Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 517.9

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

Б. В. Гатапов, А. В. Кажихов

Аннотация: Рассмотрена модельная задача динамики вязкой сжимаемой жидкости в двумерном случае. Доказана теорема существования ее глобального решения.

Ключевые слова: сжимаемая вязкая жидкость, приближение мелкой воды, априорные оценки, теорема существования.

Светлой памяти Тадея Ивановича Зеленяка посвящается

1. Введение

В ряде разделов прикладной гидродинамики, например метеорологии и океанологии, широко используется видоизмененная модель Навье — Стокса, так называемое приближение мелкой воды (см. [1, 2]). Оно выводится из общей системы на основе асимптотического анализа в предположении, что размер области движения в одном направлении (вертикальном) много меньше, чем в другом (горизонтальном). Приближение мелкой воды в этом случае заключается в замене уравнения импульса для вертикальной составляющей вектора количества движения уравнением гидростатики. Подробнее о выводе такой модели можно прочитать, например, в [3], а впервые модель была предложена, по-видимому, Н. Е. Кочиным [4].

Вопросы существования решений краевых задач для уравнений Навье — Стокса сжимаемой вязкой жидкости изучались многими авторами, но только в одномерном случае исследованы достаточно полно (см. [5, 2]). В многомерной модели большинство ранее полученных результатов являются локальными, т. е. либо промежуток времени считается достаточно малым, либо данные задачи близки к состоянию покоя (см. [6, 7]).

Системы уравнений мелкой воды изучены с достаточной степенью полноты только для несжимаемой жидкости [8–10], а для модели с учетом сжимаемости глобальных теорем существования установлено не было.

В данной работе доказывается глобальная разрешимость начально-краевой задачи для модельной системы уравнений сжимаемой вязкой жидкости в приближении мелкой воды. Эта система уравнений находит применение при моде-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00131).

лировании процессов в атмосфере:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0,\\
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_2\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\
\frac{\partial p}{\partial y}=-g\rho,\\
p=c^2\rho,\quad c^2=\mathrm{const}>0.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь (t,x,y) — независимые переменные, t — время, (x,y) — горизонтальная и вертикальная пространственные координаты, ρ — плотность среды, $u=(u,v)$ — вектор скорости, u — горизонтальная компонента, v — вертикальная (для нее соответствующее уравнение импульса заменено уравнением гидростатики (1_3)), p — давление, $g=\mathrm{const}>0$ — ускорение свободного падения, (ν_1,ν_2) — коэффициенты турбулентной вязкости в горизонтальном и вертикальном направлениях соответственно.

Пусть движение среды происходит в прямоугольной области $\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<l,\ 0<y<h\}$, а краевые условия на границе Ω выражаются соотношениями

$$
\begin{gathered}
u|_{x=0}=u|_{x=l}=0,\\
v|_{y=0}=v|_{y=h}=0,\\
\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h}=0.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Этот вариант граничных данных наиболее простой, но возможны и другие постановки краевых условий.

Наконец, в начальный момент времени $t=0$ предполагается известным распределение горизонтальной составляющей скорости и плотности:

$$
\begin{gathered}
u|_{t=0}=u_0(x,y),\\
\rho|_{t=0}=\rho_0(x)\exp\left(-gy/c^2\right),
\end{gathered}
\tag{3}
$$

причем $\rho_0(x)$ — строго положительная ограниченная функция: $0<m\le\rho_0(x)\le M<\infty$.

Доказательство теоремы существования решения задачи (1)–(3) опирается на глобальные априорные оценки. Основная идея, позволившая установить априорные оценки, связана, во-первых, с тем, что уравнение гидростатики (1_3) можно проинтегрировать, и, во-вторых, с разложением горизонтальной компоненты скорости на сумму двух слагаемых, одно из которых есть среднее значение (со специальным весом) по вертикальной координате. При этом возникает система уравнений, формально совпадающая с уравнениями одномерного движения вязкого газа [5], и можно воспользоваться некоторыми приемами и методами, разработанными для этой модели (см. [5, 11]).

Для простоты изложения примем $l=1$, $h=1$ и $g=c^2$. Из уравнения гидростатики

$$
\frac{\partial p}{\partial y}=-g\rho
$$

имеем $p=\zeta(x,t)e^{-y}$, и тогда уравнение неразрывности принимает вид

$$
\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\zeta u)+e^{y}\frac{\partial}{\partial y}(\zeta e^{-y}v)=0.
$$

Полагая

$$\bar{u} = \int\limits_0^1 e^{-y} u \, dy$$

и интегрируя уравнение по y, получим

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\zeta \bar{u}) = 0.$$

Аналогично уравнение (1_2) проинтегрируем по y, обозначая при этом разность $u - \bar{u}$ через w. Тогда получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta \int\limits_0^1 e^{-y} u^2 \, dy\right) + c\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\bar{u} + \int\limits_0^1 w \, dy\right),$$

где $c = \int\limits_0^1 e^{-y} \, dy = 1 - e^{-1} > 0$. В левой части этого равенства прибавим и вычтем $\frac{\partial}{\partial x}(\zeta(\bar{u})^2)$, а в правой отбросим последнее слагаемое $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int\limits_0^1 w \, dy\right)$ и рассмотрим как модельную следующую упрощенную систему уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\zeta \bar{u}) = 0, \\ \zeta\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\zeta\left(c + \int\limits_0^1 e^{-y} u^2 \, dy - (\bar{u})^2\right)\right] = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}, \end{gathered} \tag{4}$$

представляющую самостоятельный интерес. В дальнейшем авторы планируют продолжить изучение исходной системы (1) без указанного упрощения. Добавим также, что модель (4) возникает без упрощающего предположения, если в (1) коэффициент горизонтальной турбулентности ν_1 имеет вид $\nu_1 = \nu_1^0 e^{-y}$, $\nu_1^0 = \mathrm{const} > 0$.

Отметим, что в (4) имеет место соотношение

$$\int\limits_0^1 e^{-y} u^2(x, y, t) \, dy - (\bar{u})^2 \equiv \overline{u^2} - (\bar{u})^2 \geq 0.$$

Формально система (4) имеет вид обычной системы Навье — Стокса для сжимаемой жидкости, где ζ играет роль плотности, $\bar{u}$ — скорости, а $p \equiv \zeta(1 + \overline{u^2} - (\bar{u})^2)$ — давления. Принципиальное отличие от названной системы Навье — Стокса в том, что давление зависит не только от плотности ζ, но и от $\overline{u^2}$ и $(\bar{u})^2$.

Итак, в качестве модельной задачи, подобной (1), рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\zeta u) + \frac{\partial}{\partial z}(\zeta w) = 0, \\ \zeta\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Роль плотности играет $\zeta(t, x)$, а u и w — горизонтальная и вертикальная составляющие вектора скорости. Область изменения x и z есть $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Систему (5) рассматриваем в области $Q = \Omega \times (0, T)$.

Граничные условия имеют вид

$$
\begin{gathered}
u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \\
\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=1} = 0, \\
w|_{z=0} = w|_{z=1} = 0.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Согласно (3) для распределения скорости и плотности при $t = 0$ имеем

$$
\begin{gathered}
u|_{t=0} = u_0(x, z), \\
\zeta|_{t=0} = \zeta_0(x) \ (= \rho_0(x)),
\end{gathered} \tag{7}
$$

причем $\zeta_0(x)$ — строго положительная ограниченная функция:

$$0 < m \le \zeta_0(x) \le M < \infty.$$

Определение 1. *Обобщенным решением задачи* (5)–(7) называется совокупность функций (ζ, u, w), $\zeta \ge 0$,

$$\zeta(t) \in L^\infty\bigl(0, T; W_2^1(0,1)\bigr), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(0,1)),$$

$$u(t) \in L^2\bigl(0, T; W_2^2(\Omega)\bigr) \cap W_2^1(0, T; L^2(\Omega)), \quad w(t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

удовлетворяющих системе уравнений (5) в смысле теории распределений и, в частности, интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\zeta u \varphi_t + \zeta u^2 \varphi_x + \zeta w u \varphi_z + \zeta \varphi_x)\, dxdzdt = -\int\limits_0^T \int\limits_\Omega u \Delta\varphi\, dxdzdt + \int\limits_\Omega u_0 \zeta_0 \varphi|_{t=0}\, dxdz, \tag{8}$$

для произвольной функции $\varphi \in L^2\bigl(0, T; C_0^\infty(\Omega)\bigr)$, $\varphi|_{t=T} = 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$. Соотношения (6), (7) выполняются в смысле следов функций из указанных классов.

Теорема 1. *Пусть начальные данные* (ζ_0, u_0) *обладают следующими свойствами:*

$$(\zeta_0, u_0) \in W_2^1(\Omega), \quad u_0|_{x=0} = u_0|_{x=1} = 0.$$

Тогда существует обобщенное решение задачи (5)–(7), *причем* $\zeta(x, t)$ *— строго положительная ограниченная функция.*

2. Априорные оценки

Для системы (5) закон сохранения имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left(\zeta \frac{u^2}{2} + (\zeta \ln \zeta - \zeta + 1)\right) dxdz + \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \bigl(u_x^2 + u_z^2\bigr)\, dxdz = 0. \tag{9}$$

Это, в частности, означает наличие априорных оценок

$$\sup_{0<t<T} \int\limits_0^1 (\zeta \ln \zeta - \zeta + 1)\, dx \le C$$

и

$$\sup_{0<t<T} \int\limits_0^1 \zeta(x,t) \left(\int\limits_0^1 u^2(x,z,t)\, dz \right) dx \le C,$$

а следовательно, и

$$\int\limits_0^1 \zeta(\bar{u})^2\, dx \le C,$$

что означает в лагранжевых переменных (которые вводятся ниже в (11)) следующее:

$$\sup_{0<\tau<T} \int\limits_0^1 (\bar{u}(\eta,\tau))^2\, d\eta \le C. \tag{10}$$

Здесь и далее через C обозначены различные положительные постоянные, зависящие лишь от начальных данных и области Ω. Функция $\bar{u}$ теперь есть интеграл по z без веса.

Аналогично

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left(u_x^2 + u_z^2\right) dz dx dt \le C$$

и

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 \zeta \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right)^2 d\eta d\tau \le C.$$

3. Оценки сверху и снизу для плотности

Следуя [1], можно ввести лагранжевы координаты

$$\eta(x,t) = \int\limits_0^x \zeta(s,t)\, ds, \quad \tau = t, \tag{11}$$

и система (4) принимает вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\zeta \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right), \end{gathered} \tag{12}$$

где $p \equiv \zeta(1+p_0)$, а функция $p_0 = p_0(\eta,\tau) \equiv \overline{u^2} - (\bar{u})^2$ неотрицательна.

На данном этапе задача состоит в том, чтобы оценить $\zeta(x,t)$ сверху и снизу. Для ее решения будем использовать систему уравнений (12) и оценки из предыдущего пункта. Из первого уравнения системы (12) имеем равенство

$$\zeta \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = -\frac{1}{\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \equiv -\frac{\partial \ln \zeta}{\partial \tau},$$

подставим его во второе и проинтегрируем по τ:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial \eta}\ln \zeta,$$

$$\bar{u} - \overline{u_0} + \frac{\partial}{\partial \eta} \int\limits_0^\tau p\, ds = -\frac{\partial \ln \zeta}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \zeta \Big|_{\tau=0}.$$

Не ограничивая общности, можно принять $\zeta|_{\tau=0} \equiv 1$, тогда приходим к равенству

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\ln \zeta + \int\limits_0^\tau p\, ds \right) = \overline{u_0} - \bar{u}, \tag{13}$$

значит, в силу (10)

$$\sup_{0<\tau<T} \left\| \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\ln \zeta + \int\limits_0^\tau p\, ds \right) \right\|_{L^2(0,1)} \leq c.$$

Из (12) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta},$$

интегрируем это выражение по η от 0 до 1:

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\zeta} \right) d\eta = \bar{u}|_{\eta=1} - \bar{u}|_{\eta=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \int\limits_0^1 \frac{1}{\zeta}\, d\eta = 0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\zeta(\eta, \tau)}\, d\eta = \int\limits_0^1 \frac{1}{\zeta_0(\eta)}\, d\eta \equiv 1.$$

Отсюда и из непрерывности функции ζ получаем, что

$$(\forall \tau\, \exists \eta_0 = \eta_0(\tau))\ \zeta(\eta_0(\tau), \tau) = 1.$$

С учетом этого интегрируем (13) по η от $\eta_0(\tau)$ до произвольного η:

$$\ln \zeta + \int\limits_0^\tau p\, ds = \int\limits_0^\tau p(\eta_0(\tau), s)\, ds + \int\limits_{\eta_0}^\eta (\bar{u}_0 - \bar{u})\, d\xi.$$

Пропотенцируем это равенство, тогда

$$\zeta(\eta, \tau) \exp \left\{ \int\limits_0^\tau p(\eta, s)\, ds \right\} = Y(\tau) \cdot B(\eta, \tau), \tag{14}$$

где

$$Y(\tau) = \exp \left\{ \int\limits_0^\tau p(\eta_0(\tau), s)\, ds \right\} \quad B(\eta, \tau) = \exp \left\{ \int\limits_{\eta_0}^\eta (\bar{u}_0 - \bar{u})\, d\xi \right\}.$$

Функция $B(\eta, \tau)$ ограничена сверху и снизу в силу наличия оценки на $\bar{u}$ в $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ (см. (10)). Покажем, что $Y(\tau)$ также ограничена. Заметим, что

$$\int\limits_0^T \max_{0 \leq \eta \leq 1} p_0(\eta, \tau)\, d\tau \leq C. \tag{15}$$

Это действительно так в силу того, что

$$\max_{0\le x\le 1} p_0(x,t) \le \int_0^1 \left|\frac{\partial p_0}{\partial x}\right| dx \le \int_0^1 \left|2\int_0^1 uu_x\,dz - 2\int_0^1 u\,dz\int_0^1 u_z\,dz\right| dx$$

$$\le \mathrm{c}\int_0^1\int_0^1 \left(u_x^2+u_z^2\right) dxdz.$$

Умножим (14) на $(1+p_0(\eta,\tau))$ и проинтегрируем по τ:

$$e^{\int_0^\tau p(\eta,s)ds} = 1 + \int_0^\tau (1+p_0(\eta,s))Y(s)B(\eta,s)\,ds.$$

Следовательно, (14) принимает вид

$$\zeta\left(1+\int_0^\tau (1+p_0)Y(s)B(\eta,s)\,ds\right) = Y(\tau)B(\eta,\tau). \tag{16}$$

Если здесь взять $\eta=\eta_0(\tau)$, где $\zeta(\eta_0(\tau),\tau)=1$, получим неравенства для $Y(\tau)$:

$$0 < Y_0^{-1} \le Y(\tau) \le Y_0 = \mathrm{const} < \infty.$$

В самом деле, из (16) вытекает, что $Y(\tau) \ge B^{-1}(\eta,\tau) \ge C > 0$. Оценка сверху получается из (15) и (16) по лемме Гронуолла.

Далее, очевидно, (14) дает оценки сверху и снизу для функции ζ :

$$0 < \zeta_0^{-1} \le \zeta(\eta,\tau) \le \zeta_0 < \infty.$$

Из (13) и неравенств, полученных для ζ, имеем оценку для производной:

$$\left\|\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \le c. \tag{17}$$

Непосредственно из уравнений системы (12) получаем

$$\|\zeta_\tau(\tau)\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \le c, \quad \int_0^T \|u_t(t)\|^2\,dt \le c,$$

и тогда из уравнения неразрывности системы (5) сразу следует, что

$$\left\|\frac{\partial w}{\partial z}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le c.$$

Полученных оценок достаточно, чтобы доказать существование слабого решения задачи (5)–(7).

4. Доказательство теоремы существования

Чтобы доказать теорему существования решения задачи (5)–(7), будем искать горизонтальную составляющую скорости в виде суммы

$$u(x,z,t) = \bar{u}(x,t) + \tilde{u}(x,z,t), \tag{18}$$

где $\bar{u}$ так же, как и ранее, есть $\bar{u}(x,t) = \int\limits_0^1 u\,dz$ — среднее значение по вертикальной координате. Отклонение $\tilde{u}$ с необходимостью должно удовлетворять условию

$$\int\limits_0^H \tilde{u}(x,z,t)\,dz \equiv 0 \tag{19}$$

для всех значений x и t.

Принимая во внимание (19) и равенство $u^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u}\tilde{u} + (\tilde{u})^2$, заключаем, что

$$\overline{u^2}(x,t) - (\bar{u})^2(x,t) = \int\limits_0^1 (\tilde{u}(x,z,t))^2\,dz.$$

Тогда система уравнений (4) для функции $\bar{u}(x,t)$ переписывается в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\zeta\bar{u}) = 0,\\ \zeta\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\left(c + \int\limits_0^1 (\tilde{u})^2\,dz\right)\right) = \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}.\end{gathered} \tag{20}$$

Подставив представление (18) в (5), имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}(\zeta\tilde{u}) + \zeta\frac{\partial w}{\partial z} = 0,\\ \zeta\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + (\bar{u}+\tilde{u})\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}+\tilde{u}) + w\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\right) + \frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2},\\ \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0.\end{gathered} \tag{21}$$

Второе уравнение можно записать по-другому:

$$\begin{aligned}&\zeta\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\left(\mathrm{c} + \int\limits_0^1 (\tilde{u})^2\,dz\right)\right) - \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}\\ &\quad + \zeta\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \bar{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + w\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\int\limits_0^1 (\tilde{u})^2\,dz\right) = \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2},\end{aligned}$$

тогда (21) принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}(\zeta\tilde{u}) + \zeta\frac{\partial w}{\partial z} = 0,\\ \zeta\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \bar{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + w\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\int\limits_0^1 (\tilde{u})^2\,dz\right) = \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2},\\ \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0.\end{gathered} \tag{22}$$

Если считать функции ζ и $\bar{u}$ известными, то (22) имеет вид гидростатической модели для несжимаемой жидкости (см. [9]). Действительно, если перейти к лагранжевым координатам η: $d\eta = \zeta\, dx$ и заменить $\zeta\tilde{u}$ на v, то первое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Второе уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta\tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\zeta(2\bar{u}\tilde{u} + (\tilde{u})^2)) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\int\limits_0^1 (\tilde{u})^2\, dz\right) + \bar{u}\frac{\partial}{\partial z}(\zeta w) + \frac{\partial}{\partial z}(\zeta w\tilde{u}) = \tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{zz},$$

если заметить, что

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\zeta\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial t}(\zeta\tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\zeta(\bar{u})^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\zeta(2\bar{u}\tilde{u} + (\tilde{u})^2))\\ &+\frac{\partial}{\partial x}\zeta\left(\mathrm{c} + \int\limits_0^1 (\tilde{u})^2\, dz\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\int\limits_0^1 (\tilde{u})^2\, dz\right) + \bar{u}\frac{\partial}{\partial z}(\zeta w) + \frac{\partial}{\partial z}(\zeta w\tilde{u}) - \bar{u}_{xx} = \tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{zz}.\end{aligned}$$

Это эквивалентно равенству

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(2\bar{u}v + \frac{v^2}{\zeta}\right) - \frac{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\int\limits_0^1 \frac{v^2}{\zeta}\, dz\right) + \bar{u}\zeta\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(wv)\\ &\qquad = \frac{1}{\zeta}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2 v + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}v.\end{aligned}$$

Построим отображение $A : \tilde{u}_1 \to \tilde{u}_2$, неподвижная точка которого будет решением (20) и (22).

Пусть K — ограниченное множество в $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$, задаваемое первой априорной оценкой для u, а следовательно, и для $\tilde{u}$:

$$K = \{\tilde{u} \mid \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \le k = \mathrm{const} < \infty\}.$$

Для данного $\tilde{u}_1 \in K$ строим решение $(\zeta, \bar{u})$ системы (20). Эта система формально является моделью движения Навье — Стокса для сжимаемой жидкости, поэтому может быть построено единственное решение так же, как в [5].

Затем подставляем $(\zeta,\, \bar{u})$ и

$$w = -\frac{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\int\limits_0^1 \tilde{u}_1\, dz\right)$$

в (22). Получаем параболическое уравнение для функции $\tilde{u} = \tilde{u}_2$, которую рассматриваем как результат действия отображения $A : \tilde{u}_1 \to \tilde{u}_2$. Решение $\tilde{u}_2$ принадлежит пространству $L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$, а следовательно, и множеству K. Таким образом, все условия теоремы Шаудера о неподвижной точке выполнены, и оператор A имеет хотя бы одну неподвижную точку, что дает существование решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lu Min, Kazhikhov A. V., Seiji Ukai.* Global solutions to the Cauchy problem of the Stokes approximation equations for two-dimensional compressible flow // Sci. Bull. Josai Univ. Sp. Issue. 1998. N 5. P. 155–174.
2. *Lions P. L.* Mathematical topics in fluid mechanics. Compressible models. Oxford: Oxford Univ. Press, 1998. V. 2.
3. *Lewandowski R.* Analyse mathematique et oceanographie. Paris: Massone, 1997.
4. *Кочин Н. Е.* Об упрощении уравнений гидромеханики для случая общей циркуляции атмосферы // Тр. Главной геофизической обсерватории. 1936. Вып. 4. С. 21–45.
5. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
6. *Nash J.* Le problem de Cauchy pour les equations differentielles d'un fluide general // Bull. Soc. Math. France. 1962. V. 90, N 4. P. 487–491.
7. *Matsumura A., Nishida T.* The initial value problem for the equation of motion of viscous and heat-conductive gases // J. Math. Kyoto Univ. 1980. V. 20, N 1. P. 67–104.
8. *Brech D., Gullen-Gonzales F., Masmoudi N., Rodrigues-Bellido M. A.* On the uniqueness for the two-dimensional primitive equation // Differential Integral Equations. 2001. V. 16, N 1. P. 77–94.
9. *Bresch D., Kazhikhov A., Lemoine J.* On the two-dimensional hydrostatic Navier–Stokes equations // SIAM J. Math. Anal. 2004. V. 36, N 3. P. 796–814.
10. *Gullen-Gonzales F., Masmoudi N., Rodrigues-Bellido M. A.* Anisotropic estimates and strong solutions of the primitive equations // Differential Integral Equations. 2001. V. 14, N 11. P. 1381–1400.
11. *Ладыженская О. А. Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 19 апреля 2005 г.

Гатапов Баир Васильевич, Кажихов Александр Васильевич
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
gatapov@ngs.ru, kazhikhov@hydro.nsc.ru