|g(t_{i-1}, s_{j-1})|_\rho$$
$$\le \mathrm{md}(f, I_{ij})\|g\|_\rho,$$

откуда

$$S_1 \le V_2\big(f, I_a^b\big)\|g\|_\rho.$$

Из определения константы Липшица и оценки на $|f(t,s)|_{d_L}$ для S_2 находим, что

$$d\big(r_2^{ij}, l_2^{ij}\big) \le L(f(t_i, s_j))\rho(g(t_{i-1}, s_{j-1}) + g(t_i, s_j), g(t_{i-1}, s_j) + g(t_i, s_{j-1}))$$
$$= |f(t_i, s_j)|_{d_L}\,\mathrm{md}(g, I_{ij}) \le \|f\|_{d_L}\,\mathrm{md}(g, I_{ij})$$

и, следовательно,

$$S_2 \le \|f\|_{d_L} V_2\big(g, I_a^b\big).$$

Для слагаемого S_3 (снова привлекая определение d_L) имеем

$$d\big(r_3^{ij}, l_3^{ij}\big) \le d_L(f(a_1, s_j), f(a_1, s_{j-1}))\rho(g(t_i, a_2), g(t_{i-1}, a_2))$$

и, значит,

$$S_3 \le V_{a_2}^{b_2}(f(a_1, \cdot))V_{a_1}^{b_1}(g(\cdot, a_2)).$$

Аналогично S_3 оценивается выражение S_7:

$$d\big(r_7^{ij}, l_7^{ij}\big) \le d_L(f(t_i, a_2), f(t_{i-1}, a_2))\rho(g(a_1, s_j), g(a_1, s_{j-1}));$$

$$S_7 \le V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot, a_2))V_{a_2}^{b_2}(g(a_1, \cdot)).$$

Для S_4 получаем

$$d\bigl(r_4^{ij},l_4^{ij}\bigr)\le d_L(f(a_1,s_j),f(a_1,s_{j-1}))\rho(g(t_{i-1},a_2)+g(t_i,s_{j-1}),g(t_{i-1},s_{j-1})+g(t_i,a_2))$$
$$=d_L(f(a_1,s_j),f(a_1,s_{j-1}))\,\mathrm{md}\bigl(g,I_{t_{i-1},a_2}^{t_i,s_{j-1}}\bigr)\le d_L(f(a_1,s_j),f(a_1,s_{j-1}))V_2\bigl(g,I_{t_{i-1},a_2}^{t_i,b_2}\bigr),$$

откуда благодаря (монотонности и) аддитивности V_2 (см. (7)) находим, что

$$S_4\le V_{a_2}^{b_2}(f(a_1,\cdot))V_2\bigl(g,I_a^b\bigr).$$

Аналогично S_4 получаем оценку для S_8:

$$d\bigl(r_8^{ij},l_8^{ij}\bigr)\le d_L(f(t_i,a_2),f(t_{i-1},a_2))\,\mathrm{md}\bigl(g,I_{a_1,s_{j-1}}^{t_{i-1},s_j}\bigr)$$
$$\le d_L(f(t_i,a_2),f(t_{i-1},a_2))V_2\bigl(g,I_{a_1,s_{j-1}}^{b_1,s_j}\bigr);$$
$$S_8\le V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2))V_2\bigl(g,I_a^b\bigr).$$

Чтобы оценить S_5, заметим, что

$$d\bigl(r_5^{ij},l_5^{ij}\bigr)\le d_L(f(a_1,s_{j-1})+f(t_i,s_j),f(a_1,s_j)+f(t_i,s_{j-1}))\rho(g(t_i,a_2),g(t_{i-1},a_2))$$
$$=\mathrm{md}\bigl(f,I_{a_1,s_{j-1}}^{t_i,s_j}\bigr)\rho(g(t_i,a_2),g(t_{i-1},a_2))\le V_2\bigl(f,I_{a_1,s_{j-1}}^{b_1,s_j}\bigr)\rho(g(t_i,a_2),g(t_{i-1},a_2)),$$

откуда в силу монотонности и аддитивности двойной вариации V_2

$$S_5\le V_2\bigl(f,I_a^b\bigr)V_{a_1}^{b_1}(g(\cdot,a_2)).$$

Аналогично S_5 оценивается слагаемое S_9:

$$d\bigl(r_9^{ij},l_9^{ij}\bigr)\le \mathrm{md}\bigl(f,I_{t_{i-1},a_2}^{t_i,s_j}\bigr)\rho(g(a_1,s_j),g(a_1,s_{j-1}))$$
$$\le V_2\bigl(f,I_{t_{i-1},a_2}^{t_i,b_2}\bigr)\rho(g(a_1,s_j),g(a_1,s_{j-1}));$$
$$S_9\le V_2\bigl(f,I_a^b\bigr)V_{a_2}^{b_2}(g(a_1,\cdot)).$$

Из следующих неравенств, базирующихся на определении d_L:

$$d\bigl(r_6^{ij},l_6^{ij}\bigr)\le d_L(f(a_1,s_{j-1})+f(t_i,s_j),f(a_1,s_j)+f(t_i,s_{j-1}))$$
$$\times\rho(g(t_{i-1},a_2)+g(t_i,s_{j-1}),g(t_{i-1},s_{j-1})+g(t_i,a_2))$$
$$=\mathrm{md}\bigl(f,I_{a_1,s_{j-1}}^{t_i,s_j}\bigr)\,\mathrm{md}\bigl(g,I_{t_{i-1},a_2}^{t_i,s_{j-1}}\bigr)\le V_2\bigl(f,I_{a_1,s_{j-1}}^{b_1,s_j}\bigr)V_2\bigl(g,I_{t_{i-1},a_2}^{t_i,b_2}\bigr),$$

и аддитивности V_2 вытекает оценка для S_6:

$$S_6\le V_2\bigl(f,I_a^b\bigr)V_2\bigl(g,I_a^b\bigr).$$

Слагаемое S_{10} оценивается так же, как S_6:

$$d\bigl(r_{10}^{ij},l_{10}^{ij}\bigr)\le \mathrm{md}\bigl(f,I_{t_{i-1},a_2}^{t_i,s_j}\bigr)\,\mathrm{md}\bigl(g,I_{a_1,s_{j-1}}^{t_{i-1},s_j}\bigr)\le V_2\bigl(f,I_{t_{i-1},a_2}^{t_i,b_2}\bigr)V_2\bigl(g,I_{a_1,s_{j-1}}^{b_1,s_j}\bigr);$$
$$S_{10}\le V_2\bigl(f,I_a^b\bigr)V_2\bigl(g,I_a^b\bigr).$$

Таким образом, для $V_2\bigl(fg,I_a^b\bigr)$ получаем следующую оценку:

$$V_2\bigl(fg,I_a^b\bigr)\le |f(a)|_{d_L}V_2\bigl(g,I_a^b\bigr)+2V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2))V_2\bigl(g,I_a^b\bigr)$$
$$+2V_{a_2}^{b_2}(f(a_1,\cdot))V_2\bigl(g,I_a^b\bigr)+V_2\bigl(f,I_a^b\bigr)|g(a)|_\rho$$
$$+2V_2\bigl(f,I_a^b\bigr)V_{a_1}^{b_1}(g(\cdot,a_2))+2V_2\bigl(f,I_a^b\bigr)V_{a_2}^{b_2}(g(a_1,\cdot))$$
$$+V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2))V_{a_2}^{b_2}(g(a_1,\cdot))+V_{a_2}^{b_2}(f(a_1,\cdot))V_{a_1}^{b_1}(g(\cdot,a_2))+4V_2\bigl(f,I_a^b\bigr)V_2\bigl(g,I_a^b\bigr).$$

Принимая во внимание (10)–(13) и последнюю оценку, получим искомое неравенство в теореме 2. $\square$

Замечание 1. Если в теореме 2 положить $I_a^b=[a,b]\subset\mathbb{R}$ и заменить BV_2 на BV_1 и $\mathrm{L}(N;M)$ на $\mathrm{Lip}_0(N;M)=\{T\in\mathrm{Lip}(N;M)\mid T(0)=0\}$, то $fg\in\mathrm{BV}_1\bigl(I_a^b;M\bigr)$, причем $\|fg\|_d\le 2\|f\|_{d_L}\|g\|_\rho$, где $\|fg\|_d=d((fg)(a),0)+V_a^b(fg)$, $\|f\|_{d_L}=L(f(a))+V_a^b(f)$ и $\|g\|_\rho=\rho(g(a),0)+V_a^b(g)$.

Ввиду теоремы 2 теорема 1 из [1] допускает следующее обращение.

Теорема 3. *Пусть* $(N, \rho, +)$ *и* $(M, d, +)$ — *две метрические полугруппы с нулями, и пусть отображение* $h : I_a^b \times N \to M$, *определенное согласно правилу* $h(x, u) = f(x)u + h_0(x)$, *где* $f \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; \mathrm{L}(N; M)\big)$, $h_0 \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$, *является генератором оператора суперпозиции* $\mathscr{H}$. *Тогда* $\mathscr{H} \in \mathrm{Lip}\big(\mathrm{BV}_2\big(I_a^b; N\big); \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)\big)$ *и имеет место неравенство* $L(\mathscr{H}) \le 4\|f\|_{d_L}$.

Доказательство. Вначале предполагаем, что $h_0 = 0$. Тогда оператор суперпозиции $\mathscr{H}$ с таким генератором действует по правилу: $(\mathscr{H}g)(x) = f(x)g(x) = (fg)(x)$ для $x \in I_a^b$ и $g : I_a^b \to N$. По теореме 2 если $g \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; N\big)$, то $\mathscr{H}g \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$, так что $\mathscr{H}$ действует из $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b; N\big)$ в $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$. Покажем, что $\mathscr{H}$ липшицев.

Пусть $g_1, g_2 \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; N\big)$. По определению метрики d_2 имеем

$$d_2(\mathscr{H}g_1, \mathscr{H}g_2) = d((\mathscr{H}g_1)(a), (\mathscr{H}g_2)(a)) + TW_d\big(\mathscr{H}g_1, \mathscr{H}g_2, I_a^b\big),$$

где последнее слагаемое равно

$$\begin{aligned} &W_{a_1}^{b_1}((\mathscr{H}g_1)(\cdot, a_2), (\mathscr{H}g_2)(\cdot, a_2)) \\ &\qquad + W_{a_2}^{b_2}((\mathscr{H}g_1)(a_1, \cdot), (\mathscr{H}g_2)(a_1, \cdot)) + W_2\big(\mathscr{H}g_1, \mathscr{H}g_2, I_a^b\big). \end{aligned}$$

Оценим каждое из четырех слагаемых в $d_2(\mathscr{H}g_1, \mathscr{H}g_2)$ по отдельности. Для первого слагаемого имеем

$$d((\mathscr{H}g_1)(a), (\mathscr{H}g_2)(a)) = d(f(a)g_1(a), f(a)g_2(a)) \le |f(a)|_{d_L}\rho(g_1(a), g_2(a)).$$

Для оценки второго слагаемого заметим, что в силу аддитивности операторов $f(t, a_2)$ для всех $t, s \in [a_1, b_1]$ будет

$$\begin{aligned} &[(fg_1)(t, a_2) + (fg_2)(s, a_2)]_0 + [f(t, a_2)(g_2(t, a_2) + g_1(s, a_2))]_1 \\ &\qquad + [f(s, a_2)g_1(s, a_2) + f(t, a_2)g_2(s, a_2)]_2 \\ &= [(fg_2)(t, a_2) + (fg_1)(s, a_2)]_0 + [f(t, a_2)(g_1(t, a_2) + g_2(s, a_2))]_1 \\ &\qquad + [f(t, a_2)g_1(s, a_2) + f(s, a_2)g_2(s, a_2)]_2. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (14) получаем, что

$$\begin{aligned} &d((\mathscr{H}g_1)(t, a_2) + (\mathscr{H}g_2)(s, a_2), (\mathscr{H}g_2)(t, a_2) + (\mathscr{H}g_1)(s, a_2)) \\ &= d((fg_1)(t, a_2) + (fg_2)(s, a_2), (fg_2)(t, a_2) + (fg_1)(s, a_2)) \\ &\le d(f(t, a_2)(g_1(t, a_2) + g_2(s, a_2)), f(t, a_2)(g_2(t, a_2) + g_1(s, a_2))) \\ &\quad + d(f(t, a_2)g_1(s, a_2) + f(s, a_2)g_2(s, a_2), f(s, a_2)g_1(s, a_2) + f(t, a_2)g_2(s, a_2)) \\ &\le L(f(t, a_2))\rho(g_1(t, a_2) + g_2(s, a_2), g_2(t, a_2) + g_1(s, a_2)) \\ &\qquad + d_L(f(t, a_2), f(s, a_2))\rho(g_1(s, a_2), g_2(s, a_2)) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} W_{a_1}^{b_1}((\mathscr{H}g_1)(\cdot, a_2), (\mathscr{H}g_2)(\cdot, a_2)) &\le \big(\sup_{t \in [a_1, b_1]} L(f(t, a_2))\big)W_{a_1}^{b_1}(g_1(\cdot, a_2), g_2(\cdot, a_2)) \\ &\quad + V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot, a_2))\big(\sup_{s \in [a_2, b_2]} \rho(g_1(s, a_2), g_2(s, a_2))\big). \end{aligned}$$

В этом неравенстве, как отмечено в доказательстве теоремы 2,

$$\sup_{t \in [a_1, b_1]} L(f(t, a_2)) \le |f(a)|_{d_L} + V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot, a_2))$$

и

$$\sup_{s\in[a_1,b_1]} \rho(g_1(s,a_2),g_2(s,a_2)) \le \rho(g_1(a),g_2(a)) + W_{a_1}^{b_1}(g_1(\cdot,a_2),g_2(\cdot,a_2)).$$

Таким образом, подобно (12) имеем

$$W_{a_1}^{b_1}((\mathscr{H}g_1)(\cdot,a_2),(\mathscr{H}g_2)(\cdot,a_2)) \le |f(a)|_{d_L} W_{a_1}^{b_1}(g_1(\cdot,a_2),g_2(\cdot,a_2)) \\ + V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2))\rho(g_1(a),g_2(a)) + 2V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2))W_{a_1}^{b_1}(g_1(\cdot,a_2),g_2(\cdot,a_2)).$$

Аналогичная оценка имеет место и для третьего слагаемого:

$$W_{a_2}^{b_2}((\mathscr{H}g_1)(a_1,\cdot),(\mathscr{H}g_2)(a_1,\cdot)) \le |f(a)|_{d_L} W_{a_2}^{b_2}(g_1(a_1,\cdot),g_2(a_1,\cdot)) \\ + V_{a_2}^{b_2}(f(a_1,\cdot))\rho(g_1(a),g_2(a)) + 2V_{a_2}^{b_2}(f(a_1,\cdot))W_{a_2}^{b_2}(g_1(a_1,\cdot),g_2(a_1,\cdot)).$$

Для оценки четвертого слагаемого $W_2\big(\mathscr{H}g_1,\mathscr{H}g_2,I_a^b\big)$ поступим следующим образом. Пусть $\{t_i\}_{i=0}^m$ и $\{s_j\}_{j=0}^n$ — разбиения $[a_1,b_1]$ и $[a_2,b_2]$ соответственно. Обозначим (несколько точнее) через $l_k^{ij}(g)$ и $r_k^{ij}(g)$ выражения в квадратных скобках l_k^{ij} и r_k^{ij} из доказательства теоремы 2. Тогда найдем, что в M выполнено равенство

$$\sum_{k=0}^{10}\big(l_k^{ij}(g_1)+r_k^{ij}(g_2)\big) = \sum_{k=0}^{10}\big(r_k^{ij}(g_1)+l_k^{ij}(g_2)\big)$$

(формально оно вытекает из использованного в доказательстве теоремы 2 равенства $\sum\limits_{k=0}^{10} l_k^{ij}(g) = \sum\limits_{k=0}^{10} r_k^{ij}(g)$ при $g=g_1-g_2$), из которого в силу (4) и (14)

$$\mathrm{md}_2(g_1,g_2,I_{ij}) = d\big(l_0^{ij}(g_1)+r_0^{ij}(g_2), l_0^{ij}(g_2)+r_0^{ij}(g_1)\big) \\ \le \sum_{k=1}^{10} d\big(r_k^{ij}(g_1)+l_k^{ij}(g_2), r_k^{ij}(g_2)+l_k^{ij}(g_1)\big) \equiv \sum_{k=1}^{10} d_k^{ij}.$$

Положим

$$S_k = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n d_k^{ij}, \quad k=1,\dots,10.$$

Чтобы оценить величины S_k, заметим, что ввиду (8) и определения метрики ρ_2 для всех $(t,s)\in I_a^b$ имеем

$$\rho(g_1(t,s),g_2(t,s)) \le \rho(g_1(a),g_2(a)) + TW_\rho\big(g_1,g_2,I_a^b\big) = \rho_2(g_1,g_2).$$

Как и в доказательстве теоремы 2, оценка S_1 следует из определения метрики d_L:

$$d_1^{ij} = d((f(t_{i-1},s_{j-1})+f(t_i,s_j))g_1(t_{i-1},s_{j-1})+(f(t_{i-1},s_j)+f(t_i,s_{j-1}))g_2(t_{i-1},s_{j-1}), \\ (f(t_{i-1},s_{j-1})+f(t_i,s_j))g_2(t_{i-1},s_{j-1})+(f(t_{i-1},s_j)+f(t_i,s_{j-1}))g_1(t_{i-1},s_{j-1})) \\ \le d_L(f(t_{i-1},s_{j-1})+f(t_i,s_j), f(t_{i-1},s_j)+f(t_i,s_{j-1}))\rho(g_1(t_{i-1},s_{j-1}),g_2(t_{i-1},s_{j-1})) \\ \le \mathrm{md}(f,I_{ij})\rho_2(g_1,g_2),$$

откуда

$$S_1 \le V_2\big(f,I_a^b\big)\rho_2(g_1,g_2).$$

Подобным образом получаются такие же оценки на S_k, как в доказательстве теоремы 2, в которых следует заменить $V_{a_1}^{b_1}(g(\cdot,a_2))$ на $W_{a_1}^{b_1}(g_1(\cdot,a_2),g_2(\cdot,a_2))$, $V_{a_2}^{b_2}(g(a_1,\cdot))$ на $W_{a_2}^{b_2}(g_1(a_1,\cdot),g_2(a_1,\cdot))$ и $V_2\big(g,I_a^b\big)$ на $W_2\big(g_1,g_2,I_a^b\big)$.

Следовательно, собирая вместе все эти оценки, найдем, что

$$d_2(\mathscr{H}g_1, \mathscr{H}g_2) \le 4\|f\|_{d_L}\rho_2(g_1, g_2).$$

Общий случай для $h_0 \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$ вытекает из только что рассмотренного благодаря инвариантности относительно сдвигов метрики d_2 на $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$. □

Замечание 2. Пусть N и M такие, как в теореме 3, и $g \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; N\big)$. Тогда оператор $H : \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; \mathrm{L}(N; M)\big) \to \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$, действующий по правилу $H(f) = fg$, является липшицевым с константой Липшица $L(H) \le 4\|g\|_\rho$.

Замечание 3. Из теоремы Банаха о неподвижной точке и теоремы 3 непосредственно вытекает, что если M есть полная метрическая полугруппа с нулем, $h_0 \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$, $f \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; \mathrm{L}(N; M)\big)$ и $\|f\|_{d_L} < 1/4$, то существует единственное отображение $g \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$ такое, что $g(x) = f(x)g(x) + h_0(x)$ для всех $x \in I_a^b$.

Замечание 4. С учетом замечания 1 (см. также замечание 6 в [1]) аналог теоремы 3 имеет место и для отображений одной переменной.

§ 5. Липшицевы повторные операторы суперпозиции

Рассмотрим иной подход к определению пространства $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$, когда $(M, d, +)$ — метрическая полугруппа. Пусть $f \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$. Тогда $f(\cdot, s) \in \mathrm{BV}_1([a_1, b_1]; M)$ для всех $s \in [a_2, b_2]$ и аналогично $f(t, \cdot) \in \mathrm{BV}_1([a_2, b_2]; M)$ для всех $t \in [a_1, b_1]$ и имеют место неравенства [7, 8]

$$V_{x_1}^{y_1}(f(\cdot, s)) \le V_{x_1}^{y_1}(f(\cdot, a_2)) + V_2\big(f, I_{x_1, a_2}^{y_1, s}\big), \quad x_1, y_1 \in [a_1, b_1],\ x_1 \le y_1, \tag{15}$$

$$V_{x_2}^{y_2}(f(t, \cdot)) \le V_{x_2}^{y_2}(f(a_1, \cdot)) + V_2\big(f, I_{a_1, x_2}^{t, y_2}\big), \quad x_2, y_2 \in [a_2, b_2],\ x_2 \le y_2. \tag{16}$$

Положим $I_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, 2$, так что $I_a^b = I_1 \times I_2$. В силу (16) $f(t, \cdot) \in \mathrm{BV}_1(I_2; M)$ при любом $t \in I_1$, поэтому если $\mathscr{F}(t) = f(t, \cdot)$ для $t \in I_1$, то отображение $\mathscr{F} : I_1 \to \mathrm{BV}_1(I_2; M)$ действует по правилу $\mathscr{F}(t)(s) = f(t, s)$, $t \in I_1$, $s \in I_2$. Как отмечено ранее, пространство $\mathrm{BV}_1(I_2; M)$ является метрической полугруппой с метрикой $d_1(\varphi, \psi) = d(\varphi(a_2), \psi(a_2)) + W_{a_2}^{b_2}(\varphi, \psi)$, а значит, можно посчитать вариацию отображения $\mathscr{F}$ на отрезке I_1. Для этого пусть $\xi = \{t_i\}_{i=0}^m$ есть разбиение I_1. Рассмотрим выражение

$$d_1(\mathscr{F}(t_i), \mathscr{F}(t_{i-1})) = d(\mathscr{F}(t_i)(a_2), \mathscr{F}(t_{i-1})(a_2)) + W_{a_2}^{b_2}(\mathscr{F}(t_i), \mathscr{F}(t_{i-1})). \tag{17}$$

Ясно, что первое слагаемое справа равно $d(f(t_i, a_2), f(t_{i-1}, a_2))$. Для оценки второго слагаемого предположим, что $\eta = \{s_j\}_{j=0}^n$ есть разбиение I_2. Тогда (см. (2) и (4))

$$d(\mathscr{F}(t_i)(s_j) + \mathscr{F}(t_{i-1})(s_{j-1}), \mathscr{F}(t_{i-1})(s_j) + \mathscr{F}(t_i)(s_{j-1})) = \mathrm{md}(f, I_{ij}) \tag{18}$$

и в силу аддитивности V_2 находим, что

$$\sum_{j=1}^n d(\mathscr{F}(t_i)(s_j) + \mathscr{F}(t_{i-1})(s_{j-1}), \mathscr{F}(t_{i-1})(s_j) + \mathscr{F}(t_i)(s_{j-1})) \\ = \sum_{j=1}^n \mathrm{md}(f, I_{ij}) \le \sum_{j=1}^n V_2(f, I_{ij}) = V_2\big(f, I_{t_{i-1}, a_2}^{t_i, b_2}\big).$$

Следовательно, благодаря произвольности η

$$W_{a_2}^{b_2}(\mathscr{F}(t_i), \mathscr{F}(t_{i-1})) \le V_2\bigl(f, I_{t_{i-1},a_2}^{t_i,b_2}\bigr), \quad i = 1, \dots, m. \tag{19}$$

Тогда из (17) получаем

$$\sum_{i=1}^m d_1(\mathscr{F}(t_i), \mathscr{F}(t_{i-1})) \le \sum_{i=1}^m d(f(t_i, a_2), f(t_{i-1}, a_2)) + \sum_{i=1}^m V_2\bigl(f, I_{t_{i-1},a_2}^{t_i,b_2}\bigr) \\ \le V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot, a_2)) + V_2\bigl(f, I_a^b\bigr),$$

откуда (в силу произвольности разбиения ξ)

$$V_{a_1}^{b_1}(\mathscr{F}) \le V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot, a_2)) + V_2\bigl(f, I_a^b\bigr).$$

Снова возвращаясь к разбиениям ξ и η, из (18) найдем также, что

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathrm{md}(f, I_{ij}) \le \sum_{i=1}^m W_{a_2}^{b_2}(\mathscr{F}(t_i), \mathscr{F}(t_{i-1})), \tag{20}$$

а потому $V_2\bigl(f, I_a^b\bigr) \le V_{a_1}^{b_1}\bigl(\mathscr{F}; W_{a_2}^{b_2}\bigr)$, где $V_{a_1}^{b_1}\bigl(\mathscr{F}; W_{a_2}^{b_2}\bigr)$ — вариация $\mathscr{F}$ по отрезку I_1, вычисленная в полуметрике $W_{a_2}^{b_2}$. Последнее неравенство вместе с (19) дает

$$V_2\bigl(f, I_a^b\bigr) = V_{a_1}^{b_1}\bigl(\mathscr{F}; W_{a_2}^{b_2}\bigr).$$

Кроме того, из (20) с учетом первого слагаемого (17) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^m d(f(t_i, a_2), f(t_{i-1}, a_2)) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathrm{md}\bigl(f, I_{t_{i-1},s_{j-1}}^{t_i,s_j}\bigr) \\ \le \sum_{i=1}^m d_1(\mathscr{F}(t_i), \mathscr{F}(t_{i-1})) \le V_{a_1}^{b_1}(\mathscr{F}),$$

а так как суммы в левой части не убывают при измельчении разбиения ξ, то

$$V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot, a_2)) + V_2\bigl(f, I_a^b\bigr) \le V_{a_1}^{b_1}(\mathscr{F}).$$

Итак, мы показали, что $\mathscr{F} \in \mathrm{BV}_1(I_1; \mathrm{BV}_1(I_2; M))$ и

$$V_{a_1}^{b_1}(\mathscr{F}) = V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot, a_2)) + V_2\bigl(f, I_a^b\bigr).$$

Аналогично если $\mathscr{G}(s)(t) = f(t, s)$, $t \in I_1$, $s \in I_2$, то $\mathscr{G} \in \mathrm{BV}_1(I_2; \mathrm{BV}_1(I_1; M))$,

$$V_{a_2}^{b_2}(\mathscr{G}) = V_{a_2}^{b_2}(f(a_1, \cdot)) + V_2\bigl(f, I_a^b\bigr) \quad \text{и} \quad V_2\bigl(f, I_a^b\bigr) = V_{a_2}^{b_2}\bigl(\mathscr{G}; W_{a_1}^{b_1}\bigr).$$

Указывая для отображений $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ их зависимость от f, т. е. записывая их в виде $\mathscr{F}_f$ и $\mathscr{G}_f$, придем к равенству

$$\mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; M\bigr) = \bigl\{f : I_a^b \to M \mid \mathscr{F}_f \in \mathrm{BV}_1(I_1; \mathrm{BV}_1(I_2; M)) \\ \text{и } \mathscr{G}_f \in \mathrm{BV}_1(I_2; \mathrm{BV}_1(I_1; M))\bigr\},$$

которое можно переписать в следующей *символической* форме:

$$\mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; M\bigr) = \mathrm{BV}_1(I_1; \mathrm{BV}_1(I_2; M)) \cap \mathrm{BV}_1(I_2; \mathrm{BV}_1(I_1; M)).$$

Всюду ниже для $f \in \mathrm{BV}_1(I_1; \mathrm{BV}_1(I_2; M))$ полагаем $f(t, s) = f(t)(s)$, $t \in I_1$, $s \in I_2$.

Для изучения повторных операторов суперпозиции (см. ниже) нам потребуется

Лемма 1. *Если $(M,d,+)$ — метрическая полугруппа, то метрика $d_{11}=(d_1)_1$ на метрической полугруппе $\mathrm{BV}_1(I_1;\mathrm{BV}_1(I_2;M))$ задается равенством $d_{11}=d_2$.*

Доказательство. Пусть d_1 — введенная ранее метрика на $\mathrm{BV}_1\big(I_2;M\big)$. Пусть отображения f и g лежат в $\mathrm{BV}_1(I_1;\mathrm{BV}_1(I_2;M))$. Тогда

$$d_{11}(f,g)=d_1(f(a_1),g(a_1))+\sup_\xi\sum_{i=1}^m d_1(f(t_i)+g(t_{i-1}),g(t_i)+f(t_{i-1})),$$

где супремум берется по всем разбиениям $\xi=\{t_i\}_{i=0}^m$ отрезка $[a_1,b_1]$. Имеем

$$\begin{aligned}d_1(f(a_1),g(a_1))&=d(f(a_1)(a_2),g(a_1)(a_2))\\&\quad+\sup_\eta\sum_{j=1}^n d(f(a_1)(s_j)+g(a_1)(s_{j-1}),g(a_1)(s_j)+f(a_1)(s_{j-1}))\\&=d(f(a),g(a))+W_{a_2}^{b_2}(f(a_1,\cdot),g(a_1,\cdot));\end{aligned}$$

здесь супремум берется по всем разбиениям $\eta=\{s_j\}_{j=0}^n$ отрезка $[a_2,b_2]$. Далее,

$$\begin{aligned}d_1(f(t_i)+g(t_{i-1}),g(t_i)+f(t_{i-1}))&=d(f(t_i)(a_2)+g(t_{i-1})(a_2),g(t_i)(a_2)+f(t_{i-1})(a_2))\\&\quad+\sup_\eta\sum_{j=1}^n d(f(t_i)(s_j)+g(t_{i-1})(s_j)+g(t_i)(s_{j-1})+f(t_{i-1})(s_{j-1}),\\&\qquad g(t_i)(s_j)+f(t_{i-1})(s_j)+f(t_i)(s_{j-1})+g(t_{i-1})(s_{j-1}))\\&=d(f(t_i)(a_2)+g(t_{i-1})(a_2),g(t_i)(a_2)+f(t_{i-1})(a_2))+\sup_\eta\sum_{j=1}^n\mathrm{md}_2(f,g,I_{ij}),\end{aligned}$$

где использовано обозначение (4). Из аддитивности W_2 следует, что

$$\sum_{j=1}^n\mathrm{md}_2(f,g,I_{ij})\le\sum_{j=1}^n W_2(f,g,I_{ij})=W_2\big(f,g,I_{t_{i-1},a_2}^{t_i,b_2}\big),$$

а потому

$$\sup_\xi\sum_{i=1}^m d_1(f(t_i)+g(t_{i-1}),g(t_i)+f(t_{i-1}))\le W_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2),g(\cdot,a_2))+W_2\big(f,g,I_a^b\big).\tag{21}$$

Замечая, что

$$\begin{aligned}d(f(t_i)(a_2)+g(t_{i-1})(a_2),g(t_i)(a_2)+f(t_{i-1})(a_2))+\sum_{j=1}^n\mathrm{md}_2(f,g,I_{ij})&\\\le d_1(f(t_i)+g(t_{i-1}),g(t_i)+f(t_{i-1}))&\end{aligned}$$

и что слагаемые в левой части этого неравенства не убывают при добавлении точек в разбиение $\xi=\{t_i\}_{i=0}^m$, приходим к обратному неравенству в (21). Остается принять во внимание выражение для $d_2(f,g)$. $\square$

Хотя, как показано выше, отображения из $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)$ являются отображениями ограниченной повторной вариации и имеет место равенство метрик $d_{11}=d_2$, на последних липшицевы операторы суперпозиции $\mathscr{H}$ устроены несколько иначе (см. теорему 4 ниже). Причина здесь кроется в том, что для отображений ограниченной повторной вариации левая-левая регуляризация существует не всегда.

Для $g \in (N^{I_2})^{I_1}$ (т. е. $g : I_1 \to N^{I_2}$) или $g \in N^{I_a^b}$ (т. е. $g : I_a^b \to N$) полагаем $g(t,s) = g(t)(s)$ для всех $t \in I_1$ и $s \in I_2$. Для заданного отображения $h : I_a^b \times N \to M$ оператор $\mathscr{H} : (N^{I_2})^{I_1} \to (M^{I_2})^{I_1}$, определенный для $(t,s) \in I_1 \times I_2$ и $g \in (N^{I_2})^{I_1}$ правилом

$$(\mathscr{H}g)(t)(s) \equiv (\mathscr{H}g)(t,s) = h(t,s,g(t,s)) \equiv h(t,s,g(t)(s)), \tag{22}$$

называется *повторным оператором суперпозиции Немыцкого с генератором* h.

В следующей теореме мы используем обозначение для левой регуляризации h^- (в одномерном смысле, см. [1, замечание 6]) отображения $h \in \mathrm{BV}_1([a,b];M)$, когда $(M,d,+)$ есть полная метрическая полугруппа: $h^-(t) = \lim\limits_{s\to t-0} h(s)$ при $a < t \le b$ и $h^-(a) = \lim\limits_{t\to a+0} h^-(t)$ в M. Если обозначить через $\mathrm{BV}_1^-([a,b];M)$ множество тех отображений из $\mathrm{BV}_1([a,b];M)$, которые непрерывны слева на $(a,b]$, то $h^- \in \mathrm{BV}_1^-([a,b];M)$ и $V_a^b(h^-) \le V_a^b(h)$.

Теорема 4. *Пусть* $(N,\rho,+,\cdot)$ *и* $(M,d,+,\cdot)$ — *два абстрактных выпуклых конуса, где* M *полный, и отображение* $h : I_a^b \times N \to M$ *есть генератор повторного оператора суперпозиции* $\mathscr{H}$ *из* (22). *Если* $\mathscr{H}$ *отображает* $\mathrm{BV}_1(I_1;\mathrm{BV}_1(I_2;N))$ *в* $\mathrm{BV}_1(I_1;\mathrm{BV}_1(I_2;M))$ *и является липшицевым, то* $h(x,\cdot) \in \mathrm{Lip}(N;M)$ *для всех* $x \in I_a^b$ *и найдутся два отображения* $f : I_a^b \to \mathrm{L}(N;M)$ *и* $h_0 : I_a^b \to M$ *такие, что* $f(\cdot)(\cdot)u, h_0 \in \mathrm{BV}_1^-(I_1;\mathrm{BV}_1(I_2;M))$ *для всех* $u \in N$ *и* $h^-(t,s,u) = f(t,s)u + h_0(t,s)$ *в* M *для всех* $(t,s) \in I_a^b$ *и* $u \in N$, *где* $h^-(t,s,u)$ *есть левая регуляризация* (*в одномерном смысле*) *отображения* $\tau \mapsto h(\tau,s,u)$ *в точке* $t \in [a_1,b_1]$ *при всех фиксированных* $s \in I_2$ *и* $u \in N$ (*отметим, что отображения* $\tau \mapsto f(\tau,s)u$ *и* $\tau \mapsto h_0(\tau,s)$ *непрерывны слева на* $(a_1,b_1]$ *для всех* $s \in I_2$ *и* $u \in N$).

Доказательство. Положим $N_1 = \mathrm{BV}_1(I_2;N)$ и $M_1 = \mathrm{BV}_1(I_2;M)$. Тогда четверки $(N_1,\rho_1,+,\cdot)$ и $(M_1,d_1,+,\cdot)$ также являются абстрактными выпуклыми конусами, причем M_1 полный. Определим отображение $h_1 : I_1 \times N^{I_2} \to M^{I_2}$ правилом

$$h_1(t,u_1)(s) = h(t,s,u_1(s)), \quad t \in I_1,\ s \in I_2,\ u_1 \in N^{I_2}. \tag{23}$$

Исходя из этого определим оператор суперпозиции $\mathscr{H}_1 : (N^{I_2})^{I_1} \to (M^{I_2})^{I_1}$ следующим образом:

$$\mathscr{H}_1(g)(t) = h_1(t,g(t)), \quad t \in I_1,\ g \in (N^{I_2})^{I_1}. \tag{24}$$

Отметим, что если $t \in I_1$ и $s \in I_2$, то

$$\mathscr{H}_1(g)(t)(s) = h_1(t,g(t))(s) = h(t,s,g(t)(s)) = (\mathscr{H}g)(t,s). \tag{25}$$

Покажем, что $h_1 : I_1 \times N_1 \to M_1$. Действительно, пусть $t \in I_1$ и $u_1 \in N_1$. Положим $g(t)(s) = u_1(s)$ для $t \in I_1$ и $s \in I_2$, так что $g \in \mathrm{BV}_1(I_1;N_1)$. По условию $\mathscr{H}g$ лежит в $\mathrm{BV}_1(I_1;M_1)$, поэтому $(\mathscr{H}g)(t) \in M_1$, но

$$h_1(t,u_1)(s) = h(t,s,u_1(s)) = h(t,s,g(t)(s)) = (\mathscr{H}g)(t)(s), \quad s \in I_2,$$

откуда $h_1(t,u_1) = (\mathscr{H}g)(t) \in M_1$. Отсюда следует, что $\mathscr{H}_1 : (N_1)^{I_1} \to (M_1)^{I_1}$ и выполнено (24) для $t \in I_1$ и $g \in (N_1)^{I_1}$, т. е. отображение $h_1 : I_1 \times N_1 \to M_1$ является генератором оператора суперпозиции $\mathscr{H}_1 : (N_1)^{I_1} \to (M_1)^{I_1}$. Более того, $\mathscr{H}_1 : \mathrm{BV}_1(I_1; N_1) \to \mathrm{BV}_1(I_1; M_1)$, так как если $g \in \mathrm{BV}_1(I_1; N_1)$, то в силу (25) и условий теоремы $\mathscr{H}_1(g) = \mathscr{H} g \in \mathrm{BV}_1(I_1; M_1)$. Из липшицевости $\mathscr{H}$ для всех $g_1, g_2 \in \mathrm{BV}_1(I_1; N_1)$ имеем $d_2(\mathscr{H} g_1, \mathscr{H} g_2) \le L(\mathscr{H})\rho_2(g_1, g_2)$, но $d_2 = (d_1)_1$ и $\rho_2 = (\rho_1)_1$ в силу леммы 1, поэтому благодаря (25) находим, что $\mathscr{H}_1 \in \mathrm{Lip}(\mathrm{BV}_1(I_1; N_1); \mathrm{BV}_1(I_1; M_1))$. Согласно замечанию 6 из [1]

$$h_1(t, \cdot) \in \mathrm{Lip}(N_1; M_1) \quad \text{для всех } t \in I_1 \tag{26}$$

и найдутся два отображения $f_1 : I_1 \to \mathrm{L}(N_1; M_1)$ и $h_0 : I_1 \to M_1$ такие, что отображения $f_1(\cdot)u_1$ и h_0 лежат в $\mathrm{BV}_1^-(I_1; M_1)$ для всех $u_1 \in N_1$, причем

$$h_1^-(t, u_1) = f_1(t)u_1 + h_0(t) \quad \text{в } M,\ t \in I_1,\ u_1 \in N_1, \tag{27}$$

где $h_1^-(\cdot, u_1)$ — левая регуляризация отображения $h_1(\cdot, u_1)$, $u_1 \in N_1$.

Ниже в этом доказательстве для $u, v \in N$ полагаем $u_1(s) = u$ и $v_1(s) = v$ для всех $s \in I_2$. Учитывая (23), (3) и (26), для $u, v \in N$ найдем, что

$$\begin{aligned} d(h(t, s, u), h(t, s, v)) = d(h_1(t, u_1)(s), h_1(t, v_1)(s)) \le d_1(h_1(t, u_1), h_1(t, v_1)) \\ \le L(h_1(t, \cdot))\rho_1(u_1, v_1) = L(h_1(t, \cdot))\rho(u, v), \end{aligned}$$

откуда $h(x, \cdot) \in \mathrm{Lip}(N; M)$ для всех $x = (t, s) \in I_a^b$.

Для $(t, s) \in I_a^b$ определим отображение $f(t, s) = f(t)(s) : N \to M$ правилом

$$f(t, s)u = [f_1(t)u_1](s), \quad u \in N.$$

Тогда из (27) получаем следующее равенство в M:

$$h_1^-(t, u_1)(s) = [f_1(t)u_1](s) + h_0(t)(s) = f(t, s)u + h_0(t, s). \tag{28}$$

Покажем, что на самом деле отображение $f(t, s)$ аддитивно и липшицево, т. е. $f(t, s) \in \mathrm{L}(N; M)$. Для $u, v \in N$ в силу аддитивности $f_1(t)$ имеем

$$\begin{aligned} f(t, s)(u + v) = [f_1(t)(u + v)_1](s) = [f_1(t)(u_1 + v_1)](s) = [f_1(t)u_1 + f_1(t)v_1](s) \\ = [f_1(t)u_1](s) + [f_1(t)v_1](s) = f(t, s)u + f(t, s)v, \end{aligned}$$

а из (3) и липшицевости $f_1(t)$ вытекает, что

$$\begin{aligned} d(f(t, s)u, f(t, s)v) = d([f_1(t)u_1](s), [f_1(t)v_1](s)) \le d_1(f_1(t)u_1, f_1(t)v_1) \\ \le L(f_1(t))\rho_1(u_1, v_1) = L(f_1(t))\rho(u, v). \end{aligned}$$

Поскольку $f(t)(\cdot) = f_1(t)u_1 \in M_1$, то $f : I_1 \to M_1$. Более того, $f(\cdot)(\cdot)u = f_1(\cdot)u_1$ принадлежит $\mathrm{BV}_1(I_1; M_1)$, причем

$$d_1(f(\tau)(\cdot)u, f(t)(\cdot)u) = d_1(f_1(\tau)u_1, f_1(t)u_1) \to 0 \quad \text{при } \tau \to t - 0,$$

поэтому $\tau \mapsto f(\tau)(\cdot)u$ непрерывно слева, так что $f(\cdot)(\cdot)u \in \mathrm{BV}_1^-(I_1; M_1)$. Остается вычислить левую часть в (28). В силу (23) и (3) имеем

$$\begin{aligned} d(h(\tau, s, u), h_1^-(t, u_1)(s)) = d(h_1(\tau, u_1)(s), h_1^-(t, u_1)(s)) \\ \le d_1(h_1(\tau, u_1), h_1^-(t, u_1)) \to 0 \quad \text{при } \tau \to t - 0, \end{aligned}$$

и остается положить $h^-(t, s, u) = h_1^-(t, u_1)(s) = \lim\limits_{\tau \to t-0} h(\tau, s, u)$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чистяков В. В.* Абстрактные операторы суперпозиции на отображениях ограниченной вариации двух вещественных переменных. I // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 698–717.
2. *Чистяков В. В.* Метрические полугруппы и конусы отображений конечной вариации нескольких переменных и многозначные операторы суперпозиции // Докл. РАН. 2003. Т. 393, № 6. С. 757–761.
3. *Чистяков В. В.* Операторы суперпозиции на BV-отображениях двух переменных // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Казань: Изд-во Казанск. мат. об-ва, 2003. Т. 19. С. 229–230.
4. *Vitali G.* Sulle funzione integrali // Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1904/1905. V. 40. P. 1021–1034; and Opere sull'analisi reale, Cremonese. 1984. P. 205–220.
5. *Clarkson J. A., Adams C. R.* On definitions of bounded variation for functions of two variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1933. V. 35, N 4. P. 824–854.
6. *Hildebrandt T. H.* Introduction to the theory of integration. New York; London: Acad. Press, 1963.
7. *Chistyakov V. V.* Superposition operators in the algebra of functions of two variables with finite total variation // Monatsh. Math. 2002. V. 137, N 2. P. 99–114.
8. *Balcerzak M., Belov S. A., Chistyakov V. V.* On Helly's principle for metric semigroup valued BV-mappings of two real variables // Bull. Austral. Math. Soc. 2002. V. 66, N 2. P. 245–257.
9. *Smajdor A., Smajdor W.* Jensen equation and Nemytskii operator for set-valued functions // Rad. Mat. 1989. V. 5. P. 311–320.

Статья поступила 13 марта 2004 г.

Чистяков Вячеслав Васильевич
Гос. университет «Высшая школа экономики», кафедра математики,
ул. Большая Печерская, 25, Нижний Новгород 603600
czeslaw@mail.ru