Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 517.956.3

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Н. А. Люлько

Аннотация: Рассматривается корректность постановки в полуполосе краевой задачи для линейной гиперболической системы первого порядка с запаздыванием (сосредоточенным и распределенным) в граничных условиях. В случае отрицательности реальных частей собственных значений соответствующей спектральной задачи доказывается равномерная по времени оценка решения однородной задачи, позволяющая обосновать принцип линеаризации для анализа устойчивости стационарных решений нелинейной задачи.

Ключевые слова: гиперболические системы, запаздывание по времени, устойчивость стационарных решений.

Памяти Тадея Ивановича Зеленяка

Введение

Исследованию качественных свойств решений смешанных задач для гиперболических систем посвящена обширная литература, обзор которой можно найти в [1, 2]. Мы будем исследовать достаточно частные вопросы, ограничиваясь ссылками на наиболее близкие к изучаемым проблемам работы.

Гиперболические системы с запаздыванием в граничных условиях возникают при математическом моделировании противоточных химических реакторов с рециклом [3], когда некоторые вещества возвращаются частично после выхода из реактора опять на вход с запаздыванием по времени, необходимом для транспортировки (по трубам, механически и т. д.). Коэффициенты пропорциональности обычно показывают, какая часть вещества возвращается назад. В [4] доказывается, что адиабатические и изотермические трубчатые реакторы идеального вытеснения с рециклом могут иметь несколько стационарных решений, поэтому возникает вопрос об их устойчивости.

Рассмотрим в полуполосе $\Pi = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ t > 0\}$ краевую задачу для гиперболической системы первого порядка:

$$U_t - L_{\mathscr{A}} U = F(x,t,U), \quad (x,t) \in \Pi, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{m} (A_k U(0,t-\tau_k) + B_k U(1,t-\tau_k)) + \sum_{r=0,1} \sum_{k=1}^{m} \left(\int_0^{\tau_k} \Phi_k^r(\xi) U(r,t-\xi)\, d\xi \right) = 0, \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00162).

© 2005 Люлько Н. А.

$$U(x,t)|_\Gamma = \overline{U}(x,t). \tag{3}$$

Здесь $U(x,t) = [u_1(x,t),\dots,u_n(x,t)]^T$ — n-мерный вектор неизвестных функций, $F(x,t,U)$ — n-мерный вектор-столбец гладких функций и

$$L_{\mathscr{A}} U = -\mathscr{K}(x)U_x + \mathscr{A}(x)U, \quad \mathscr{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n},$$

где $\mathscr{K}(x)$ — диагональная матрица с элементами $k_i(x) = \frac{1}{\Upsilon_i(x)}$ $(1 \le i \le p)$, $k_i(x) = \frac{-1}{\Upsilon_i(x)}$ $(p+1 \le i \le n)$. В дальнейшем положим

$$0 < \Upsilon_1(x) < \dots < \Upsilon_p(x), \quad 0 < \Upsilon_{p+1}(x) < \dots < \Upsilon_n(x), \tag{4}$$

где $\Upsilon_i(x)$ — непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0,1]$ функции, причем $1 \le p < n$, $n \ge 2$.

В краевых условиях (2) моменты запаздывания τ_k — фиксированные вещественные числа: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m$, $m \ge 0$; A_k, B_k — матрицы размером $n \times n$, состоящие соответственно из вещественных чисел α^k_{ij}, β^k_{ij}, $i,j = 1,\dots,n$ $(k = 0,1,\dots,m)$. Относительно матриц A_0, B_0 всюду далее предполагается выполнение условия

$$\det \begin{pmatrix} \alpha^0_{11} & \dots & \alpha^0_{1p} & \beta^0_{1,p+1} & \dots & \beta^0_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^0_{n1} & \dots & \alpha^0_{np} & \beta^0_{n,p+1} & \dots & \beta^0_{nn} \end{pmatrix} \ne 0,$$

поэтому в дальнейшем для простоты будем полагать, что матрицы A_0, B_0 имеют вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} E^{p,p} & A^{p,n-p} \\ O^{n-p,p} & A^{n-p,n-p} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} B^{p,p} & O^{p,n-p} \\ B^{n-p,p} & E^{n-p,n-p} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $E^{k,k}$ — единичная матрица размером $k \times k$, $O^{l,k}$ — нулевая матрица размером $l \times k$; $A^{l,k}$, $B^{l,k}$ — матрицы, состоящие соответственно из элементов α^0_{ij}, β^0_{ij} $(i = 1,\dots,l;\ j = 1,\dots,k)$; l,k — натуральные числа.

Элементами матриц $\Phi^r_k(\xi)$ являются гладкие на соответствующих отрезках $[0,\tau_k]$ функции $f^r_{kij}(\xi)$ $(i,j = 1,\dots,n;\ r = 0,1,\ k = 1,\dots,m)$.

Обсудим начальные данные (3). Для каждого i $(1 \le i \le n)$ обозначим через τ^r_i максимальное из запаздываний τ_k $(0 \le k \le m)$, встречающихся у функции $u_i(r,t)$ в краевых условиях (2), и определим два множества: $\gamma^r_i = \big\{(x,t) : x = r,\ -\tau^r_i \le t \le 0\big\}$, $r = 0,1$. Пусть $\gamma_i = \{(x,t) : 0 \le x \le 1\} \cup \gamma^0_i \cup \gamma^1_i$, тогда начальные данные (3) следует понимать так:

$$U(x,t)|_\Gamma = \overline{U}(x,t) \Longleftrightarrow u_i(x,t)|_{\gamma_i} = \bar{u}_i(x,t), \quad i = 1,\dots,n,$$

где $\overline{U}(x,t) = [\bar{u}_1(x,t),\dots,\bar{u}_n(x,t)]^T$, а функция $\bar{u}_i(x,t)$ для данного i задается на множестве γ_i.

Здесь и далее принадлежность функции $\overline{U}(x,t)$ пространству $C(\Gamma)$ будем понимать в следующем смысле: $\overline{U}(x,0) \in C[0,1]$, $\overline{U}(r,t) \in C(\Gamma^r)$ (т. е. $\bar{u}_i(r,t) \in C\big(\gamma^r_i\big)$, $i = 1,\dots,n$), $r = 0,1$. Под нормой $\|\overline{U}(x,t)\|_{C(\Gamma)}$ понимаем

$$\max_{r=0,1}(\|\overline{U}(x,0)\|_{C[0,1]}, \|\overline{U}(r,t)\|_{C(\Gamma^r)}),$$

где $\|\overline{U}(r,t)\|_{C(\Gamma^r)} = \max\limits_{1\le i\le n} \|\bar{u}_i(r,t)\|_{C(\gamma^r_i)}$; пространство $C^1(\Gamma)$ и норма в нем вводятся аналогично, т. е.

$$\overline{U}(x,t) \in C^1(\Gamma) \Longleftrightarrow \overline{U}(x,0) \in C^1[0,1], \quad \overline{U}(r,t) \in C^1(\Gamma^r),\ r = 0,1,$$

и

$$\|\overline{U}(x,t)\|_{C^1(\Gamma)} = \max_{r=0,1}(\|\overline{U}(x,0)\|_{C^1[0,1]}, \|\overline{U}(r,t)\|_{C^1(\Gamma^r)}).$$

Под нормой вектор-функции в пространстве $C[0,1]$ ($C^1[0,1]$) мы понимаем максимум из норм компонент этого вектора в $C[0,1]$ ($C^1[0,1]$); модулем матрицы будем считать максимум из модулей ее элементов; принадлежность функции $F(x,t)$ пространству $C^{\alpha,\beta}_{x,t}(\overline{\Pi})$ ($\alpha,\ \beta = 0,1$) обозначает ее принадлежность пространству $C^{\alpha,\beta}_{x,t}(\Pi_T)$ для любого $T > 0$, где $\Pi_T = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$; буквами A, K будем обозначать константы, зависящие только от коэффициентов системы (1), (2) (и не зависящие от t, $\overline{U}(x,t)$, $F(x,t)$).

Процессы с распределенными параметрами, в которых запаздывание по времени t входит как в уравнения движения, так и в граничные условия, рассматривались в [5, гл. 6]. В случае смешанной задачи для линейных систем первого порядка в предположении их разрешимости был построен функционал Ляпунова, обеспечивающий асимптотическую устойчивость решений рассматриваемой задачи.

В случае отсутствия запаздывания ($\tau_k = 0$ при $k = 1,\dots,m$) корректность постановки линейной задачи (1)–(3) в классе гладких функций и в классе обобщенных функций рассмотрена в работе [6]. В работе автора [7] изучалась задача (1)–(3) в случае отсутствия запаздывания и распадающихся краевых условий, т. е. когда в матрицах A_0, B_0 (5) вместо $A^{n-p,n-p}$, $B^{p,p}$ стоят нулевые матрицы. В этой работе было исследовано поведение резольвенты соответствующего дифференциального оператора, что позволило получить равномерные по t оценки решений линейной задачи и обосновать принцип линеаризации для нелинейной системы.

В настоящей статье в случае $F(x,t,U) \equiv F(x,t)$ будет приведена теорема существования в полуполосе Π непрерывно дифференцируемого решения $U(x,t)$ задачи (1)–(3) и показано наличие для него при $t \ge 0$ оценки

$$\|U(x,t)\|_{C^1[0,1]} \le Ke^{At}(\|\overline{U}(x,t)\|_{C^1(\Gamma)} + \max_{0\le\tau\le t}\|F(x,\tau)\|_{C^1[0,1]}). \tag{6}$$

В случае $F(x,t,U) \equiv 0$ для решения $U(x,t)$ однородной задачи (1)–(3) будет доказана для $t \ge 0$ оценка

$$\|U(x,t)\|_{C[0,1]} \le Ke^{-(\gamma-\varepsilon)t}\|\overline{U}(x,t)\|_{C(\Gamma)}, \quad \gamma - \varepsilon > 0, \tag{7}$$

при условии, что собственные числа λ спектральной задачи, соответствующей системе (1), (2), лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \le -\gamma$ ($\gamma > 0$).

Наличие оценки (6) позволяет для задачи (1)–(3) с известной нелинейностью $F(x,t,U)$ получить теорему существования в малом по t при любых начальных данных $\overline{U}(x,t)$, удовлетворяющих условиям согласования. С другой стороны, неравенство (7) позволяет доказать теорему об устойчивости по первому приближению для системы

$$U_t + \mathscr{K}(x)U_x = \mathfrak{F}(x,U), \quad \mathfrak{F} = [\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n]^T, \tag{8}$$

решение которой удовлетворяет краевым условиям (2) и начальным данным (3).

Существование решения линейной задачи

Для системы

$$U_t - L_{\mathscr{A}}U = F(x,t), \quad F(x,t) = [f_1(x,t),\dots,f_n(x,t)]^T, \tag{9}$$

рассмотрим в полуполосе Π смешанную задачу с краевыми условиями (2) и начальными данными (3). Вид (2) граничных условий гарантирует сведение задачи (9), (2), (3) к системе интегральных уравнений типа Вольтерра, исследованной в [8]. В своем изложении этого вопроса мы будем следовать работам [7, 8].

В силу (5) граничные условия (2) при $t > 0$ можно записать в виде

$$u_i(0,t) = \Phi_i[U](t)\ (i = 1,\dots,p), \quad u_i(1,t) = \Phi_i[U](t)\ (i = p+1,\dots,n).$$

Здесь Φ_i $(i = 1,\dots,n)$ — оператор, переводящий вектор-функцию $U(x,t)$, заданную на множестве $\overline{\Pi}\cup\Gamma$, в скалярную функцию $\Phi_i[U](t)$, определенную при $t \geq 0$ (под значением $\Phi_i[U](0)$ понимаем $\lim\limits_{t\to 0+}\Phi_i[U](t)$) и имеющую вид

$$\Phi_i[U](t) = -\sum_{j=p+1}^{n}\alpha_{ij}^0 u_j(0,t) - \sum_{j=1}^{p}\beta_{ij}^0 u_j(1,t) - R_i[U](t), \tag{10}$$

где $R_i[U](t)$ есть i-я компонента вектор-столбца

$$\sum_{k=1}^{m}\left(A_kU(0,t-\tau_k) + B_kU(1,t-\tau_k) + \sum_{r=0,1}\int\limits_0^{\tau_k}\Phi_k^r(\xi)U(r,t-\xi)\,d\xi\right).$$

Для сведения рассматриваемой дифференциальной задачи к системе интегральных уравнений введем ряд обозначений. Через каждую точку $(x_0,t_0)\in\overline{\Pi}$ проходит n характеристик $x = \varphi_i(t;x_0,t_0)$ системы (9), определяемых уравнениями

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = k_i(\varphi_i), \quad \varphi_i|_{t=t_0} = x_0 \quad (i = 1,\dots,n).$$

Пусть $\chi_i(x_0,t_0) = \inf\limits_t\{t : (\varphi_i(t;x_0,t_0),t)\in\overline{\Pi}\}$, тогда, очевидно, $0 \leq \chi_i(x_0,t_0)$, и если $\chi_i(x_0,t_0) > 0$, то $\varphi_i(\chi_i(x_0,t_0);x_0,t_0)$ равно либо 0, либо 1 (это равносильно тому, что характеристика $x = \varphi_i(t;x_0,t_0)$ выходит из точки (x_0,t_0) и приходит с уменьшением t на боковую сторону Π).

Введем в рассмотрение для каждого i $(1 \leq i \leq n)$ следующие множества:

$$\Pi_i = \{(x,t)\in\overline{\Pi} : \chi_i(x,t) = 0\},$$

$$\Pi_i^0 = \{(x,t)\in\overline{\Pi} : \chi_i(x,t) > 0,\ \varphi_i(\chi_i(x,t);x,t) = 0\},$$

$$\Pi_i^1 = \{(x,t)\in\overline{\Pi} : \chi_i(x,t) > 0,\ \varphi_i(\chi_i(x,t);x,t) = 1\}.$$

Очевидно, что $\Pi_i^0 = \varnothing$, $i = p+1,\dots,n$, $\Pi_i^1 = \varnothing$, $i = 1,\dots,p$.

Проинтегрируем i-е уравнение системы (9) вдоль соответствующей характеристики и, используя (2), (3), получим следующую систему интегральных уравнений:

$$u_i(x_0,t_0) = \int\limits_{\chi_i(x_0,t_0)}^{t_0}\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)u_j(x,t) + f_i(x,t)\right\}\Bigg|_{\substack{t=\tau\\ x=\varphi_i(\tau;x_0,t_0)}} d\tau + v_i(x_0,t_0), \tag{11}$$

$$(x_0,t_0)\in\Pi, \quad i = 1,\dots,n,$$

$$v_i(x,t) = \begin{cases} \bar{u}_i(\varphi_i(0;x,t)), & (x,t)\in\Pi_i,\ i = 1,\dots,n,\\ \Phi_i[U](\chi_i(x,t)), & (x,t)\in\Pi_i^0,\ 1\leq i\leq p,\\ \Phi_i[U](\chi_i(x,t)), & (x,t)\in\Pi_i^1,\ p+1\leq i\leq n,\end{cases}$$

$$u_i(r,t)|_{\gamma_i^r} = \bar{u}_i(r,t), \quad i = 1,\dots,n \quad (r = 0,1).$$

Очевидно, что непрерывно дифференцируемая функция $U(x,t)$ будет решением задачи (9), (2), (3) тогда и только тогда, когда она будет являться решением данной интегральной системы. При этом необходимо, чтобы начальные данные $\overline{U}(x,t)$ принадлежали пространству $C^1(\Gamma)$ и удовлетворяли условиям согласования нулевого порядка:

$$\overline{U}(x,t) \text{ — непрерывная на множестве } \Gamma \text{ функция;}$$

$$\begin{aligned} A_0\overline{U}(0,0) + B_0\overline{U}(1,0) + \sum_{k=1}^{m}(A_k\overline{U}(0,-\tau_k) + B_k\overline{U}(1,-\tau_k) \\ + \sum_{r=0,1}\int_0^{\tau_k}\Phi_k^r(\xi)\overline{U}(r,-\xi)\,d\xi) = 0, \end{aligned} \tag{S_0}$$

и первого порядка:

$$\begin{aligned} A_0U_1(0) + B_0U_1(1) + \sum_{k=1}^{m}\Bigg(A_k\overline{U}_t(0,-\tau_k) + B_k\overline{U}_t(1,-\tau_k) \\ + \sum_{r=0,1}\int_0^{\tau_k}\Phi_k^r(\xi)\overline{U}_t(r,-\xi)\,d\xi\Bigg) = 0, \end{aligned} \tag{S_1}$$

$$\lim_{t\to 0-}\frac{d\overline{U}}{dt}(r,t) = U_1(r) \quad (r = 0,1),$$

где

$$U_1(x) = -\mathscr{K}(x)\frac{d\overline{U}}{dx}(x,0) + \mathscr{A}(x)\overline{U}(x,0) + F(x,0).$$

Вольтерровость системы (11) гарантируется наличием для операторов Φ_i следующих свойств (см. [8, с. 428, 431]).

1. Пусть $U_k(x,t)$ — непрерывные в $\overline{\Pi}\cup\Gamma$ функции, удовлетворяющие условию (3), тогда $\Phi_i[U_k](t)$ также непрерывны при $t \geq 0$, $k = 1,2$. Обозначим $\Delta U = U_1 - U_2$, $\Delta\Phi_i[U](t) = \Phi_i[U_1](t) - \Phi_i[U_2](t)$ и докажем, что для некоторого $\rho > 0$ и всех $t > 0$ при $1 \leq i \leq n$ имеет место неравенство

$$|\Delta\Phi_i[U](t)| \leq K\left(\max_{j;x;\tau\leq t}{}^{*}|\Delta u_j(x,\tau)| + \int_0^t \max_{j;x;\vartheta\leq\tau}|\Delta u_j(x,\vartheta)|\,d\tau\right), \tag{12}$$

где звездочка при знаке max означает, что берутся только такие значения (x,τ), для которых $\chi_j(x,\tau) \leq t-\rho$ (если $t > \rho$) или $\chi_j(x,\tau) = 0$ (если $t \leq \rho$), а постоянные K, ρ определяются операторами Φ_i и матрицей $\mathscr{K}(x)$.

2. Если $U_k(x,t)$ — гладкие в $\overline{\Pi}\cup\Gamma$ функции, удовлетворяющие условию (3), то функции $\Phi_i[U_k](t)$ $(k = 1,2)$ также гладкие при $t \geq 0$ и для $1 \leq i \leq n$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\Delta\Phi_i[U]'(t)| \leq K\Bigg\{\max_{j,x;\tau\leq t}{}^{*}\left(\left|\Delta\frac{\partial u_j(x,\tau)}{\partial x}\right| + \left|\Delta\frac{\partial u_j(x,\tau)}{\partial\tau}\right|\right) + \max_{j,x;\tau\leq t}|\Delta u_j(x,\tau)| \\ + \int_0^t \max_{j,x;\vartheta\leq\tau}\left(\left|\Delta\frac{\partial u_j(x,\vartheta)}{\partial x}\right| + \left|\Delta\frac{\partial u_j(x,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right|\right)d\tau\Bigg\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Покажем, что для операторов Φ_i (10) справедлива оценка (12). Имеем

$$\Delta\Phi_i[U](t) = -\sum_{j=p+1}^{n} \alpha_{ij}^0 \Delta u_j(0,t) - \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij}^0 \Delta u_j(1,t) - \Delta R_i[U](t). \tag{14}$$

Введем число

$$\rho = \min_{1\le k\le m, i\le n} \left(\tau_k, \left|\int_0^1 \frac{dx}{k_i(x)}\right|\right), \quad \text{если } m \ge 1,$$

$$\rho = \min_{1\le i\le n} \left(\left|\int_0^1 \frac{dx}{k_i(x)}\right|\right), \quad \text{если } m = 0.$$

Если $0 < t < \rho$, то характеристики j-го семейства ($j = p+1, \dots, n$), выходящие из точек $(0,t)$, будут приходить на нижнее основание Π, т. е. $\chi_j(0,t) = 0$; аналогично для характеристик j-го семейства ($j = 1, \dots, p$), выходящих из точек $(1,t)$, также будет $\chi_j(1,t) = 0$. Если же $t > \rho$, то для характеристик j-го семейства ($j = p+1, \dots, n$), выходящих из точек $(0,t)$, справедливо $\chi_j(0,t) \le t - \rho$; аналогично $\chi_j(1,t) \le t - \rho$ при $j = 1, \dots, p$. Поэтому

$$\left|\sum_{j=p+1}^{n} \alpha_{ij}^0 \Delta u_j(0,t) + \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij}^0 \Delta u_j(1,t)\right| \le K \max_{j;x;\tau\le t}{}^{*} |\Delta u_j(x,\tau)|. \tag{15}$$

Рассмотрим выражение $\Delta R_i[U](t)$, являющееся i-й компонентой вектор-столбца

$$\sum_{k=1}^{m}\left(A_k \Delta U(0, t-\tau_k) + B_k \Delta U(1, t-\tau_k) + \sum_{r=0,1} \int_0^{\tau_k} \Phi_k^r(\xi) \Delta U(r, t-\xi)\, d\xi\right).$$

Из (3) для $0 \le t \le \tau_k$ следует, что

$$A_k \Delta U(0, t-\tau_k) \equiv 0, \quad B_k \Delta U(1, t-\tau_k) \equiv 0 \quad (k = 1, \dots, m),$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^{m} (A_k \Delta U(0, t-\tau_k) + B_k \Delta U(1, t-\tau_k)) \equiv 0,$$

если $0 \le t < \rho$. Если же $t \ge \rho$, то для всех k ($1 \le k \le m$) справедливо $t - \tau_k \le t - \rho$, поэтому при $t > 0$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{m} (A_k \Delta U(0, t-\tau_k) + B_k \Delta U(1, t-\tau_k))\right| \le K \max_{j;x;\tau\le t}{}^{*} |\Delta u_j(x,\tau)|. \tag{16}$$

Пусть $t > 0$, тогда для $r = 0, 1$ и каждого k ($k = 1, \dots, m$) имеем

$$\int_0^{\tau_k} \Phi_k^r(\xi) \Delta U(r, t-\xi)\, d\xi = \int_{t-\tau_k}^{t} \Phi_k^r(t-\mu) \Delta U(r, \mu)\, d\mu,$$

откуда

$$\int_0^{\tau_k} \left|\Phi_k^r(\xi) \Delta U(r, t-\xi)\right| d\xi \le K \int_0^{t} \max_{j;x;\vartheta\le\tau} |\Delta u_j(x,\vartheta)|\, d\tau, \tag{17}$$

так как $\Delta U(r,t) \equiv 0$ при $t < 0$ в силу (3). Подставляя (15)–(17) в (14), мы и получаем (12). Оценка (13) доказывается аналогично.

При выполнении условий согласования (S_0), (S_1) свойства 1, 2 операторов Φ_i позволяют для системы (11) методом последовательных приближений доказать существование в Π непрерывно дифференцируемого решения и оценку (6) для него, как это сделано в [8] . Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Пусть* $K(x)$, $A(x) \in C^1[0,1]$, $F(x,t) \in C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Pi})$, $\Phi^r_k(\xi) \in C[0,\tau_k]$ $(k = 1,\dots,m;\ r = 0,1)$, *а функция* $\overline{U}(x,t)$ *принадлежит пространству* $C^1(\Gamma)$ *и удовлетворяет условиям* (S_0), (S_1). *Тогда в полуполосе* Π *существует единственное непрерывно дифференцируемое решение* $U(x,t)$ *задачи* (9), (2), (3); *при* $t > 0$ *оно удовлетворяет оценке* (6).

В дальнейшем нам понадобится использовать решения рассматриваемой задачи в случае отсутствия у начальных данных условий согласования. Для определения таких решений проведем некоторые вспомогательные построения, следуя работе [7, с. 189].

Из точки $(0,0)$ (соответственно $(1,0)$) проведем p $(n-p)$ различных характеристик системы (9) с положительным (отрицательным) наклоном до пересечения с прямой $x = 1$ $(x = 0)$. Через каждую из полученных точек пересечения проведем $n - p$ (p) различных характеристик с отрицательным (положительным) наклоном до пересечения с прямой $x = 0$ $(x = 1)$. Возьмем каждую из полученных точек в качестве исходной и будем повторять описанный выше процесс бесконечное число раз. Проделаем предложенную процедуру еще m раз, взяв в качестве начальных точки $(0,\tau_k)$ (соответственно $(1,\tau_k)$), $k = 1,\dots,m$.

Из построенных выше характеристик выделим семейство кривых, параллельных характеристике $x = \varphi_i(t;0,0)$ $(x = \varphi_i(t;1,0))$, и обозначим это семейство через Q_i, $i = 1,\dots,p$ $(i = p+1,\dots,n)$. Полуполоса Π разбивается характеристиками из всех семейств Q_i, $i = 1,\dots,n$, на бесконечное число односвязных непересекающихся областей R_j, $j = 1,2,\dots$.

Рассмотрим отрезок $p_\tau = \{(x,t) : 0 \le x \le 1,\ t = \tau\}$. Для каждого фиксированного $\tau > 0$ он пересекает лишь конечное число областей R_j, которые мы обозначим через $R_{k_1},\dots,R_{k_{l(\tau)}}$. Пусть $\Omega_j(\tau) = p_\tau \cap R_{k_j}$ $(1 \le j \le l(\tau))$. Обозначим через $R_\tau[0,1]$ множество равномерно непрерывных в интервалах $\Omega_j(\tau)$, $1 \le j \le l(\tau)$, функций $V(x) = [v_1(x),\dots,v_n(x)]^T$ с нормой

$$\|V(x)\|_{R_\tau} = \max_{1\le j\le l(\tau)} \sup_{x\in\Omega_j(\tau)} |V(x)|, \quad |V(x)| = \max_{1\le i\le n} |v_i(x)|,$$

а через $R^1_\tau[0,1]$ — множество функций $V(x)$, которые равномерно непрерывны вместе со своей производной $V_x(x)$ в интервалах $\Omega_j(\tau)$, $1 \le j \le l(\tau)$, причем

$$\|V(x)\|_{R^1_\tau} = \max(\|V(x)\|_{R_\tau}, \|V_x(x)\|_{R_\tau}).$$

Через $R(\Pi)$ будем обозначать множество функций $U(x,t)$ равномерно непрерывных в областях R_j, $j = 1,2,\dots$, а через $R^1(\Pi)$ — множество функций $U(x,t)$ равномерно непрерывных вместе со своими производными $U_x(x,t)$, $U_t(x,t)$ в тех же областях. Очевидно, если функция $U(x,t)$ принадлежит $R^1(\Pi)$, то для любого $t > 0$ она принадлежит множеству $R^1_t[0,1]$ и величина $\|U_t(x,t)\|_{R_t} + \|U(x,t)\|_{R^1_t}$ для нее конечна.

Определение 1. *Кусочно гладким решением* (КГР) *задачи* (9), (2), (3) называется функция $U(x,t) \in R^1(\Pi)$, являющаяся решением системы интегральных уравнений (11).

Теорема 2. *Пусть* $K(x)$, $A(x) \in C^1[0,1]$, $F(x,t) \in C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Pi})$, $\Phi^r_k(\xi) \in C[0,\tau_k]$ $(k = 1,\dots,m;\ r = 0,1)$, *а функция* $\overline{U}(x,t)$ *принадлежит пространству* $C^1(\Gamma)$. *Тогда в полуполосе* Π *существует единственное* КГР $U(x,t)$ *задачи* (9), (2), (3), *причем при* $t > 0$ *оно удовлетворяет неравенствам*

$$\|U(x,t)\|_{R_t} \le Ke^{At}(\|\overline{U}(x,t)\|_{C(\Gamma)} + \|F(x,t)\|_{C([0,1]\times[0,t])}), \tag{18}$$

$$\|U_t(x,t)\|_{R_t} + \|U(x,t)\|_{R_t^1} \le K_1 e^{A_1 t}(\|\overline{U}(x,t)\|_{C^1(\Gamma)} + \max_{0\le\tau\le t}\|F(x,\tau)\|_{C^1[0,1]}). \quad (19)$$

Доказательство теоремы приводиться здесь не будет, так как оно в основном совпадает с доказательством теоремы 1.

Замечание 1. Отметим, что при выполнении условий согласования (S_0), (S_1) КГР $U(x,t)$ исходной задачи будет совпадать с классическим решением. При выполнении условий (S_0) КГР $U(x,t)$ будет непрерывной функцией. Если же условия (S_0) не выполнены, то из системы (11) видно, что каждая из функций $u_i(x,t)$ $(1\le i\le n)$ может терпеть разрывы на характеристиках только из соответствующего множества Q_i.

В силу определения КГР из (11) видно, что в областях R_j $(j=1,2,\dots)$ КГР $U(x,t)$ будет удовлетворять дифференциальной системе (9).

Преобразование Лапласа для однородной задачи

Рассмотрим в полуполосе Π для системы

$$U_t - L_{\mathscr{A}}U = 0 \quad (20)$$

смешанную задачу с краевыми условиями (2) и начальными данными (3). Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда для КГР $U(x,t)$ этой задачи справедлива оценка (19), позволяющая применить к системе (20), (2) преобразование Лапласа по t. В силу свойств функций $u_i(x,t)$ (см. замечание 1) получаем краевую задачу

$$\lambda\widetilde{U} = L_{\mathscr{A}}\widetilde{U} + U_0(x), \quad I_0\widetilde{U}(0,\lambda) + I_1\widetilde{U}(1,\lambda) + R(\lambda) = 0, \quad (21)$$

где

$$\widetilde{U}(x,\lambda) = \int_0^\infty U(x,t)e^{-\lambda t}\,dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > A_1$$

(λ — комплексный параметр, константа A_1 определена в (19)); $U_0(x) = \overline{U}(x,0)$. Здесь

$$\begin{gathered} I_0 = A_0 + \sum_{k=1}^m \bigl(e^{-\lambda\tau_k}A_k + \widetilde{F}_k^0(\lambda)\bigr), \quad I_1 = B_0 + \sum_{k=1}^m \bigl(e^{-\lambda\tau_k}B_k + \widetilde{F}_k^1(\lambda)\bigr), \\ R(\lambda) = \sum_{k=1}^m \bigl(\widetilde{\Phi}_k^0(\lambda) + \widetilde{\Phi}_k^1(\lambda) + e^{-\lambda\tau_k}\bigl(A_k\widetilde{U}_k^0(\lambda) + B_k\widetilde{U}_k^1(\lambda)\bigr)\bigr), \end{gathered} \quad (22)$$

где $\widetilde{U}_k^r(\lambda)$, $\widetilde{F}_k^r(\lambda)$, $\widetilde{\Phi}_k^r(\lambda)$ — целые по λ функции $(r=0,1;\ k=1,\dots,m)$:

$$\begin{gathered} \widetilde{U}_k^r(\lambda) = \int_{-\tau_k}^0 \overline{U}(r,\xi)e^{-\lambda\xi}\,d\xi, \quad \widetilde{F}_k^r(\lambda) = \int_0^{\tau_k} \Phi_k^r(\xi)e^{-\lambda\xi}\,d\xi, \\ \widetilde{\Phi}_k^r(\lambda) = \int_0^{\tau_k} \Phi_k^r(\xi)e^{-\lambda\xi}\left(\int_{-\xi}^0 \overline{U}(r,t)e^{-\lambda t}\,dt\right)d\xi. \end{gathered} \quad (23)$$

Отметим, что если в краевые условия (2) функция $u_i(r,t)$ не входит с запаздыванием τ_k, то соответствующая i-я компонента вектора $\widetilde{U}_k^r(\lambda)$ равна нулю.

Назовем λ *собственным числом задачи* (21), если однородное уравнение $\lambda Y = L_{\mathscr{A}}Y$, $I_0Y(0,\lambda) + I_1Y(1,\lambda) = 0$ имеет нетривиальное решение на отрезке

$[0,1]$. Обозначим через $\Lambda(L_{\mathscr{A}})$ множество собственных чисел задачи (21) и введем в рассмотрение $V(x,\lambda)$ — фундаментальную матрицу решений уравнения $L_{\mathscr{A}}Y=\lambda Y$. Очевидно, $\lambda\in\Lambda(L_{\mathscr{A}})$ тогда и только тогда, когда $\det X(\lambda)=0$, где $X(\lambda)=I_0V(0,\lambda)+I_1V(1,\lambda)$.

Рассмотрим наряду с системой (21) задачу

$$\lambda Y=L_{\mathscr{A}}Y+U_0(x),\quad I_0Y(0,\lambda)+I_1Y(1,\lambda)=0 \tag{24}$$

и обозначим через $G(x,\xi,\lambda)$ функцию Грина этой задачи. Так как I_0, I_1 являются целыми по λ функциями, из результатов работы [9, гл. 1, п. 3] следует, что $G(x,\xi,\lambda)$ — мероморфная по λ функция, полюсами которой могут быть лишь собственные числа задачи (21). Множество $\Lambda(L_{\mathscr{A}})$ состоит из не более чем счетного числа собственных чисел, не имеющих конечной предельной точки. Если $\lambda\notin\Lambda(L_{\mathscr{A}})$, то для любой функции $U_0(x)\in C[0,1]$ существует единственное решение $Y(x,\lambda)\in C^1[0,1]$ задачи (24), которое представимо в виде

$$Y(x,\lambda)=-\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)U_0(\xi)\,d\xi.$$

Лемма 1. *Если $\lambda\notin\Lambda(L_{\mathscr{A}})$, то для любой функции $U_0(x)\in C[0,1]$ существует единственное решение $\widetilde{U}(x,\lambda)\in C^1[0,1]$ задачи* (21), *причем*

$$\widetilde{U}(x,\lambda)=\widetilde{U}_1(x,\lambda)+\widetilde{U}_2(x,\lambda), \tag{25}$$

$$\widetilde{U}_1(x,\lambda)=-V(x,\lambda)X^{-1}(\lambda)R(\lambda), \tag{26}$$

$$\widetilde{U}_2(x,\lambda)=-\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)U_0(\xi)\,d\xi. \tag{27}$$

Доказательство. Будем искать решение задачи (21) в виде суммы двух функций, одна из которых $\widetilde{U}_1(x,\lambda)$ — решение задачи

$$\lambda Y=L_AY,\quad I_0Y(0,\lambda)+I_1Y(1,\lambda)+R(\lambda)=0,$$

а другая $\widetilde{U}_2(x,\lambda)$ — решение задачи (24). Ранее показано, что $\widetilde{U}_2(x,\lambda)$ имеет вид (27). Непосредственной проверкой убеждаемся, что решение $\widetilde{U}_1(x,\lambda)$ определяется формулой (26). Единственность $\widetilde{U}(x,\lambda)$ следует из фундаментальности матрицы $V(x,\lambda)$. $\square$

Заметим, что из оценки (19) для КГР $U(x,t)$ задачи (20), (2), (3) вытекает, что множество $\Lambda(L_{\mathscr{A}})$ находится в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\le A_1$. Поэтому в дальнейшем будем обозначать $\kappa_{\mathscr{A}}=\sup\limits_{\lambda\in\Lambda(L_{\mathscr{A}})}\operatorname{Re}\lambda$.

Для изучения асимптотических при $|\lambda|\to\infty$ свойств функций $\widetilde{U}_i(x,\lambda)$ ($i=1,2$) нам нужны некоторые вспомогательные построения. Следуя [7], для $i,j=1,\dots,n$ введем следующие обозначения:

$$\mathcal{T}_j(x)=\int\limits_0^x\frac{-1}{k_j(\xi)}\,d\xi,\quad b_{ij}(x)=\frac{a_{ij}(x)}{k_i(x)},\quad \mathscr{B}_j(x)=\int\limits_0^x b_{jj}(\xi)\,d\xi.$$

Пусть $\mathscr{A}(x),\mathscr{K}(x)\in C^2[0,1]$, тогда [10] матрицу $V(x,\lambda)$ можно выбрать так, что в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Re}\lambda<0$, $\operatorname{Re}\lambda>0$ при $|\lambda|>N$ (здесь и далее

N будет обозначать достаточно большое положительное число) справедливо представление

$$V(x,\lambda) = P(x,\lambda)\mathcal{T}(x,\lambda), \quad P(x,\lambda) = I + \frac{P_1(x)}{\lambda} + \frac{W(x,\lambda)}{\lambda^2}, \tag{28}$$

где $\mathcal{T}(x,\lambda) = (e^{\lambda \mathcal{T}_j(x)+\mathscr{B}_j(x)}\delta_{ij})$, $I = (\delta_{ij})$, δ_{ij} — символ Кронекера $(i,j = 1,\dots,n)$. Здесь матрица $P_1(x)$ принадлежит $C^2[0,1]$, а матрица $W(x,\lambda)$ непрерывно дифференцируема по $x \in [0,1]$, аналитична по λ в областях $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ при $|\lambda| > N$ и для рассматриваемых значений λ справедливо $|W(x,\lambda)| \le K$, где значение константы K зависит от $\max\limits_{i,j}\bigl(\|b_{ij}(x)\|_{C^2[0,1]}, \|k_i(x)\|_{C^2[0,1]}, \bigl\|\frac{1}{k_i(x)}\bigr\|_{C^2[0,1]}\bigr)$.

Для матрицы $V^{-1}(\xi,\lambda)$ в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ при $|\lambda| > N$ верно представление $V^{-1}(\xi,\lambda) = \mathcal{T}^{-1}(\xi,\lambda)R(\xi,\lambda)$, где $R(\xi,\lambda) = I + \frac{R_1(\xi)}{\lambda} + \frac{W_1(\xi,\lambda)}{\lambda^2}$, и свойства гладкости матриц $R_1(\xi)$, $W_1(\xi,\lambda)$ по переменным ξ, λ аналогичны свойствам гладкости соответствующих матриц $P(x)$, $W(x,\lambda)$ по переменным x, λ.

При построении $G(x,\xi,\lambda)$ используем методику, предложенную в [7] и опирающуюся на результаты работ [10, 11]. Справедливо [7] представление

$$G(x,\xi,\lambda) = G_1(x,\xi,\lambda) + G_2(x,\xi,\lambda), \tag{29}$$

где $G_1(x,\xi,\lambda) = -V(x,\lambda)Q(x,\xi)V^{-1}(\xi,\lambda)\mathscr{K}^{-1}(\xi)$,

$$G_2(x,\xi,\lambda) = -V(x,\lambda)H(\lambda)V^{-1}(\xi,\lambda)\mathscr{K}^{-1}(\xi), \tag{30}$$

$$H(\lambda) = X^{-1}(\lambda)(I_0V(0,\lambda)I^{**} - I_1V(1,\lambda)I^{*}), \quad Q(x,\xi) = \begin{cases} -I^{**} & \text{при } x < \xi, \\ I^{*} & \text{при } x > \xi, \end{cases}$$

здесь I^* — диагональная матрица, у которой первые p диагональных элементов 1, а остальные 0, а матрица I^{**} такова, что $I^* + I^{**} = I$.

Функция $G_1(x,\xi,\lambda)$ не зависит от вида матриц I_0, I_1, а определяется только через коэффициенты выражения $L_{\mathscr{A}}$. В [7] получено асимптотическое представление этой функции, и в дальнейшем мы его будем использовать. Для построения функций $\widetilde{U}_1(x,\lambda)$ и $G_2(x,\xi,\lambda)$ проведем исследование функции $\det X(\lambda)$ и построим обратную матрицу $X^{-1}(\lambda)$.

Наряду с дифференциальным выражением $L_{\mathscr{A}}$ рассмотрим выражение $L_{\mathscr{A}_d}$, в котором диагональная матрица $\mathscr{A}_d(x)$ имеет вид $\mathscr{A}_d(x) = (a_{ij}(x)\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Фундаментальная матрица $V_d(x,\lambda)$ решений уравнения $\lambda Y = L_{\mathscr{A}_d}Y$ имеет вид $V_d(x,\lambda) = \mathcal{T}(x,\lambda)$, поэтому собственные числа λ задачи (21) для $\mathscr{A}(x) \equiv \mathscr{A}_d(x)$ удовлетворяют уравнению $\det X_d(\lambda) = 0$, где $X_d(\lambda) = I_0 + I_1\mathcal{T}(1,\lambda)$. Запишем матрицу $X_d(\lambda)$ в виде суммы $X_0(\lambda)$ и $X_1(\lambda)$, где

$$X_0(\lambda) = A_0 + \sum_{k=1}^{m} e^{-\lambda\tau_k}A_k + \left(B_0 + \sum_{k=1}^{m} e^{-\lambda\tau_k}B_k\right)\mathcal{T}(1,\lambda),$$

$$X_1(\lambda) = \sum_{k=1}^{m}\bigl(\widetilde{F}_k^0(\lambda) + \widetilde{F}_k^1(\lambda)\mathcal{T}(1,\lambda)\bigr),$$

и разложим определитель $X_d(\lambda)$ по первым p строкам, тогда

$$\det X_d(\lambda) = e^{\lambda \sum\limits_{i=p+1}^{n}\mathcal{T}_i + \sum\limits_{i=p+1}^{n}\mathscr{B}_i}(\Delta(\lambda) + r_0(\lambda)).$$

Здесь $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_i(1)$, $\mathscr{B}_i = \mathscr{B}_i(1)$ $(i = 1, \dots, n)$, причем в силу (4) справедливо $\mathcal{T}_p < \mathcal{T}_{p-1} < \dots < \mathcal{T}_1 < 0 < \mathcal{T}_{p+1} < \dots < \mathcal{T}_n$, а

$$\Delta(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{M} E_k e^{-\lambda\beta_k}, \tag{31}$$

где E_k — вещественные числа, определяемые через элементы матриц A_k, B_k $(k = 0, 1 \dots, m)$; числа $0 < \beta_1 < \dots < \beta_M$ определяются через моменты сосредоточенного запаздывания τ_k и числа $\mathcal{T}_i$ $(i = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, m)$. Полином Дирихле $\Delta(\lambda)$ имеет следующий смысл:

$$\det X_0(\lambda) = e^{\lambda \sum\limits_{i=p+1}^{n} \mathcal{T}_i + \sum\limits_{i=p+1}^{n} \mathscr{B}_i} \Delta(\lambda).$$

Обсудим вид функции $r_0(\lambda)$. Будем обозначать далее через $\mathcal{L}(g_1, \dots, g_n)$ линейную комбинацию с постоянными коэффициентами функций $g_1, \dots, g_n$, тогда

$$r_0(\lambda) = \mathcal{L}(e^{-\lambda t}\tilde{f}(\lambda), e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde{f}(\lambda)\tilde{f}(\lambda)}_{2}, \dots, e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde{f}(\lambda)\dots\tilde{f}(\lambda)}_{n}). \tag{32}$$

Здесь и ниже $\tilde{f}(\lambda)$ — целая по λ функция, принадлежащая множеству

$$\widetilde{\mathscr{F}} = \bigl\{\tilde{f}^r_{kij}(\lambda),\ i, j = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, m;\ r = 0, 1\bigr\},$$

где

$$\tilde{f}^r_{kij}(\lambda) = \int\limits_0^{\tau_k} f^r_{kij}(\xi) e^{-\lambda\xi}\, d\xi.$$

Выражение $\underbrace{\tilde{f}(\lambda)\dots\tilde{f}(\lambda)}_{n}$ обозначает произведение n функций $\tilde{f}(\lambda)$, принадлежащих множеству $\widetilde{\mathscr{F}}$ и не обязательно равных между собой. Число t принимает значения из множества, состоящего из конечного числа неотрицательных чисел, максимальное из которых t_*. Заметим, что существование функции $r_0(\lambda)$ связано с наличием матриц $\Phi^r_k(\xi)$ $(r = 0, 1;\ k = 1, \dots, m)$, соответствующих распределенному запаздыванию.

Из (28) имеем

$$\det X(\lambda) = \det\left(X_d(\lambda) + \frac{1}{\lambda}\,(I_0 P_1(0) + I_1 P_1(1)\mathcal{T}(1, \lambda)) + \frac{X_2(\lambda)}{\lambda^2}\right)$$

при $|\lambda| > N$, где $X_2(\lambda) = I_0 W(0, \lambda) + I_1 W(1, \lambda)\mathcal{T}(1, \lambda)$. Разложим определитель матрицы $X(\lambda)$ по первым p строкам, тогда

$$\det X(\lambda) = e^{\lambda \sum\limits_{i=p+1}^{n} \mathcal{T}_i + \sum\limits_{i=p+1}^{n} \mathscr{B}_i} \Theta(\lambda), \tag{33}$$

$$\Theta(\lambda) = \Delta(\lambda) + r_0(\lambda) + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\Theta_k(\lambda)}{\lambda^k}, \quad \Theta_k(\lambda) = \Delta_k(\lambda) + r_k(\lambda). \tag{34}$$

Здесь полином Дирихле $\Delta_1(\lambda)$ имеет вид

$$\Delta_1(\lambda) = \sum_{i=1}^{M_1} E^1_i e^{-\lambda d_i}, \quad 0 \le d_1 < d_2 < \dots < d_{M_1}, \tag{35}$$

где E_i^1 — вещественные числа, а

$$r_1(\lambda) = \mathcal{L}_1(e^{-\lambda t}\tilde f(\lambda), e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde f(\lambda)\tilde f(\lambda)}_{2}, \dots, e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde f(\lambda)\dots\tilde f(\lambda)}_{n}). \tag{36}$$

Функции $\Delta_k(\lambda)$ $(2 \le k \le 2n)$ имеют вид (35) с коэффициентами $E_i^1(\lambda)$, являющимися аналитическими в областях $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$ и ограниченными при $|\lambda| > N$ функциями. Функции $r_k(\lambda)$ $(2 \le k \le 2n)$ суть линейные комбинации вида (36), но с коэффициентами, зависящими от λ так же, как и $E_i^1(\lambda)$. В выражениях Θ_k $(1 \le k \le 2n)$ все встречающиеся показатели экспонент t, d_i принадлежат конечному множеству неотрицательных чисел, максимальное из которых t_{**}.

Пусть всюду далее матрицы $\Phi_k^r(\xi)$ принадлежат пространству $C^1[0,\tau_k]$ $(r = 0,1;\ k = 1,\dots,m)$, тогда для $i,j = 1,\dots,n$ имеет место равенство

$$\tilde f_{kij}^r(\lambda) = \int\limits_0^{\tau_k} f_{kij}^r(\xi)e^{-\lambda\xi}\,d\xi = \frac{f_{kij}^r(0)}{\lambda} - \frac{f_{kij}^r(\tau_k)e^{-\lambda\tau_k}}{\lambda} + \int\limits_0^{\tau_k} \frac{f_{kij}^{r\prime}(\xi)e^{-\lambda\xi}}{\lambda}\,d\xi. \tag{37}$$

Отсюда для любого числа $B > 0$ и для любой функции $\tilde f(\lambda) \in \widetilde{\mathscr{F}}$ следует при $\lambda \ne 0$ справедливость неравенств

$$|\tilde f(\lambda)| \le \frac{K}{|\lambda|}\ (\operatorname{Re}\lambda \ge B), \quad |\tilde f(\lambda)| \le \frac{Ke^{Bt_*}}{|\lambda|}\ (-B \le \operatorname{Re}\lambda), \tag{38}$$

из которых при $|\lambda| > N$ имеем

$$|r_0(\lambda)| \le \frac{Ke^{Bt^*}}{|\lambda|}, \quad |r_1(\lambda)| \le \frac{Ke^{Bt^*}}{|\lambda|}, \quad |r(\lambda)| \le \frac{Ke^{Bt^*}}{|\lambda|} \quad (-B \le \operatorname{Re}\lambda), \tag{39}$$

где

$$r(\lambda) = r_0(\lambda) + \sum_{k=1}^{2n}\frac{\Theta_k(\lambda)}{\lambda^k}, \quad t^* = \max(t_*, t_{**}).$$

Из (33) получаем, что $\lambda \in \Lambda(L_{\mathscr{A}})$ тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению $\Theta(\lambda) = 0$. Возможны два случая.

1. $\Delta(\lambda) \not\equiv 1$. В этом случае полином Дирихле $\Delta(\lambda)$ имеет [12] счетное число нулей, заключенных в полосе, параллельной мнимой оси. Введем число $\kappa_\Delta = \sup\limits_{\Delta(\lambda)=0}\operatorname{Re}\lambda$. Так как $\Delta(\lambda)$ является аналитической почти периодической функцией, из результатов работы [13] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\Delta_\varepsilon > 0$ такое, что $|\Delta(\lambda)| \ge \Delta_\varepsilon$ при $\operatorname{Re}\lambda \ge \kappa_\Delta + \varepsilon$. Эта оценка и неравенство (39) для $r(\lambda)$ позволяют применить к функциям $\Theta(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$ теорему Руше, из которой вытекает, что при $|\lambda| \to \infty$ собственные числа задачи (21) асимптотически приближаются к корням уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Поэтому в рассматриваемом случае справедливо $\kappa_\Delta \le \kappa_{\mathscr{A}}$.

2. $\Delta(\lambda) \equiv 1$. В силу (39) имеем $\Theta(\lambda) = 1 + r(\lambda) \to 1$ при $|\lambda| \to \infty$, где $\operatorname{Re}\lambda \ge A$ (A — любое число). Поэтому в рассматриваемом случае справа от любой прямой, параллельной мнимой оси, может лежать только конечное число собственных чисел задачи (21).

Итак, при $|\lambda| > N$, $\operatorname{Re}\lambda \ge \kappa_{\mathscr{A}} + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ справедливо представление

$$\frac{1}{\det X(\lambda)} = \frac{e^{-\lambda\sum\limits_{i=p+1}^{n}\mathfrak{T}_i - \sum\limits_{i=p+1}^{n}\mathscr{B}_i}}{\Delta(\lambda)}\chi(\lambda),$$

где
$$\chi(\lambda)=1-\frac{r_0(\lambda)}{\Delta(\lambda)}-\frac{\Theta_1(\lambda)}{\lambda\Delta(\lambda)}+\frac{R_\chi(\lambda)}{\lambda^2},\quad |R_\chi(\lambda)|\le K. \tag{40}$$

Здесь константа K зависит от коэффициентов матриц A_k, B_k $(k=0,1,\dots,m)$ и $\max\limits_{i,j,k,r}\bigl(\|a_{ij}(x)\|_{C^2[0,1]},\|k_i(x)\|_{C^2[0,1]},\bigl\|f^r_{kij}(\xi)\bigr\|_{C^1[0,\tau_k]}\bigr)$.

Построим матрицу $X^{-1}(\lambda)$. Обозначим через $\widetilde{X}_{ij}(\lambda)$ алгебраическое дополнение к элементу матрицы $X(\lambda)$, находящемуся в j-й строке и i-м столбце, тогда
$$X^{-1}(\lambda)=\left(\frac{\widetilde{X}_{ij}(\lambda)}{\det X(\lambda)}\right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Разложим $\widetilde{X}_{ij}(\lambda)$ по последним $n-p$ строкам матрицы $X(\lambda)$, тогда при $|\lambda|>N$ имеет место разложение
$$X^{-1}(\lambda)=\left(\frac{e^{\lambda A_{ij}+B_{ij}}}{\Delta(\lambda)}X_{ij}(\lambda)\chi(\lambda)\right)_{i,j=1,\dots,n},$$

где при $1\le i,j\le p$
$$A_{ij}=0,\quad B_{ij}=0;$$

при $1\le i\le p$, $p+1\le j\le n$
$$\begin{cases} A_{ij}=0,\ B_{ij}=0, & \text{если } p+1=n,\\ A_{ij}=-\mathcal{T}_{p+1},\ B_{ij}=-\mathscr{B}_{p+1}, & \text{если } p+1<n;\end{cases}$$

при $p+1\le i\le n$, $1\le j\le p$
$$A_{ij}=\mathcal{T}_p-\mathcal{T}_i,\quad B_{ij}=\mathscr{B}_p-\mathscr{B}_i,$$

при $p+1\le i,j\le n$
$$A_{ij}=-\mathcal{T}_i,\quad B_{ij}=-\mathscr{B}_i,$$
$$X_{ij}(\lambda)=\Delta^0_{ij}(\lambda)+r^0_{ij}(\lambda)+\frac{\Delta^1_{ij}(\lambda)+r^1_{ij}(\lambda)}{\lambda}+\sum_{k=2}^{2(n-1)}\left(\frac{\Delta^k_{ij}(\lambda)+r^k_{ij}(\lambda)}{\lambda^k}\right). \tag{41}$$

Здесь при $k=0,1$ $(i,j=1,\dots,n)$ полиномы Дирихле
$$\Delta^k_{ij}(\lambda)=\varkappa^k_{ij}+\sum_{n=1}^{k_{ij}}\varkappa^{n,k}_{ij}e^{-\lambda\gamma_n};\quad r^k_{ij}(\lambda)=\mathfrak{L}^k_{ij}(e^{-\lambda t}\tilde f(\lambda),\dots,e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde f(\lambda)\dots\tilde f(\lambda)}_{n-1}) \tag{42}$$

суть линейные комбинации соответствующих элементов. Функции $\Delta^k_{ij}(\lambda)$ $(k=2,\dots,2(n-1))$ имеют вид полиномов Дирихле в (42), но с коэффициентами, ограниченными при $|\lambda|>N$; $r^k_{ij}(\lambda)$ $(k=2,\dots,2(n-1))$ также имеют вид функций $r^l_{ij}(\lambda)$ $(l=0,1)$ в (42), но в соответствующих линейных комбинациях коэффициенты суть ограниченные при $|\lambda|>N$ функции. Показатели экспонент γ_n, t во всех функциях $X_{ij}(\lambda)$ принадлежат конечному множеству неотрицательных чисел, максимальное из которых t_{***}. Из оценки (38) на любой прямой $\operatorname{Re}\lambda=-B$ $(B>0)$ при $|\lambda|>N$ для всех $k=0,1,\dots,2(n-1)$ $(i,j=1,\dots,n)$ имеем
$$\bigl|r^k_{ij}(\lambda)\bigr|\le\frac{Ke^{\gamma t_{***}}}{|\lambda|}. \tag{43}$$

При $|\lambda| > N$ справедливо также следующее представление:

$$\mathcal{T}(x,\lambda)X^{-1}(\lambda) = \frac{\mathcal{T}^x(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\chi(\lambda), \quad \mathcal{T}^x(x,\lambda) = (e^{\lambda\mu_{ij}(x)+\nu_{ij}(x)}X_{ij}(\lambda))_{i,j=1,\dots,n}, \tag{44}$$

где $\mu_{ij}(x) = A_{ij} + \mathcal{T}_i(x)$, $\nu_{ij}(x) = B_{ij} + \mathscr{B}_i(x)$. Отсюда видно, что $\mu_{ij}(x)$, $\nu_{ij}(x)$ принадлежат пространству $C^3[0,1]$ $(i,j = 1,\dots,n)$ и обладают свойствами

$$\frac{d\mu_{ij}(x)}{dx} = -\frac{1}{k_i(x)} \neq 0, \quad -\mu_1 \leq \mu_{ij}(x) \leq 0 \quad (\mu_1 > 0). \tag{45}$$

Получение оценки для решения однородной задачи

Теорема 3. *Пусть* $\mathscr{A}(x)$, $\mathscr{K}(x) \in C^2[0,1]$, $\Phi_k^r(\xi) \in C^1[0,\tau_k]$ $(r = 0,1;\ k = 1,\dots,m)$. *Если функция* $\overline{U}(x,t)$ *принадлежит пространству* $C^1(\Gamma)$ *и* $\kappa_{\mathscr{A}} < -\gamma$ $(\gamma > 0)$, *то для* КГР $U(x,t)$ *задачи* (20), (2), (3) *справедлива оценка*

$$\|U(x,t)\|_{R_t} \leq Ke^{-\gamma t}\|\overline{U}(x,t)\|_{C(\Gamma)}, \tag{46}$$

где константа K *зависит от коэффициентов матриц* A_k, B_k $(k = 0,1,\dots,m)$, γ, $\max\limits_{i,j,k,r}\big(\|a_{ij}(x)\|_{C^2[0,1]}, \|k_i(x)\|_{C^2[0,1]}, \big\|f_{kij}^r(\xi)\big\|_{C^1[0,\tau_k]}\big)$ *и не зависит от* t, $\overline{U}(x,t)$.

Доказательство. При выполнении условий этой теоремы рассматриваемая задача имеет КГР $U(x,t)$, для которого верна оценка (19), что позволяет применить к $U(x,t)$ теорему об обращении преобразования Лапласа [14]. Тогда в областях непрерывности КГР, т. е. в областях R_j $(j = 1,2,\dots)$, решение представимо в виде

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\widetilde{U}(x,\lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda, \quad \rho > A_1, \tag{47}$$

где интеграл на бесконечности понимается в смысле главного значения, а константа A_1 определяется в (19). Функция $\widetilde{U}(x,\lambda)$, являющаяся преобразованием Лапласа по t от функции $U(x,t)$, есть решение краевой задачи (21), поэтому она представима в виде (25). Используя это представление и предыдущие наши построения, докажем оценку (46).

Рассмотрим функцию $\widetilde{U}_1(x,\lambda)$ (26). В силу гладкости $\overline{U}(x,t)$ и $\Phi_k^r(\xi)$ для целой функции $R(\lambda)$ (22) при $|\lambda| \to \infty$ справедливо $R(\lambda) = O(\frac{1}{\lambda})$ в любой полосе $B_1 \leq \operatorname{Re}\lambda \leq B_2$ $(B_1 < B_2)$. Поэтому ввиду (28), (44) этим же свойством обладает $\widetilde{U}_1(x,\lambda)$, если $B_1 > \kappa_{\mathscr{A}}$. Тогда при $t > 0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\widetilde{U}_1(x,\lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\widetilde{U}_1(x,\lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda.$$

Обозначим через $U_1(x,t)$ функцию справа в этом равенстве. Очевидно, что она есть КГР задачи (20), (2) (3) в случае начальных данных $\overline{U}_1(x,t)$:

$$\overline{U}_1(x,0) = 0, \quad \overline{U}_1(r,t)|_{\Gamma^r} = \overline{U}(r,t)|_{\Gamma^r}\ (r = 0,1),$$

и для нее при $t > 0$ верно неравенство (18), т. е.

$$\|U_1(x,t)\|_{R_t} \leq Ke^{At}\|\overline{U}_1(x,t)\|_{C(\Gamma)}. \tag{48}$$

Докажем при $t > T_0$ оценку

$$\|U_1(x,t)\|_{R_t} \le K e^{-\gamma t} \max_{r=0,1} \|\overline{U}(r,t)\|_{C(\Gamma^r)}. \tag{49}$$

Используя (28), (40), (44), запишем (26) при $|\lambda| > N$ в виде суммы:

$$\widetilde{U}_1(x,\lambda) = -\left(I + \frac{P_1(x)}{\lambda} + \frac{W(x,\lambda)}{\lambda^2}\right)\frac{\mathcal{T}^x(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\chi(\lambda)R(\lambda) = \sum_{i=1}^{3}\bigl(-\widetilde{U}_1^i(x,\lambda)R(\lambda)\bigr),$$

где

$$\widetilde{U}_1^1(x,\lambda) = \mathcal{T}^x(x,\lambda)\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r_0}{\Delta^2} - \frac{\Theta_1}{\lambda\Delta^2}\right), \quad \widetilde{U}_1^2(x,\lambda) = \frac{P_1(x)\mathcal{T}^x(x,\lambda)}{\lambda}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r_0}{\Delta^2}\right),$$

$$\widetilde{U}_1^3(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}\left(W(x,\lambda)\mathcal{T}^x(x,\lambda)\chi(\lambda) - P_1(x)\mathcal{T}^x(x,\lambda)\left(\frac{\Theta_1}{\Delta^2} - \frac{R_\chi}{\lambda\Delta}\right) + \frac{\mathcal{T}^x(x,\lambda)R_\chi}{\Delta}\right),$$

и докажем существование чисел $T_k \ge 0$ $(k = 1,2,3)$ таких, что при $t > T_k$ будут справедливы неравенства

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\widetilde{U}_1^k(x,\lambda)R(\lambda)\,d\lambda\right| \le K e^{-\gamma t} \max_{r=0,1} \|\overline{U}(r,t)\|_{C(\Gamma^r)}. \tag{50}$$

В дальнейшем мы будем ссылаться на следующую лемму, доказательство которой вытекает из леммы 4 и доказательства теоремы 4 в [7].

Лемма 2. *Пусть $\Delta(\lambda)$— полином Дирихле вида (31), для нулей которого верна оценка $\kappa_\Delta < -\gamma$ $(\gamma > 0)$. Если $y(\xi)$ — непрерывно дифференцируемая, а $z(x,\xi)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функции своих аргументов, причем $-\varrho \le z(x,\xi)$ $(\varrho \ge 0)$, $z_\xi(x,\xi) \ne 0$ для всех $x,\xi \in [a,b]$, то при $t > \varrho$ верна оценка*

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^k}\int\limits_a^b \frac{y(\xi)e^{\lambda z(x,\xi)}}{\Delta^q(\lambda)}\,d\xi\,d\lambda\right| \le K e^{-\gamma t}\|y(x)\|_{C[a,b]}$$

с константой K, не зависящей от t, $y(x)$. Здесь $q = 0,1,2$, $k = 0,1$.

Рассмотрим функцию $\widetilde{U}_1^1(x,\lambda)$. Из (44) следует, что для получения оценки (50) нужно оценить следующее выражение:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x))+\nu_{sl}(x)}X_{sl}(\lambda)\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r_0}{\Delta^2} - \frac{\Theta_1}{\lambda\Delta^2}\right)R_p(\lambda)\,d\lambda, \tag{51}$$

где $R_p(\lambda)$ есть p-я компонента вектор-столбца $R(\lambda)$ (22), а s, l, p — любые числа от 1 до n. Функции $X_{sl}(\lambda)$ определены в выражении (41), $\Delta(\lambda)$, $r_0(\lambda)$, $\Theta_1(\lambda)$ — в выражениях (31), (32), (34). Из (41) в силу (43) на прямой $\operatorname{Re}\lambda = -\gamma$ при $|\lambda| > N$ имеем для $i,j = 1,\ldots,n$ представление

$$X_{ij}(\lambda) = X_{ij}^0(\lambda) + \frac{X_{ij}^{ac}(\lambda)}{\lambda^2}, \quad X_{ij}^0(\lambda) = \Delta_{ij}^0(\lambda) + r_{ij}^0(\lambda) + \frac{\Delta_{ij}^1(\lambda)}{\lambda}, \quad \bigl|X_{ij}^{ac}(\lambda)\bigr| \le K,$$

откуда в силу (39), (43) справедливо

$$X_{ij}(\lambda)\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r_0}{\Delta^2} - \frac{\Theta_1}{\lambda\Delta^2}\right) = x_{ij}^0(\lambda) + \frac{x_{ij}^{ac}(\lambda)}{\lambda^2},$$

где
$$x_{ij}^0(\lambda)=\frac{\Delta_{ij}^0}{\Delta}-\frac{\Delta_{ij}^0\Delta_1}{\lambda\Delta^2}+\frac{\Delta_{ij}^1}{\lambda\Delta}-\frac{\Delta_{ij}^0 r_0}{\Delta^2}+\frac{r_{ij}^0}{\Delta},\quad \left|x_{ij}^{ac}(\lambda)\right|\le K. \tag{52}$$
Так как при $t>0$ интеграл
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x))+\nu_{sl}(x)}x_{sl}^{ac}(\lambda)\frac{R_p(\lambda)}{\lambda^2}\,d\lambda$$
в силу (22) оценивается величиной в правой части (50) для всех s, l, p, то для получения нужной оценки интеграла (51) достаточно оценить
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x))+\nu_{sl}(x)}x_{sl}^{0}(\lambda)\frac{R_p(\lambda)}{\lambda}\,d\lambda.$$
Для этого в силу (22) достаточно оценить при $r=0,1$; $s,l=1,\dots,n$; $\nu=1,\dots,m$ функции
$$v_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x))}x_{sl}^{0}(\lambda)\left(\int\limits_{-\tau_\nu}^{0}\bar{u}_p(r,\xi)e^{-\lambda\xi}\,d\xi\right)d\lambda,$$
$$v_2(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x))}x_{sl}^{0}(\lambda)\widetilde{\Phi}_{kp}^r(\lambda)\,d\lambda,$$
где $\widetilde{\Phi}_{kp}^r(\lambda)$ есть p-й элемент столбца (23) $(p=1,\dots,n)$.

Оценим функцию $v_1(t)$. Из (52) следует, что для этого нужно оценить интегралы
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x))}\widetilde{\Delta}(\lambda)}{\lambda^{k_0}\Delta^q}\int\limits_{-\tau_\nu}^{0}\bar{u}_p(r,\xi)e^{-\lambda\xi}\,d\xi\,d\lambda, \tag{53}$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x))}\tilde{r}(\lambda)}{\Delta^q}\int\limits_{-\tau_\nu}^{0}\bar{u}_p(r,\xi)e^{-\lambda\xi}\,d\xi\,d\lambda. \tag{54}$$
Здесь $k_0=0,1$, $q=0,1,2$, $\widetilde{\Delta}(\lambda)$ — один из полиномов Дирихле Δ_{ij}^0, $\Delta_{ij}^0\Delta_1$, Δ_{ij}^1, а $\tilde{r}(\lambda)$ имеет вид одной из функций $\Delta_{ij}^0 r_0$, r_{ij}^0 $(i,j=1,\dots,n)$. Не ограничивая общности, будем считать, что
$$\widetilde{\Delta}(\lambda)=\sum_{k=0}^{\widetilde{M}}D_k e^{-\lambda d_k}\quad (0=d_1<\dots<d_{\widetilde{M}}=t_{**}+t_{***}).$$

Запишем (53) как
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x))}\widetilde{\Delta}(\lambda)}{\lambda^{k_0}\Delta^q}\left(\int\limits_{0}^{\tau_\nu}\bar{u}_p(r,\xi-\tau_\nu)e^{-\lambda(\xi-\tau_\nu)}\,d\xi\right)d\lambda$$
и применим к этому интегралу лемму 2. В силу неравенства (45) при $t>t_1=\mu_1+d_{\widetilde{M}}$ интеграл (53) оценивается величиной в правой части неравенства (50).

Оценим интеграл (54). Из вида (32), (42) функций $r_0(\lambda)$, $r_{ij}^0(\lambda)$ следует, что в (54) в качестве $\tilde r(\lambda)$ нужно взять функцию

$$\tilde r(\lambda) = \mathfrak{L}(e^{-\lambda t}\tilde f(\lambda), \dots, e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde f(\lambda)\dots\tilde f(\lambda)}_{k}),$$

где k равно n или $n-1$ $(n \ge 2)$, а $t \in \{T\}$, где $\{T\}$ — конечное множество неотрицательных чисел. Из (38) на прямой $\operatorname{Re}\lambda = -\gamma$ имеем соотношение $\underbrace{\tilde f(\lambda)\dots\tilde f(\lambda)}_{k} = O(\frac{1}{\lambda^2})$ $(\lambda \to \infty)$ при $k \ge 2$, поэтому для оценивания (54) достаточно получить оценку в случае, когда $\tilde r(\lambda) = \tilde f(\lambda)$, $\tilde f(\lambda) \in \widetilde{\mathscr{F}}$. Заменим $\tilde f(\lambda)$ ее выражением (37) и запишем (54) в виде суммы

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x))}\big(f_{kij}^r(0) - f_{kij}^r(\tau_k)e^{-\lambda\tau_k}\big)}{\lambda\Delta^q}\int\limits_{-\tau_\nu}^{0}\bar u_p(r,\xi)e^{-\lambda\xi}\,d\xi\,d\lambda$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x))}}{\lambda\Delta^q}\left(\int\limits_{0}^{\tau_k}\frac{d}{dy}f_{kij}^r(y)e^{-\lambda y}\,dy\right)\left(\int\limits_{-\tau_\nu}^{0}\bar u_p(r,\xi)e^{-\lambda\xi}\,d\xi\right)d\lambda,$$

где $k,\nu = 1,\dots,m$; $s,l = 1,\dots,n$; $q = 0,1,2$; $r = 0,1$. Первое слагаемое в силу леммы 2 при $t > \mu_1 + \tau_m$ оценивается величиной в правой части (50). Из гладкости $\bar u_p(r,\xi)$ по ξ следует, что

$$\int\limits_{-\tau_\nu}^{0}\bar u_p(r,\xi)e^{-\lambda\xi}\,d\xi = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \to \infty,$$

поэтому ко второму слагаемому применим теорему Фубини, запишем его в виде

$$\int\limits_{0}^{-\tau_\nu}\frac{d}{dy}f_{kij}^r(y)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x)-y)}}{\lambda\Delta^q}\int\limits_{-\tau_\nu}^{0}\bar u_p(r,\xi)e^{-\lambda\xi}\,d\xi\,d\lambda\right)dy$$

и к повторному по ξ, λ интегралу применим лемму 2. Итак, при $t > \mu_1 + \tau_m$ имеет место оценка и для второго слагаемого. Пусть $t_2 = \max\limits_{t\in\{T\}} t + \mu_1 + \tau_m$, тогда из вида функции $\tilde r(\lambda)$ в (54) и приведенных выше рассуждений следует, что при $t > t_2$ интеграл (54) оценивается величиной в правой части (50). Таким образом, при $t > \max(t_1, t_2)$ для функции $v_1(t)$ имеет место нужная оценка.

Оценим функцию $v_2(t)$. Как и в случае с $v_1(t)$, для этого нужно оценить два интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x))}\widetilde\Delta(\lambda)}{\lambda^{k_0}\Delta^q}\widetilde\Phi_{kp}^r(\lambda)\,d\lambda, \quad k_0 = 0,1;\ q = 0,1,2, \tag{55}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x))}\tilde r(\lambda)}{\Delta^q}\widetilde\Phi_{kp}^r(\lambda)\,d\lambda, \quad q = 0,1,2, \tag{56}$$

где функции $\tilde{r}(\lambda)$, $\widetilde{\Delta}(\lambda)$ те же, что и в выражениях (53), (54). В качестве $\widetilde{\Phi}^r_{kp}(\lambda)$ возьмем функцию

$$\varphi(\lambda)=\int\limits_0^{\tau_k} f^r_{kpj}(\xi)e^{-\lambda\xi}\left(\int\limits_{-\xi}^{0}\bar{u}_j(r,t)e^{-\lambda t}\,dt\right)d\xi,$$

где j — любое число от 1 до n. (В действительности $\widetilde{\Phi}^r_{kp}(\lambda)$ есть сумма n таких функций.) В силу гладкости $\Phi^r_k(\xi)$ запишем $\varphi(\lambda)$ в виде

$$\varphi(\lambda)=\frac{-f^r_{kpj}(\tau_k)e^{-\lambda\tau_k}}{\lambda}\int\limits_{-\tau_k}^{0}\bar{u}_j(r,t)e^{-\lambda t}\,dt+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\tau_k} f^r_{kpj}(\xi)\bar{u}_j(r,-\xi)\,d\xi$$
$$+\int\limits_0^{\tau_k}\frac{e^{-\lambda\xi}}{\lambda}\frac{d}{d\xi}f^r_{kpj}(\xi)\left(\int\limits_{-\xi}^{0}\bar{u}_j(r,t)e^{-\lambda t}\,dt\right)d\xi, \qquad (57)$$

затем подставим в (55) и результат представим в виде суммы трех функций:

$$i_1(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x))}\widetilde{\Delta}(\lambda)}{\lambda^{k_0+1}\Delta^q}\,d\lambda\int\limits_0^{\tau_k} f^r_{kpj}(\xi)\bar{u}_j(r,-\xi)\,d\xi,$$

$$i_2(x,t)=\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x)-\tau_k)}\widetilde{\Delta}(\lambda)}{\lambda^{k_0+1}\Delta^q}f^r_{kpj}(\tau_k)\left(\int\limits_{-\tau_k}^{0}\bar{u}_j(r,t)e^{-\lambda t}\,dt\right)d\lambda,$$

$$i_3(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x))}\widetilde{\Delta}(\lambda)}{\lambda^{k_0+1}\Delta^q}\left(\int\limits_0^{\tau_k} e^{-\lambda\xi}\frac{d}{d\xi}f^r_{kpj}(\xi)\int\limits_{-\xi}^{0}\bar{u}_j(r,t)e^{-\lambda t}\,dt\,d\xi\right)d\lambda.$$

Для $k_0=1$, $q=0,1,2$ функции $i_p(x,t)$ $(p=1,2,3)$ в силу абсолютной сходимости несобственного интеграла оцениваются величиной в правой части (50) при $t>0$. Для оценки этих функций при $k_0=0$ нам понадобятся формула из теории преобразования Лапласа [14]:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\,d\lambda=0 \quad \text{при } t>0, \text{ если } \gamma>0, \qquad (58)$$

а также лемма, справедливость которой следует из леммы 2 и следствия к ней из работы [7].

Лемма 3. *Пусть $\Delta(\lambda)$ — полином Дирихле вида (31), для нулей которого верна оценка $\kappa_\Delta<-\gamma$ $(\gamma>0)$. Тогда при $t>0$ справедлива оценка*

$$|h_q(t)|\le A_q(\gamma)e^{-\gamma t}, \quad \text{где} \quad h_q(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda\Delta^q(\lambda)}\,d\lambda \quad (q=1,2). \qquad (59)$$

Рассмотрим функцию $i_1(x,t)$ при $k_0=0$. Согласно лемме 3 и формуле (58) при $t>\mu_1+d_{\widetilde{M}}$ ее можно записать в следующем виде:

$$i_1(x,t)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{\widetilde{M}}D_ih_q(t+\mu_{sl}(x)-d_i)\int\limits_0^{\tau_k}f^r_{kpj}(\xi)\bar{u}_j(r,-\xi)\,d\xi, & \text{если } q=1,2,\\ 0, & \text{если } q=0.\end{cases}$$

Отсюда и из (59) получаем, что $i_1(x,t)$ при $t > \mu_1 + d_{\widetilde{M}}$ оценивается величиной в правой части (50). В силу леммы 2 для $i_2(x,t)$ при $k_0 = 0$ такая же оценка имеет место при $t > \mu_1 + d_{\widetilde{M}} + \tau_m$. Доказательство проводится аналогично случаю получения оценки для интеграла (53).

Рассмотрим функцию $i_3(x,t)$ и, пользуясь при $|\lambda| \to \infty$ соотношением

$$\int\limits_{-\xi}^{0} \bar{u}_j(r,t)e^{-\lambda t}\,dt = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

применим к $i_3(x,t)$ теорему Фубини, записав ее в виде

$$i_3(x,t) = \int\limits_0^{\tau_k} \frac{d}{d\xi} f^r_{kpj}(\xi)\left(\int\limits_{-\xi}^{0} \bar{u}_j(r,y)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda(t+\mu_{sl}(x)-y-\xi)}\widetilde{\Delta}(\lambda)}{\lambda^{k_0+1}\Delta^q}\,d\lambda\right)dy\right)d\xi.$$

Согласно (58) и лемме 3 для $k_0 = 0$ при $t > \mu_1 + d_{\widetilde{M}} + \tau_m$ имеем

$$i_3(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\widetilde{M}} D_i \int\limits_0^{\tau_k} \frac{d}{d\xi} f^r_{k_pj}(\xi) \int\limits_{-\xi}^{0} \bar{u}_j(r,y)h_q(t+\mu_{sl}(x)-y-\xi-d_i)\,dyd\xi, & q = 1,2, \\ 0, & q = 0. \end{cases}$$

Отсюда в силу (59) получаем, что $i_3(x,t)$, а следовательно, и (55) для рассматриваемых t оценивается величиной в правой части (50).

Оценим интеграл (56), где в качестве $\widetilde{\Phi}^r_{kp}(\lambda)$ возьмем $\varphi(\lambda)$ (57). Рассуждая аналогично случаю с интегралом (54), докажем для (56) нужную оценку, если $\tilde{r}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$. Из (38), (57) на прямой $\operatorname{Re}\lambda = -\gamma$ имеем неравенство

$$\left|\frac{\tilde{f}(\lambda)\varphi(\lambda)}{\Delta^q}\right| \le \frac{K}{|\lambda|^2}\max_{r=0,1}\|\overline{U}(r,t)\|_{C(\Gamma^r)} \quad (q = 0,1,2),$$

откуда и следует, что (56) при $t > 0$ оценивается величиной в правой части (50). Итак, при $t > T_1 = \max(t_1, t_2, \mu_1 + \tau_m + d_{\widetilde{M}})$ для $\widetilde{U}_1^1(x,\lambda)$ справедлива оценка (50).

Рассмотрим функцию $\widetilde{U}_1^2(x,\lambda)$. Из равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\widetilde{U}_1^2(x,\lambda)R(\lambda)\,d\lambda = \frac{P_1(x)}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\frac{\mathcal{T}^x(x,\lambda)}{\lambda}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r_0}{\Delta^2}\right)R(\lambda)\,d\lambda,$$

вида $\widetilde{U}_1^1(x,\lambda)$ и рассуждений, приведенных выше для функции $\widetilde{U}_1^1(x,\lambda)$, следует оценка (50) при $t > T_2$ ($T_2 = T_1$) и для $\widetilde{U}_1^2(x,\lambda)$.

Рассмотрим функцию $\widetilde{U}_1^3(x,\lambda)$, для которой при $|\lambda| > N$ на прямой $\operatorname{Re}\lambda = -\gamma$ верна оценка $\left|\widetilde{U}_1^3(x,\lambda)\right| \le \frac{K}{|\lambda|^2}$, гарантирующая наличие оценки (50) для этой функции при $t > 0$. Итак, при $t > T_1 = T_0$ для функции $U_1(x,t)$ имеет место оценка (49), а при $t > 0$ — оценка (48), что и означает наличие для $U_1(x,t)$ неравенства (49) для $t > 0$.

Рассмотрим функцию

$$U_2(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} \widetilde{U}_2(x,\lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda,$$

где константа ρ определена в (47), а $\widetilde{U}_2(x,\lambda)$ — в (27). Очевидно, что $U_2(x,t)$ есть КГР задачи (20), (2), (3) в случае начальных данных $\overline{U}_2(x,t)$:

$$\overline{U}_2(x,0)=\overline{U}(x,0)=U_0(x),\quad \overline{U}_2(r,t)|_{\Gamma^r}=0\ (r=0,1),$$

поэтому для нее при $t>0$ верно неравенство (18), т. е.

$$\|U_2(x,t)\|_{R_t}\le Ke^{At}\|U_0(x)\|_{C[0,1]}. \tag{60}$$

Докажем для функции $U_2(x,t)$ при $t>0$ справедливость оценки

$$\|U_2(x,t)\|_{R_t}\le Ke^{-\gamma t}\|U_0(x)\|_{C[0,1]}. \tag{61}$$

В (27) $\widetilde{U}_2(x,\lambda)$ однозначно определяется через функцию Грина $G(x,\xi,\lambda)$, которая в (29) представима в виде суммы $G_1(x,\xi,\lambda)$ и $G_2(x,\xi,\lambda)$. Введем в рассмотрение две функции $(k=1,2)$

$$V_k(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}e^{\lambda t}\int\limits_0^1 G_k(x,\xi,\lambda)U_0(\xi)\,d\xi\,d\lambda\quad(\rho>A_1) \tag{62}$$

и докажем для них при $t>\tilde{t}_k$ неравенство

$$\sup_{x\in[0,1]}|V_k(x,t)|\le Ke^{-\gamma t}\|U_0(x)\|_{C[0,1]} \tag{63}$$

с константой K, не зависящей от t, $U_0(x)$. В [7] дано представление $G_1(x,\xi,\lambda)$ и доказана для функции $V_1(x,t)$ оценка (63) при $t>\tilde{t}_1$.

Построим асимптотическое представление $G_2(x,\xi,\lambda)$ и докажем оценку (63) для функции $V_2(x,t)$. Из (30), (44) при $|\lambda|>N$, $\operatorname{Re}\lambda>\kappa_A$ имеем

$$G_2(x,\xi,\lambda)=-\sum_{k=0}^{2}\frac{\mathscr{G}_2^k(x,\xi,\lambda)}{\lambda^k\Delta(\lambda)}\chi(\lambda),$$

где

$$\mathscr{G}_2^0(x,\xi,\lambda)=\mathfrak{T}^x(x,\lambda)(I_0I^{**}-I_1\mathfrak{T}(1,\lambda)I^*)\mathfrak{T}^{-1}(\xi,\lambda)K^{-1}(\xi),$$

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_2^1(x,\xi,\lambda)=P_1(x)\mathscr{G}_2^0(x,\xi,\lambda)+\mathfrak{T}^x(x,\lambda)(I_0P_1(0)I^{**}-I_1P_1(1)\mathfrak{T}(1,\lambda)I^*)\\ \times\mathfrak{T}^{-1}(\xi,\lambda)K^{-1}(\xi)+\mathscr{G}_2^0(x,\xi,\lambda)K(\xi)R_1(\xi)K^{-1}(\xi),\end{aligned}$$

$$\mathscr{G}_2^2(x,\xi,\lambda)=W(x,\lambda)H(\lambda)V^{-1}(\xi,\lambda)K^{-1}(\xi).$$

Из вида (40) функции $\chi(\lambda)$ справедливо представление

$$G_2(x,\xi,\lambda)=\sum_{k=0}^{2}\frac{G_2^k(x,\xi,\lambda)}{\lambda^k}, \tag{64}$$

$$G_2^0=\mathscr{G}_2^0\left(\frac{r_0}{\Delta^2}-\frac{1}{\Delta}\right),\quad G_2^1=\frac{\mathscr{G}_2^0\Theta_1}{\Delta^2}-\mathscr{G}_2^1\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{r_0}{\Delta^2}\right),$$

$$G_2^2=-\frac{\mathscr{G}_2^0}{\Delta^2}R_\chi+\frac{\mathscr{G}_2^1}{\Delta^2}\left(\frac{R_\chi}{\lambda}-\Theta_1\right)-\mathscr{G}_2^2\chi(\lambda).$$

Выпишем более подробно вид матриц $\mathscr{G}_2^k(x,\xi,\lambda)$ $(k = 0,1,2)$, для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}^1(\lambda)=\sum_{k=1}^{p}X_{ik}\beta_{kj},\quad \sigma_{ij}^2(\lambda)=\sum_{k=p+1}^{n}X_{ik}\beta_{kj}\ (1\le i\le n,\ 1\le j\le p),\\ \sigma_{ij}^1(\lambda)=\sum_{k=1}^{p}X_{ik}\alpha_{kj},\quad \sigma_{ij}^2(\lambda)=\sum_{k=p+1}^{n}X_{ik}\alpha_{kj}\ (1\le i\le n,\ p+1\le j\le n).\end{gathered}\tag{65}$$

Здесь $\alpha_{ij}(\lambda)$, $\beta_{ij}(\lambda)$ — элементы соответственно матриц I_0, I_1, а функции $X_{ij}(\lambda)$ определены в (41). Тогда справедливо представление

$$\mathscr{G}_2^0=\left(g_{2ij}^0(x,\xi,\lambda)\right)_{i,j=1,\dots,n},\quad g_{2ij}^0(x,\xi,\lambda)=\sum_{r=1}^{2}\frac{e^{\lambda\varphi_{ij}^{0,r}(x,\xi)+\psi_{ij}^{0,r}(x,\xi)}\sigma_{ij}^r(\lambda)}{k_j(\xi)},\tag{66}$$

где функции $\varphi_{ij}^{0,r}(x,\xi)$, $\psi_{ij}^{0,r}(x,\xi)$ трижды непрерывно дифференцируемы по x, ξ, причем

$$\frac{\partial\varphi_{ij}^{0,r}(x,\xi)}{\partial\xi}=\frac{1}{k_j(\xi)}\ne 0,\quad -\mu_2\le\varphi_{ij}^{0,r}(x,\xi)\le 0\ (\mu_2>0).\tag{67}$$

Из вида матрицы $\mathscr{G}_2^1$ ясно, что для ее представления достаточно построить матрицу

$$\mathscr{G}_2^{1,1}(x,\xi,\lambda)=\mathcal{T}^x(x,\lambda)(I_0P_1(0)I^{**}-I_1P_1(1)\mathcal{T}(1,\lambda)I^*)\mathcal{T}^{-1}(\xi,\lambda)K^{-1}(\xi),$$

вид которой лишь незначительно отличается от вида $\mathscr{G}_2^0$. Действительно, обозначим $I_0P_1(0)=\left(\alpha_{ij}^p\right)$, $I_1P_1(1)=\left(\beta_{ij}^p\right)$ $(i,j=1,\dots,n)$ и вместо α_{ij}, β_{ij} подставим в (65) соответственно α_{ij}^p, β_{ij}^p . Полученные в (65) функции обозначим через $\sigma_{ij}^{p,r}$ $(r=1,2)$, тогда вид матрицы $\mathscr{G}_2^{1,1}$ будет следующий:

$$\mathscr{G}_2^{1,1}=\left(g_{2ij}^{1,1}(x,\xi,\lambda)\right)_{i,j=1,\dots,n},\quad g_{2ij}^{1,1}(x,\xi,\lambda)=\sum_{r=1}^{2}\frac{e^{\lambda\varphi_{ij}^{0,r}(x,\xi)+\psi_{ij}^{0,r}(x,\xi)}\sigma_{ij}^{p,r}(\lambda)}{k_j(\xi)},\tag{68}$$

где функции $\varphi_{ij}^{0,r}(x,\xi)$, $\psi_{ij}^{0,r}(x,\xi)$ такие же, как и в (66). Из вида матрицы $\mathscr{G}_2^2$ вытекает, что она — непрерывно дифференцируемая по $x,\xi\in[0,1]$ функция, аналитическая по λ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>\kappa_{\mathscr{A}}+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, где для нее верна оценка $\left|\mathscr{G}_2^2(x,\xi,\lambda)\right|\le K$. Отсюда, из вида (40) функции $\chi(\lambda)$ и (66), (68) следует, что в представлении (64) для функции G_2^2 при $|\lambda|>N$ также верна оценка

$$\left|G_2^2(x,\xi,\lambda)\right|\le K.\tag{69}$$

Итак, исследуем функцию $V_2(x,t)$ (68). В силу гладкости $U_0(x)$ и свойства (67) функции $\mathscr{G}_2^0$ при $|\lambda|\to\infty$ справедливо равенство

$$\int_0^1\mathscr{G}_2^0(x,\xi,\lambda)U_0(\xi)\,d\xi=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

в любой полосе $B_1\le\operatorname{Re}\lambda\le B_2$ $(B_2>B_1>\kappa_{\mathscr{A}})$. Тогда в силу (64)

$$\int_0^1 G_2(x,\xi,\lambda)U_0(\xi)\,d\xi=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при этих же значениях λ. Поэтому при $t>0$ имеем

$$V_2(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}e^{\lambda t}\int\limits_0^1 G_2(x,\xi,\lambda)U_0(\xi)\,d\xi d\lambda.$$

Из (69) при $t>0$ выводим оценку

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}e^{\lambda t}\int\limits_0^1\frac{G_2^2(x,\xi,\lambda)}{\lambda^2}U_0(\xi)\,d\xi\,d\lambda\right|\le Ke^{-\gamma t}\|U_0(x)\|_{C[0,1]},$$

поэтому для доказательства (63) достаточно при $t>\tilde t_2$ доказать неравенства

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}e^{\lambda t}\int\limits_0^1\frac{G_2^k(x,\xi,\lambda)}{\lambda^k}U_0(\xi)\,d\xi\,d\lambda\right|\le Ke^{-\gamma t}\|U_0(x)\|_{C[0,1]},\tag{70}$$

где $k=0,1$. Из (64), (66), (68) следует, что для этого достаточно оценить три вида функций

$$j_1(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}e^{\lambda t}\left(\int\limits_0^1\frac{e^{\lambda\varphi_{ij}^{0,r}(x,\xi)+\psi_{ij}^{0,r}(x,\xi)}X_{ik}(\lambda)C_{kj}(\lambda)u_{0_j}(\xi)}{\lambda^{k_0}\Delta k_j(\xi)}\,d\xi\right)d\lambda,\tag{71}$$

$$j_2(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}e^{\lambda t}\left(\int\limits_0^1\frac{e^{\lambda\varphi_{ij}^{0,r}(x,\xi)+\psi_{ij}^{0,r}(x,\xi)}X_{ik}(\lambda)C_{kj}(\lambda)r_0(\lambda)u_{0_j}(\xi)}{\lambda^{k_0}\Delta^2 k_j(\xi)}\,d\xi\right)d\lambda,\tag{72}$$

$$j_3(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}e^{\lambda t}\left(\int\limits_0^1\frac{e^{\lambda\varphi_{ij}^{0,r}(x,\xi)+\psi_{ij}^{0,r}(x,\xi)}X_{ik}(\lambda)C_{kj}(\lambda)\Theta_1(\lambda)u_{0_j}(\xi)}{\lambda\Delta^2 k_j(\xi)}\,d\xi\right)d\lambda\tag{73}$$

(здесь i, j, k — произвольные числа от 1 до n; $r=1,2$, $k_0=0,1$) и получить для них при $t>\tilde t_2$ неравенства

$$\sup_{x\in[0,1]}|j_k(x,t)|\le Ke^{-\gamma t}\|u_{0_j}(x)\|_{C[0,1]}\quad(k=1,2,3).\tag{74}$$

В (71)–(73) функции $C_{kj}(\lambda)$ суть либо $\alpha_{kj}(\lambda)$, либо $\beta_{kj}(\lambda)$, $X_{ij}(\lambda)$ имеют вид (41), полином Дирихле Δ, функции $r_0(\lambda)$, $\Theta_1(\lambda)$ определены соответственно в (31), (32), (34). Из неравенств (43) получаем, что для оценивания интегралов (71)–(73) достаточно оценить эти интегралы в случае, когда функция $X_{ik}(\lambda)C_{kj}(\lambda)$ имеет вид одного из следующих выражений:

$$e^{-\lambda\tau_k}\frac{\Delta_{ij}^{n_0}}{\lambda^{n_0}},\quad e^{-\lambda\tau_k}\frac{r_{ij}^{n_0}}{\lambda^{n_0}},\quad \tilde f(\lambda)\frac{\Delta_{ij}^{n_0}}{\lambda^{n_0}},\quad \tilde f(\lambda)\frac{r_{ij}^{n_0}}{\lambda^{n_0}},$$

где $n_0=0,1$, а $\tilde f(\lambda)\in\widetilde{\mathscr F}$. Из (38), (43) на прямой $\operatorname{Re}\lambda=-\gamma$ имеем

$$\left|\tilde f(\lambda)\frac{r_{ij}^{n_0}}{\lambda^{n_0}}\right|\le\frac{K}{|\lambda|^2}\ (n_0=0,1),\quad \left|\tilde f(\lambda)\frac{\Delta_{ij}^{1}}{\lambda}\right|\le\frac{K}{|\lambda|^2},\quad \left|e^{-\lambda\tau_k}\frac{r_{ij}^{1}}{\lambda}\right|\le\frac{K}{|\lambda|^2},$$

поэтому для оценивания (71)–(73) в правых частях этих выражений достаточно в качестве $X_{ik}(\lambda)C_{kj}(\lambda)$ рассмотреть функции вида

$$x_{ijk,1} = e^{-\lambda\tau_k}\Delta^0_{ij},\ x_{ijk,2} = e^{-\lambda\tau_k}\frac{\Delta^1_{ij}}{\lambda},\ x_{ijk,3} = e^{-\lambda\tau_k}r^0_{ij},\ x_{ijk,4} = e^{-\lambda\tau_k}\tilde{f}(\lambda)\Delta^0_{ij}.$$

Оценим функцию $j_1(x,t)$. В случае нахождения в подынтегральном выражении (71) функций $x_{ijk,1}$, $x_{ijk,2}$ будет

$$j_1(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\left(\int\limits_0^1 \frac{e^{\lambda(\varphi^{0,r}_{ij}(x,\xi)-\tau_k)+\psi^{0,r}_{ij}(x,\xi)}\Delta^{n_0}_{ij}u_{0_j}(\xi)}{\lambda^{k_0+n_0}\Delta k_j(\xi)}\,d\xi\right)d\lambda,$$

где $k_0, n_0 = 0,1$. Применим лемму 2 и в силу неравенств (67) получим при $t > \tau^* = \mu_2+\tau_m+t_{***}$ оценку (74) в рассматриваемом случае. Из вида (42) функций Δ^0_{ij}, r^0_{ij} следует, что в случае использования в правой части (71) функций $x_{ijk,3}$, $x_{ijk,4}$ достаточно оценить интеграл

$$j_1(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\left(\int\limits_0^1 \frac{e^{\lambda(\varphi^{0,r}_{ij}(x,\xi)-\tau_k-\tau)+\psi^{0,r}_{ij}(x,\xi)}\tilde{f}^r_{kij}(\lambda)u_{0_j}(\xi)}{\lambda^{k_0}\Delta k_j(\xi)}\,d\xi\right)d\lambda \quad (75)$$

при $k_0 = 0,1$, где $\tilde{f}^r_{kij}(\lambda)$ имеет вид (37), а $\tau : 0 \le \tau \le t_{***}$.

При $k_0 = 1$ в силу (38) для $j_1(x,t)$ справедлива оценка (74) при $t > 0$. Так как $\tilde{f}(\lambda) = O(\frac{1}{\lambda})$ на прямой $\operatorname{Re}\lambda = -\gamma$, то с учетом гладкости $u_{0_j}(\xi)$ при $k_0 = 0$ в правой части (75) можно поменять порядки интегрирования (см. лемму 4 в [7]) и при $t > \tau^{**} = \mu_2 + 2\tau_m + t_{***}$ получить

$$j_1(x,t) = \int\limits_0^1 \frac{e^{\psi^{0,r}_{ij}(x,\xi)}}{k_j(\xi)}u_{0_j}(\xi)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda(t+\varphi^{0,r}_{ij}(x,\xi)-\tau_k-\tau)}\tilde{f}^r_{kij}(\lambda)}{\Delta}\,d\lambda\right)d\xi.$$

Обозначим внутренний интеграл через $w(x,\xi,t)$ и, используя (37), применим к функции w лемму 2, из которой при $t > \tau^{**}$ имеем оценку $|w(x,\xi,t)| \le Ke^{-\gamma t}$, гарантирующую для $j_1(x,t)$ оценку (74) при $t > \tau^{**}$.

Рассмотрим функцию $j_2(x,t)$ (72). Согласно неравенству (39) для $r_0(\lambda)$ на прямой $\operatorname{Re}\lambda = -\gamma$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{x_{ijk,l}r_0(\lambda)}{\lambda^{k_0}\Delta^2}\right| \le \frac{K}{|\lambda|^2} \quad (l = 2,3,4,\ k_0 = 0,1),$$

обеспечивающее в рассматриваемом случае при $t > 0$ оценку (74). Получим аналогичную оценку в случае функции $x_{ijk,1}$. Имеем

$$j_2(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\left(\int\limits_0^1 \frac{e^{\lambda(\varphi^{0,r}_{ij}(x,\xi)-\tau_k)+\psi^{0,r}_{ij}(x,\xi)}\Delta^0_{ij}r_0(\lambda)u_{0_j}(\xi)}{\lambda^{k_0}\Delta^2 k_j(\xi)}\,d\xi\right)d\lambda,$$

где $k_0 = 0,1$. Из (39) для $j_2(x,t)$ ($k_0 = 1$) следует оценка (74) при $t > 0$. Из (32), (39) ясно, что для оценивания $j_2(x,t)$ ($k_0 = 0$) нужно в качестве $r_0(\lambda)$ взять функцию $e^{-\lambda\tau}\tilde{f}(\lambda)$ ($0 \le \tau \le t_*$), т. е. в силу (42) достаточно оценить функцию

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\left(\int\limits_0^1 \frac{e^{\lambda(\varphi^{0,r}_{ij}(x,\xi)-\tau_k-\tau-\tau^1)+\psi^{0,r}_{ij}(x,\xi)}\tilde{f}^r_{kij}(\lambda)u_{0_j}(\xi)}{\Delta^2 k_j(\xi)}\,d\xi\right)d\lambda,$$

где $0 \le \tau^1 \le t_{***}$. Рассуждая, как в случае функции (75) с $k_0 = 0$, при $t > \tau^{***} = \mu_2 + 2\tau_m + t_* + t_{***}$ получим для $j_2(x,t)$ оценку (74).

Рассмотрим функцию $j_3(x,t)$ (73). Из вида (34)–(36) функции $\Theta_1(\lambda)$ и оценки (39) для $r_1(\lambda)$ на прямой $\operatorname{Re}\lambda = -\gamma$ имеем для $l = 2,3,4$ неравенства

$$\left|\frac{x_{ijk,1}r_1(\lambda)}{\lambda\Delta^2}\right| \le \frac{K}{|\lambda|^2}, \quad \left|\frac{x_{ijk,l}\Theta_1(\lambda)}{\lambda\Delta^2}\right| \le \frac{K}{|\lambda|^2}.$$

Таким образом, чтобы оценить (73), нужно оценить

$$j_3(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\int\limits_0^1 \frac{e^{\lambda(\varphi_{ij}^{0,r}(x,\xi)-\tau_k-\tau)+\psi_{ij}^{0,r}(x,\xi)}\Delta_1 u_{0_j}(\xi)}{\lambda\Delta^2 k_j(\xi)}d\xi\,d\lambda,$$

где $0 \le \tau \le t_{**}$. Используя гладкость $u_{0_j}(\xi)$ и (38), применим лемму 2 и получим для $j_3(x,t)$ оценку (74) при $t > \tau_3 = \mu_2 + \tau_m + t_{**} + t_{***}$.

Итак, при $t > \tilde{t}_2 = \max(\tau^{**}, \tau^{***}, \tau_3)$ из (74) следует оценка (70), а из нее — оценка (63) для $V_2(x,t)$. Поэтому для функции $U_2(x,t)$ при $t > \max(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$ верна оценка (61), а при $t > 0$ — оценка (60), что и означает наличие для этой функции неравенства (69) при всех $t > 0$. Отсюда и из (49) получим для кусочно гладкого решения $U(x,t)$ исходной задачи оценку (46). $\square$

В заключение сформулируем утверждения, которые следуют из теоремы 3 и доказательство которых аналогично соответствующим теоремам в случае смешанной задачи с распадающимися граничными условиями [7].

Теорема 4. *Пусть* $K(x)$, $A(x) \in C^2[0,1]$, $F(x,t) \in C^{1,1}_{x,t}(\overline{\Pi})$, $\Phi_k^r(\xi) \in C^1[0,\tau_k]$ $(k = 1,\dots,m;\ r = 0,1)$, *а функция* $\overline{U}(x,t)$ *принадлежит пространству* $C^1(\Gamma)$ *и удовлетворяет условиям согласования* (S_0). *Тогда если* $\kappa_{\mathscr{A}} < -\gamma$, $\gamma > 0$, *то непрерывное* КГР $U(x,t)$ *задачи* (1)–(3) *с* $F(x,t,U) \equiv F(x,t)$ *при* $t > 0$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|U(x,t)\|_{R_t^1} + \|U_t(x,t)\|_{R_t} \le K(e^{-\gamma t}\|\overline{U}(x,t)\|_{C^1(\Gamma)} + \max_{0\le\tau\le t}(\|F(x,\tau)\|_{C[0,1]}, \|F_\tau(x,\tau)\|_{C[0,1]})).$$

Рассмотрим нелинейную задачу (8), (2), (3), и пусть $U_c(x)$ — ее гладкое стационарное решение. Без ограничения общности можно считать, что $U_c(x) = 0$, $\mathfrak{F}(x,0) \equiv 0$.

Определение 2. Нулевое решение задачи (8), (2), (3) называется *асимптотически устойчивым с показателем* $\gamma > 0$ в пространстве $C^1[0,1]$, если найдется $\delta > 0$ такое, что для любой функции $\overline{U}(x,t) \in C^1(\Gamma)$, удовлетворяющей условиям согласования (S_0), (S_1), где $U_1(x) = -\mathscr{K}(x)\overline{U}_x(x,0) + \mathfrak{F}(x,\overline{U}(x,0))$, а также оценке $\|\overline{U}(x,t)\|_{C^1(\Gamma)} \le \delta$, при всех $t > 0$ существует единственное классическое решение $U(x,t)$ рассматриваемой задачи, причем $\|U(x,t)\|_{C^1[0,1]} \le Ke^{-\gamma t}\|\overline{U}(x,t)\|_{C^1(\Gamma)}$, где K не зависит от t, $\overline{U}(x,t)$.

Обозначим через $s = (s_1,\dots,s_n)$ целочисленный вектор с неотрицательными компонентами s_j и $|s| = s_1 + \dots + s_n$. Предположим, что линеаризованная в окрестности нулевого решения рассматриваемая задача имеет вид (20), (2), (3) с

$$\mathscr{A}(x) = \left(\left.\frac{\partial\mathfrak{F}_i(x,U)}{\partial u_j}\right|_{U=0}\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

и $\kappa_{\mathscr{A}} < -\gamma$. Тогда справедлива

Теорема 5. *Пусть* $K(x) \in C^2[0,1]$, $\Phi_k^r(\xi) \in C^1[0,\tau_k]$ $(k = 1,\dots,m;\ r = 0,1)$ *и для любого* i $(1 \le i \le n)$ *функции* $\frac{\partial^{q+|s|}\mathfrak{F}_i(x,U)}{\partial x^q \partial U^s}$, *где* $|s| = 0,1,2,3$, $q = 0,1,2$, $q+|s| \le 3$, *непрерывны на множестве* $\Omega_r = \{(x,u_1,\dots,u_n) : 0 \le x \le 1, \max\limits_{1\le i\le n} |u_i| \le r\}$, $r > 0$. *Тогда нулевое решение задачи* (8), (2), (3) *асимптотически устойчиво с показателем* γ *в пространстве* $C^1[0,1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мышкис А. Д., Филимонов А. М.* Непрерывные решения гиперболических систем квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2003. С. 337–351.
2. *Акрамов Т. А.* Дифференциальные уравнения и их приложения в моделировании физико-химических процессов. Уфа: Изд-во Башкирск. ун-та, 2000.
3. *Генкин Г. Г., Глузман С. С.* Численное и качественное исследование нестационарных режимов одного класса сложных химико-технологических схем // Математические проблемы химии. Новосибирск: ВЦ СОРАН, 1975. Т. 2. С. 90–98.
4. *Перлмуттер Д.* Устойчивость химических реакторов. Л.: Химия, 1976.
5. *Сиразетдинов Т. К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987.
6. *Kmit I., Hörmann G.* Systems with singular non-local boundary conditions: Reflection of singularities and delta-waves // J. Anal. Appl. 2001. V. 20, N 3. P. 637–659.
7. *Елтышева Н. А.* О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. 1988. Т. 137, № 2. С. 186–209.
8. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Мат. сб. 1960. Т. 50, № 4. С. 423–442.
9. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
10. *Birkhoff G. D., Langer R. E.* The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order // Proc. Amer. Acad. Arts Sci. 1923. V. 58, N 2. P. 51–128.
11. *Брушлинский К. В.* О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23, № 6. С. 893–912.
12. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1959.
13. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1959.
14. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.

Статья поступила 17 апреля 2005 г.

Люлько Наталья Альбертовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090