*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6*

*УДК 512.5*

# НИЛЬПОТЕНТНЫЙ ИДЕАЛ В КОЛЬЦАХ ЛИ С АВТОМОРФИЗМОМ ПРОСТОГО ПОРЯДКА

**Н. Ю. Макаренко**

**Аннотация:** Улучшается заключение в теореме Хухро о том, что кольцо (алгебра) Ли $L$, допускающее(ая) автоморфизм простого порядка $p$ с конечным числом $m$ неподвижных точек (с конечномерной подалгеброй неподвижных точек размерности $m$), обладает подкольцом (подалгеброй) $H$, ступень нильпотентности которого(ой) ограничена функцией от $p$, а индекс аддитивной подгруппы $|L:H|$ (коразмерность $H$) ограничен(а) функцией от $m$ и $p$. Доказывается, что существует *идеал*, а не подкольцо (подалгебра), ступень нильпотентности которого ограничена в терминах $p$, а индекс (коразмерность) ограничен(а) в терминах $m$ и $p$. Доказательство основано на применении метода обобщенных, или градуированных, централизаторов, созданного Е. И. Хухро в [Мат. сб. 1990. Т. 181, № 9. С. 1207–1219]. Важной предпосылкой является совместная теорема автора и Е. И. Хухро о почти разрешимости колец (алгебр) Ли с почти регулярными автоморфизмами произвольного конечного порядка.

**Ключевые слова:** кольца Ли, алгебры Ли, автоморфизмы колец Ли, автоморфизмы алгебр Ли, почти регулярные автоморфизмы, градуированные кольца Ли, градуированные алгебры Ли.

## 1. Введение

В настоящее время достигнут большой прогресс в изучении колец (алгебр) Ли с почти регулярными автоморфизмами. История этого направления началась с классической теоремы Хигмэна — Крекнина — Кострикина [1, 2], которая утверждает, что кольцо (алгебра) Ли, допускающее(ая) регулярный, т. е. без нетривиальных неподвижных точек, автоморфизм простого порядка $p$, нильпотентно(а), причем ступень нильпотентности ограничена функцией $h(p)$, зависящей только от $p$. В дальнейшем эта теорема обобщалась в различных направлениях многими авторами (см., например, библиографию в [3]). Отметим важнейшие результаты. В 1963 г. В. А. Крекнин [4, 5] доказал, что кольцо (алгебра) Ли, допускающее(ая) регулярный автоморфизм конечного порядка $n$, разрешимо(а), причем ступень разрешимости ограничена функцией от $n$. В 1990 г. Е. И. Хухро [6] показал, что кольцо (алгебра) Ли $L$, допускающее(ая) автоморфизм $\varphi$ простого порядка $p$ с конечным подкольцом неподвижных точек порядка $m$ (с конечномерной подалгеброй неподвижных точек размерности $m$), обладает подкольцом (подалгеброй) $H$, ступень нильпотентности которого(й) ограничена функцией от $p$, а индекс аддитивной подгруппы $|L:H|$ (коразмерность $H$) ограничен(а) функцией от $m$ и $p$. Недавно автору настоящей статьи и Е. И. Хухро удалось изучить наиболее общую ситуацию, когда кольцо (алгебра) Ли допускает почти регулярный автоморфизм произвольного конечного порядка (см. [3, 7–9]).

Работа выполнена при поддержке гранта «Университеты России» (№ УР.04.01.202).

**Теорема** [9, теоремы 1 и 2]. (а) *Если кольцо Ли $L$ допускает автоморфизм $\varphi$ конечного порядка $n$ с конечным подкольцом неподвижных точек порядка $|C_L(\varphi)| = m$, то идеал $T$, равный периодической части аддитивной подгруппы $L$, обладает идеалом $U$ таким, что фактор-кольцо $T/U$ имеет конечный порядок, ограниченный функцией от $m$ и $n$, и кольца Ли $L/T$ и $U$ имеют ступень разрешимости, ограниченную функцией от $n$. Если автоморфизм $\varphi$ полупростой, или порядок $|\varphi|$ — степень простого числа, или $nL = L$, или $nl = 0$ влечет $l = 0$ для любого $l \in L$, то, более того, $L$ обладает разрешимым идеалом $Z$ ступени разрешимости, ограниченной функцией от $n$, для которого порядок фактор-кольца $L/Z$ конечен и ограничен функцией от $m$ и $n$.*

(б) *Если алгебра Ли $L$ допускает автоморфизм $\varphi$ конечного порядка $n$ с конечномерной подалгеброй неподвижных точек размерности $\dim C_L(\varphi) = m$, то $L$ обладает разрешимым идеалом $Z$ ступени разрешимости, ограниченной функцией от $n$, коразмерность которого ограничена функцией от $m$ и $n$.*

Эта теорема послужила предпосылкой для результата настоящей статьи. По аналогии с заключением вышеприведенной теоремы улучшается заключение в теореме Хухро [6]. Доказывается наличие нильпотентного *идеала* с оценками на ступень нильпотентности и порядок фактор-кольца (размерность фактор-алгебры) в кольце (алгебре) Ли с почти регулярным автоморфизмом простого порядка.

**Теорема 1.** *Если кольцо* (*алгебра*) *Ли $L$ допускает автоморфизм $\varphi$ простого порядка $p$ с конечным подкольцом неподвижных точек порядка $|C_L(\varphi)| = m$* (*с конечномерной подалгеброй неподвижных точек размерности $\dim C_L(\varphi) = m$*), *то $L$ обладает идеалом $H$ ступени нильпотентности, ограниченной функцией от $p$, таким, что порядок* (*размерность*) *фактор-кольца* (*фактор-алгебры*) *$L/H$ ограничен*(а) *функцией от $m$ и $p$.*

В качестве следствия приведем формулировку теоремы 1 в терминах градуированных колец (алгебр) Ли.

**Следствие.** *Пусть $L = L_0 \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_{p-1}$ — $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$-градуированное кольцо* (*алгебра*) *Ли, так что $[L_s, L_t] \subseteq L_{s+t(\mathrm{mod}\, p)}$. Если компонента $L_0$ конечна порядка $m$* (*конечномерна размерности $m$*), *то $L$ обладает нильпотентным идеалом ступени нильпотентности, ограниченной функцией от $p$, индекс которого в аддитивной группе $L$* (*коразмерность*) *ограничен*(а) *функцией от $m$ и $p$.*

В доказательстве применяется метод обобщенных или градуированных централизаторов, созданный Хухро в [6] и развитый в работах [3, 9–12]. Основная конструкция заимствована из [9], мы приводим ее для полноты изложения в § 2. В § 3 доказывается теорема 1 для основного случая, когда $L$ — кольцо Ли, удовлетворяющее равенству $L = L_0 + L_1 + \dots + L_{p-1}$, где $L_k = \{a \in L \mid \varphi(a) = \omega^k a\}$, $\omega$ — примитивный корень $p$-й степени из единицы (предложение 1). Мы покажем, что в частном случае автоморфизма простого порядка разрешимый идеал $Z$, построенный в [9, § 4], оказывается также нильпотентным $p$-ограниченной ступени. Доказательство нильпотентности идеала $Z$ основано на применении индукции по ступени разрешимости $Z$ (предложение 2). В § 4 мы завершаем доказательство основных результатов.

В заключение этого параграфа приведем следствие теоремы 1 для локально-нильпотентных групп без кручения. Такие группы естественным образом вкладываются в полные (в смысле извлечения корней) локально-нильпотентные группы, категория которых эквивалентна категории локально нильпотентных алгебр Ли над $\mathbb{Q}$ (соответствие Мальцева). Напомним, что группа имеет конечный *ранг* $r$, если любая ее конечно-порожденная подгруппа может быть порождена $r$ элементами (и $r$ — наименьшее число с этим свойством).

**Теорема 2.** *Предположим, что локально-нильпотентная группа без кручения $G$ допускает автоморфизм $\varphi$ простого порядка $p$ такой, что подгруппа неподвижных точек $C_G(\varphi)$ имеет конечный ранг $r$. Тогда группа $G$ обладает нильпотентной нормальной подгруппой $H$ ступени нильпотентности, ограниченной функцией от $p$, такой, что фактор-группа $G/H$ имеет конечный ранг, ограниченный функцией от $r$ и $p$.*

## 2. Предварительные сведения

Напомним некоторые определения и обозначения. Будем для краткости говорить, что некая величина *$p$-ограничена* (или, скажем, *$(m,p)$-ограничена*), если она ограничена сверху некоторой функцией, зависящей только от $p$ (соответственно только от $m$ и $p$). Произведения в кольце Ли мы будем называть «коммутаторами». Под «аддитивным индексом» мы будем иметь в виду индекс аддитивной подгруппы (в другой аддитивной подгруппе). Через $\langle S\rangle$ будем обозначать подкольцо Ли, порожденное подмножеством $S$. Члены ряда коммутантов кольца Ли $L$ определяются по индукции как $L^{(0)}=L$; $L^{(k+1)}=[L^{(k)},L^{(k)}]$. Через $\gamma_i(L)$ обозначаются члены нижнего центрального ряда кольца Ли: $\gamma_1(L)=L$; $\gamma_{i+1}(L)=[\gamma_i(L),L]$. По определению кольцо Ли $L$ разрешимо ступени $n$, если $L^{(n)}=0$; кольцо Ли $L$ нильпотентно ступени $h$, если $\gamma_{h+1}(L)=0$.

Простой коммутатор $[a_1,a_2,\dots,a_s]$ веса (длины) $s$ — это по определению коммутатор $[\dots[[a_1,a_2],a_3],\dots,a_s]$. По тождеству Якоби $[a,[b,c]]=[a,b,c]-[a,c,b]$ любой (сложный, многократный) коммутатор от некоторых элементов в любом кольце Ли может быть выражен в виде линейной комбинации простых коммутаторов того же веса от тех же элементов. Используя еще и антикоммутативность $[a,b]=-[b,a]$, можно добиться, чтобы в этой линейной комбинации все простые коммутаторы начинались с некоторого наперед заданного элемента, входящего в первоначальный коммутатор. В частности, если $L=\langle S\rangle$, то аддитивная группа $L$ порождается простыми коммутаторами от элементов из $S$.

Для алгебр Ли все определения соответственно меняются: вместо аддитивных подгрупп, порожденных какими-то множествами, нужно говорить о подпространствах, натянутых на эти множества, и т. д.

Пусть $\varphi$ — автоморфизм простого порядка $p$ кольца (алгебры) Ли $L$ с конечным (конечномерной) подкольцом (подалгеброй) неподвижных точек $C_L(\varphi)$ порядка $|C_L(\varphi)|=m$ (размерности $\dim C_L(\varphi)=m$). Тогда $\varphi$ индуцирует автоморфизм кольца Ли $L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\omega]$, где $\omega$ — примитивный корень $p$-й степени из единицы. Этот автоморфизм, обозначаемый той же буквой, имеет не более $m^{p-1}$ неподвижных точек (соответственно его подалгебра неподвижных точек имеет ту же размерность $m$ над полем, расширенным с помощью $\omega$). Ясно, что достаточно доказать теорему 1 для кольца (алгебры) Ли $L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\omega]$. Поэтому всюду далее мы предполагаем, что основное кольцо содержит $\omega$.

Определение. Определим *$\varphi$-компоненты* $L_k$ для $k=0,1,\dots,p-1$ как аддитивные подгруппы

$$L_k=\{a\in L\mid \varphi(a)=\omega^k a\}.$$

Известно, что

$$pL \subseteq L_0 + L_1 + \dots + L_{p-1}$$

(см., например, [13, гл. 10]). Это разложение похоже на $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$-градуировку в силу очевидных включений

$$[L_s, L_t] \subseteq L_{s+t(\operatorname{mod} p)},$$

где $s+t$ вычисляется по модулю $p$.

**Соглашение об индексах.** Всюду далее строчная буква с индексом $i$ будет обозначать элемент $\varphi$-компоненты $L_i$, при этом индекс будет только указывать на ту $\varphi$-компоненту, которой принадлежит данный элемент: $x_i \in L_i$. Для облегчения обозначений мы не будем использовать нумерующие индексы для элементов из $L_j$, так что различные элементы могут обозначаться одинаковым символом тогда, когда имеет значение только то, какой $\varphi$-компоненте эти элементы принадлежат. Например, $x_3$ и $x_3$ могут быть различными элементами из $L_3$, так что $[x_3, x_3]$ может быть ненулевым элементом из $L_6$. Эти индексы будут обычно рассматриваться как вычеты по модулю $p$; например, $a_{-i} \in L_{-i} = L_{p-i}$.

Определение. Элементы $\varphi$-компонент $L_i$ будем называть *$\varphi$-однородными*, а коммутаторы от $\varphi$-однородных элементов — *$\varphi$-однородными коммутаторами*.

Заметим, что в рамках соглашения об индексах $\varphi$-однородный коммутатор лежит в $\varphi$-компоненте $L_s$, где $s$ — сумма по модулю $p$ индексов всех элементов, входящих в данный коммутатор.

Определение. Назовем подкольцо Ли $H$ *$\varphi$-однородным*, если $H = H \cap L_0 + H \cap L_1 + \dots + H \cap L_{p-1}$.

Определение. *Шаблоном* коммутатора от $\varphi$-однородных элементов (из $L_i$) назовем его скобочное строение вместе с расстановкой индексов в рамках соглашения об индексах. *Вес* шаблона — это вес коммутатора. Сам коммутатор называется *значением* своего шаблона на данных элементах.

Теперь мы переходим к построению обобщенных централизаторов уровней от 0 до некоторого $p$-ограниченного числа $N(p)$. Обобщенный централизатор $L_j(s)$ уровня $s$ — это определенная аддитивная подгруппа $\varphi$-компоненты $L_j$, $j \neq 0$. Одновременно с построением обобщенных централизаторов фиксируем представителей соответствующего уровня, которые образуются двумя различными способами и в зависимости от этого называются либо *$b$-представителями*, либо *$x$-представителями*. Общее число представителей $(p,m)$-ограничено. Как уже отмечалось во введении, обобщенные централизаторы были впервые применены Е. И. Хухро в [6]. Различные нюансы конструкции встречаются в работах [3, 9–12]. Для наших целей мы используем конструкцию из [9].

Будем предполагать далее, что $L$ — кольцо Ли, допускающее автоморфизм простого порядка $p$ с числом неподвижных точек $m$, основное кольцо которого содержит примитивный корень $p$-й степени из 1.

Определение. Пусть $\vec{x} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ — упорядоченный набор элементов $x_{i_s} \in L_{i_s}$, $i_s \neq 0$, такой, что $i_1 + \dots + i_k \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} p)$. Положим $j = -i_1 - \dots - i_k \,(\operatorname{mod} p)$ и определим отображение

$$\vartheta_{\vec{x}} : y_j \to [y_j, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]. \qquad (1)$$

В силу линейности оно является гомоморфизмом аддитивной группы $L_j$ в $L_0$, так как $j + i_1 + \cdots + i_k \equiv 0 \pmod p$ по выбору $j$. Поскольку $|L_0| \leq m$, имеем $|L_j : \operatorname{Ker} \vartheta_{\vec{x}}| \leq m$.

Построение представителей и обобщенных централизаторов осуществляется индукцией по уровню — параметру, принимающему целые значения от 0 до $N = N(p) = 4p-1+8p(2p-3)$. Выбор этого числа продиктован рассуждениями из [9, § 7]. Мы фиксируем для дальнейшего символ $N$ для наивысшего уровня.

**Определение уровня 0.** На уровне 0 мы только фиксируем представителей уровня 0. Для каждой пары $(\mathbf{P}, c)$, состоящей из шаблона $\mathbf{P}$ веса 2 с индексами $\pm i \neq 0$ и коммутатора $c \in L_0$, являющегося значением этого шаблона на $\varphi$-однородных элементах из $L_{\pm i}$, фиксируем одно такое представление. То же самое делаем с каждой парой $(\mathbf{P}, c)$, состоящей из шаблона $\mathbf{P}$ простого коммутатора веса $p$ с одинаковым индексом $i \neq 0$ (повторенным $p$ раз) и коммутатора $c \in L_0$, являющегося значением этого шаблона на $\varphi$-однородных элементах из $L_i$. Элементы из $L_j, j \neq 0$, входящие в эти фиксированные записи таких коммутаторов $c$, назовем *представителями уровня* 0. Эти представители уровня 0 (и только они) обозначаются через $x_j(0) \in L_j$ в рамках соглашения об индексах (напомним, что один и тот же символ может обозначать различные элементы). Так как общее число рассматриваемых шаблонов $\mathbf{P}$ равно $2(p-1)$, а число элементов в $L_0$ не превосходит $m$, количество представителей 0-го уровня $(m,p)$-ограничено.

Теперь мы опишем шаг индукционного построения. Выберем возрастающую последовательность $p$-ограниченных натуральных чисел $W_1 < W_2 < \cdots < W_N$ в соответствии с неравенствами, приведенными в [9, § 7].

**Определение уровня $t > 1$.** Предположим, что уже зафиксировано $(m,p)$-ограниченное число $x$-представителей и $b$-представителей уровней $< t$, которые являются $\varphi$-однородными элементами вида $x_{i_k}(\varepsilon_k) \in L_{i_k}(\varepsilon_k)$, $i_k \neq 0$, уровней $\varepsilon_k < t$ и $b_{i_k}(\varepsilon_k) \in L_{i_k}$, $i_k \neq 0$, уровней $\varepsilon_k < t$. Определим *обобщенные централизаторы уровня* $t$ (или, короче, *централизаторы уровня* $t$) для каждого $j \neq 0$, полагая

$$L_j(t) = \bigcap_{\vec{z}} \operatorname{Ker} \vartheta_{\vec{z}},$$

где $\vec{z} = (z_{i_1}(\varepsilon_1), \ldots, z_{i_k}(\varepsilon_k))$ пробегает всевозможные упорядоченные наборы всех длин $k \leq W_t$, состоящие из представителей (возможно, разных) уровней $< t$ (т. е. $z_{i_u}(\varepsilon_u)$ обозначает элементы вида $x_{i_u}(\varepsilon_u)$ или $b_{i_u}(\varepsilon_u)$, $\varepsilon_u < t$, в любой комбинации), такие, что

$$j + i_1 + \cdots + i_k \equiv 0 \pmod p.$$

Элементы из $L_j(t)$ также будем называть для краткости *централизаторами уровня* $t$ и зафиксируем для них обозначение $y_j(t)$ (в рамках соглашения об индексах). Число представителей всех уровней $< t$ $(m,p)$-ограничено, и $|L_j : \operatorname{Ker} \vartheta_{\vec{x}}| \leq m$ для всех $\vec{x}$. Поэтому пересечение здесь берется по $(m,p)$-ограниченному числу подгрупп $m$-ограниченного индекса в $L_j$ и, значит, $L_j(t)$ также имеет $(m,p)$-ограниченный индекс в аддитивной группе $L_j$.

Теперь зафиксируем представителей уровня $t$. Во-первых, для каждого $j \neq 0$ мы фиксируем произвольную систему представителей смежных классов по подгруппе $L_j(t)$ в аддитивной группе $L_j$. Эти элементы, и только они, будут обозначаться через $b_j(t) \in L_j$ (в рамках соглашения об индексах) и называться *$b$-представителями уровня $t$*. Общее количество $b$-представителей уровня

$t$ $(m,p)$-ограничено, так как индексы $|L_j : L_j(t)|$ $(m,p)$-ограничены для всех $j = 1, 2, \dots, p-1$.

Во-вторых, для каждой пары $(\mathbf{P}, c)$, состоящей из шаблона $\mathbf{P}$ веса 2 с индексами $\pm i \neq 0$ и коммутатора $c \in L_0$, равного значению шаблона $\mathbf{P}$ на $\varphi$-однородных элементах из $L_{\pm i}(t)$, зафиксируем одно такое представление. Элементы, входящие в эту фиксированную запись коммутатора $c$, назовем *$x$-представителями уровня $t$.* Эти элементы (и только они) будут обозначаться через $x_j(t)$ (в рамках соглашения об индексах). Поскольку число рассматриваемых шаблонов равно $p-1$ и количество элементов из $L_0$ не превосходит $m$, общее число $x$-представителей уровня $t$ $(m,p)$-ограничено.

Вместе элементы вида $b_i(t)$ и $x_j(t)$ будут иногда называться просто *представителями уровня $t$.* Заметим, что $x$-представители уровня $t$ — элементы $x_j(t)$ — являются также централизаторами уровня $t$; это не относится к $b$-представителям — элементам вида $b_i(t)$.

Построение централизаторов и представителей уровней $\leq N$ завершено.

Из построения ясно, что

$$L_j(k+1) \leq L_j(k) \tag{2}$$

для всех $j$ и $k$.

Заметим, что по определению централизатор $y_v(t)$ любого уровня $t$ обладает следующим централизаторным свойством по отношению к представителям меньших уровней:

$$[y_v(t), z_{i_1}(\varepsilon_1), \dots, z_{i_k}(\varepsilon_k)] = 0, \tag{3}$$

как только $v + i_1 + \dots + i_k \equiv 0 \pmod p$, $k \leq W_t$, а элементы $z_{i_j}(\varepsilon_j)$ — представители (т. е. либо $b_{i_j}(\varepsilon_j)$, либо $x_{i_j}(\varepsilon_j)$ в любой комбинации) любых (возможно, различных) уровней $\varepsilon_s < t$.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определений представителей уровня 0 и уровней $t > 0$ и из включений (2); мы будем обычно ссылаться на нее как на процедуру «замораживания».

**Лемма 1** (о замораживании). *Любой коммутатор вида $[a_{-j}, b_j] \in L_0$, где $j \neq 0$, и любой простой $\varphi$-однородный коммутатор длины $p$ с одним и тем же индексом $i \neq 0$, повторенным $p$ раз, может быть представлен* (*заморожен*) *в виде коммутатора того же шаблона от представителей уровня* 0.

*Любой коммутатор $[y_{-j}(k), y_j(l)] \in L_0$ от централизаторов уровней $k, l$ может быть представлен* (*заморожен*) *в виде коммутатора $[x_{-j}(s), x_j(s)]$ того же шаблона от $x$-представителей любого уровня $s$, удовлетворяющего соотношению $0 \leq s \leq \min\{k, l\}$.*

Определение. *Квазицентрализатором веса $w$ уровня $k$* называется любой коммутатор, в который входит ровно один централизатор $y_i(k) \in L_i(k)$ уровня $k$ и $w-1$ представителей меньших уровней — элементов вида либо $b_{i_k}(\varepsilon_k)$, либо $x_{i_j}(\varepsilon_j)$ в любой комбинации и любых уровней $\varepsilon_s < k$. Квазицентрализаторы уровня $k$ (и только они) обозначаются через $\hat{y}_j(k) \in L_j$ в рамках соглашения об индексах; при этом индекс $j$ равен по модулю $p$ сумме индексов всех входящих элементов.

Приведем некоторые свойства централизаторов, квазицентрализаторов и представителей.

**Лемма 2** [9, лемма 3]. *Любой коммутатор вида $[a_{-i}, y_i(k)]$, где $y_i(k)$ — централизатор уровня $k > 1$, равен коммутатору вида $[y_{-i}(k-1), y_i(k)]$, где $y_{-i}(k-1)$ — централизатор уровня $k-1$.*

**Лемма 3** [9, лемма 5]. *Для $j \neq 0$ любой квазицентрализатор $\hat{y}_j(l+1)$ уровня $l+1$ и веса не более $W_{l+1} - W_l + 1$ является централизатором уровня $l$, т. е. $\hat{y}_j(l+1) \in L_j(l)$.*

**Лемма 4** [9, лемма 7]. *Любой коммутатор вида*

$$[a_s, c_0, \dots, c_0, [x_{-k}(l), x_k(l)], c_0, \dots, c_0, [x_{-k}(l), x_k(l)], c_0, \dots, c_0, [x_{-k}(l), x_k(l)]],$$

*в котором число вхождений подкоммутаторов $[x_{-k}(l), x_k(l)]$ с одинаковыми индексами $\pm k$ не меньше $4p-3$, уровень $l$ не меньше $4p-3$, а $c_0$ — (возможно, различные) коммутаторы от представителей уровня 0 вида $[x_{-i}(0), x_i(0)]$ для (возможно, различных) $i \neq 0$ (при этом на любом из участков между $a_s$ и подкоммутаторами $[x_{-k}(l), x_k(l)]$ элементы $c_0$ могут отсутствовать) и общее число $c_0$-вхождений не превосходит $(W_1 - 5p + 4)/2$, равен нулю.*

Здесь, как всегда, в рамках соглашения об индексах подкоммутаторы $[x_{-k}(l), x_k(l)]$ могут быть различными; важны только уровни и индексы, указывающие на принадлежность $\varphi$-компонентам.

Нам потребуется также следующая элементарная теоретико-числовая

**Лемма 5** (см., например, [14, 4.2.5]). *Пусть $i_1, \dots, i_k$ — ненулевые не обязательно различные элементы простого поля $\mathbb{F}_p$ из $p$ элементов, где $p$ — простое число. Образуем множество*

$$M = \Big\{ \sum_{s \in S} i_s \mid S \subseteq \{1, \dots, k\} \Big\},$$

*включая $\sum\limits_{s \in \varnothing} i_s = 0$. Тогда либо $M = \mathbb{F}_p$, либо $|M| \geq k+1$.*

## 3. Случай $\varphi$-однородных колец Ли

В доказательстве теоремы 1 основным является случай, когда автоморфизм $\varphi$ имеет конечное число $m$ неподвижных точек и $L$ — $\varphi$-однородное кольцо Ли, т. е. $L = L_0 + L_1 + \dots + L_{p-1}$. Пока не оговорено противное, мы будем доказывать теорему 1 в этом случае.

**Предложение 1.** *Теорема 1 справедлива для $\varphi$-однородных колец Ли $L = L_0 + L_1 + \dots + L_{p-1}$, допускающих автоморфизмы простого порядка $p$ с конечным числом $m$ неподвижных точек.*

Доказательство. Напомним, что $N$ — фиксированное обозначение для наивысшего уровня, который является $p$-ограниченным числом. В § 2 мы построили обобщенные централизаторы $L_j(N)$, $j = 1, \dots, p-1$. Полагаем

$$Z = {}_{\mathrm{id}}\langle L_1(N), L_2(N), \dots, L_{p-1}(N) \rangle.$$

Этот идеал, порожденный аддитивными подгруппами $L_j(N)$, $j \neq 0$, имеет $(m,p)$-ограниченный индекс в аддитивной группе $L$, так как $L$ $\varphi$-однородно, и каждая подгруппа $L_j(N)$ имеет $(m,p)$-ограниченный индекс в $L_j$ при $j \neq 0$, в то время как $|L_0| \leq m$ по условию.

Для каждого $k = 0, 1, \dots, p-1$ определим

$$Z_k = \sum_{j+i_1+\dots+i_s \equiv k \,(\mathrm{mod}\, p)} [L_j(N), L_{i_1}, \dots, L_{i_s}]$$

($Z_k = Z \cap L_k$, если $L$ является прямой суммой $L_j$). Заметим, что

$$Z = \sum_{k=0}^{p-1} Z_k,$$

так как $L$ $\varphi$-однородное; в частности, $Z$ порождается аддитивными подгруппами $Z_k$.

Следующая лемма позволяет представить элементы из $Z_k$ в виде линейных комбинаций коммутаторов от централизаторов уровня $N-1$ и элементов из $L_0$.

**Лемма 6.** *Любой элемент $z_k \in Z_k$ представи́м в виде линейной комбинации коммутаторов вида*

$$[y_{l_0}(N-1),\, c_0, \dots, c_0,\, y_{l_1}(N-1),\, y_{l_2}(N-1), \dots, y_{l_t}(N-1)], \tag{4}$$

*где $l_0 + l_1 + \dots + l_t \equiv k \,(\mathrm{mod}\, p)$, $t \geq 0$, элементы $y_{l_i}(N-1) \in L_{l_i}(N-1)$ — централизаторы уровня $N-1$, элементы $c_0$ принадлежат $L_0$ (в некоторых слагаемых элементы $c_0$ могут отсутствовать).*

Здесь, как всегда, в рамках соглашения об индексах элементы $y_{l_i}(N-1)$ и $c_0$ могут быть различными; важны только уровни и индексы, указывающие на принадлежность $\varphi$-компонентам.

Доказательство. Нам достаточно показать, что для любого $s = 0, 1, 2, \dots$ и любых индексов $k_1, k_2, \dots, k_s \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ коммутатор

$$z_k = [y_j(N), a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_s}], \tag{5}$$

где $j + k_1 + \dots + k_s \equiv k \,(\mathrm{mod}\, p)$, $j \neq 0$, равен линейной комбинации коммутаторов вида (4).

Используем индукцию по $s$. Пусть $s = 0$. В силу (2) элемент $y_j(N)$ также является централизатором уровня $N-1$, поэтому имеет вид (4). При $s = 1$, если $k_1 = 0$, коммутатор $[y_j(N), a_{k_1}]$ имеет требуемый вид $[y_j(N-1), a_0]$. Если $k_1 \neq 0$, подставим в коммутатор выражение $a_{k_1}$ в виде суммы $y_{k_1}(N-1) + b_{k_1}(N-1)$:

$$[y_j(N), a_{k_1}] = [y_j(N), y_{k_1}(N-1)] + [y_j(N), b_{k_1}(N-1)].$$

Первое слагаемое имеет требуемый вид, а второе слагаемое либо равно 0, если $j + k_1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$, либо является квазицентрализатором уровня $N$ веса 2 и, следовательно, по лемме 3 также централизатором уровня $N-1$, т. е. также имеет вид (4).

Пусть $s > 1$. Элементы $a_{k_u}$ можно произвольным образом переставлять в (5), не нарушая сравнения по модулю

$$\sum_{t=1}^{s-1} \sum_{j+i_1+\dots+i_t \equiv k \,(\mathrm{mod}\, p)} [L_j(N), L_{i_1}, \dots, L_{i_t}].$$

По индукционному предположению все элементы в этой сумме можно представить в требуемой форме. Поэтому мы можем свободно переставлять $a_{k_u}$ для того, чтобы представить наш коммутатор в требуемом виде. Выразим каждый элемент $a_{k_u}$ с ненулевым индексом $k_u \neq 0$ в виде $y_{k_u}(N-1) + b_{k_u}(N-1)$ и подставим эти выражения в коммутатор (5). Получим линейную комбинацию коммутаторов

$$[y_j(N), z_{k_1}, z_{k_2}, \dots, z_{k_s}],$$

где элементы $z_{k_u}$ являются либо $b$-представителями $b_{k_u}(N-1)$, либо централизаторами $y_{k_u}(N-1)$, либо $c_0 \in L_0$. В каждом слагаемом переместим все $b$-представители $b_{k_u}(N-1)$ (если такие найдутся) налево и расположим их следом за элементом $y_j(N)$, а централизаторы уровня $N-1$, элементы $y_{k_u}(N-1)$ (опять же, если такие найдутся), переместим в самый конец к правому краю:

$$[y_j(N), b_{k_1}(N-1), \dots, b_{k_l}(N-1), c_0, \dots, c_0, y_{n_1}(N-1), \dots, y_{n_u}(N-1)]. \quad (6)$$

Если в слагаемом найдется не менее $p-1$ элементов вида $b_{k_u}(N-1)$, то по лемме 5 эти $b$-представители можно переставить таким образом, что получится начальный отрезок с нулевой суммой индексов и, следовательно, все слагаемое будет равно нулю в силу централизаторного свойства (3), так как параметр $W_N$ заведомо больше $p-1$.

Если слагаемое содержит менее $p-1$ элементов вида $b_{k_u}(N-1)$, начальный отрезок коммутатора (6) подкоммутатор

$$[y_j(N),\, b_{k_1}(N-1),\, b_{k_2}(N-1), \dots, b_{k_l}(N-1)],$$

где $l \leq p-2$, либо равен нулю в силу (3), если $j + k_1 + \dots + k_l \equiv 0 \pmod{p}$, либо является квазицентрализатором веса $\leq p-1$ уровня $N$, а следовательно, также и централизатором уровня $N-1$ по лемме 3, так как условие $p-1 \leq W_N - W_{N-1} + 1$ выполняется в силу выбора параметров $W_i$ (см. [9, § 7]). После переобозначения получим коммутатор требуемого вида:

$$[y_{l_0}(N-1),\, c_0, \dots, c_0,\, y_{n_1}(N-1), \dots, y_{n_u}(N-1)],$$

где $l_0 \equiv j + k_1 + \dots + k_l \pmod{p}$. □

**Следствие.** *Любой элемент $z_0 \in Z_0$ представи́м в виде линейной комбинации коммутаторов вида $[x_{-i}(N-2), x_i(N-2)]$, где $x_{\pm i}(N-2) \in L_{\pm i}(N-2)$ $(i \neq 0)$ — $x$-представители уровня $N-2$.*

Доказательство. По лемме 6 любой элемент $z_0 \in Z_0$ представим в виде линейной комбинации коммутаторов вида

$$[y_{l_0}(N-1), a_0, \dots, a_0, y_{l_1}(N-1), y_{l_2}(N-1), \dots, y_{l_t}(N-1)],$$

где $l_0 + l_1 + \dots + l_t \equiv 0 \pmod{p}$, $t \geq 0$, $l_i \neq 0$, все $a_0$ принадлежат $L_0$. Так как индекс $l_0$ отличен от 0, множество $\{y_{l_1}(N-1), y_{l_2}(N-1), \dots, y_{l_t}(N-1)\}$ не может быть пустым. Выделим последний элемент $y_{l_t}(N-1)$, остальную часть обозначим через $a_{-l_t}$ и применим лемму 3:

$$[a_{-l_t}, y_{l_t}(N-1)] = [y_{-l_t}(N-2), y_{l_t}(N-1)] = [y_{-l_t}(N-2), y_{l_t}(N-2)].$$

После замораживания в том же уровне получим требуемый вид. □

Замечание. Это утверждение в более общей ситуации было доказано в [9, лемма 9].

Так как конструкция идеала $Z$ заимствована из [9], мы можем применить предложение 1 из [9], которое утверждает, что идеал $Z$ разрешим $p$-ограниченной ступени. Докажем, что идеал $Z$ к тому же нильпотентен $p$-ограниченной ступени и потому является искомым. Это доказывается индукцией по ступени разрешимости $Z$ и вытекает из следующего предложения.

**Предложение 2.** *Пусть $U$ — однородное относительно аддитивных подгрупп $Z_i$, $i = 0, \dots, p-1$, подкольцо идеала $Z$, т. е. $U = U \cap Z_0 + U \cap Z_1 + \dots + U \cap Z_{p-1}$, и пусть $T = (4p-4)(p-1)p + 1$. Тогда для любого натурального $k$*

(а) $[\gamma_k([U,U]), \underbrace{U, \dots, U}_{T}] \subseteq \gamma_{k+1}([U,U])$;

(б) $\gamma_{(Tk+2)}(U) \subseteq \gamma_{k+1}([U,U])$;

(в) $\gamma_{f(T,n)+1}(U) \subseteq U^{(n)}$, *где* $f(T,n) = \frac{T^n - 1}{T-1}$.

Доказательство. (а) Очевидно, что однородными относительно $Z_i$, $i = 0, \dots, p-1$, будут также подкольца $\gamma_k(U)$ и $\gamma_k([U,U])$ для всех $k$. Поэтому достаточно показать, что

$$[a_{i_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_T}] = 0 \,(\mathrm{mod}\, \gamma_{k+1}([U,U])), \tag{7}$$

где $a_{i_0} \in Z_{i_0} \cap \gamma_k([U,U])$, $a_{j_k} \in Z_{j_k} \cap U$, $i_0, j_k \in \{0, \dots, p-1\}$. Здесь, как всегда, в рамках соглашения об индексах важны только индексы, указывающие на принадлежность $\varphi$-компонентам. Элементы $a_{j_1}, \dots, a_{j_T}$ можно произвольным образом переставлять в (7), не нарушая сравнения по модулю $\gamma_{k+1}([U,U])$. Среди $T = (4p-4)(p-1)p + 1$ элементов $a_{j_k} \in Z_{j_k} \cap U$, $j_k \in \{0, \dots, p-1\}$ найдется не менее $r = (4p-4)(p-1) + 1$ элементов $a_s$ с одинаковым индексом $s$. Перенесем все эти элементы $a_s$ в начало коммутатора следом за элементом $a_{i_0}$:

$$[a_{i_0}, \underbrace{a_s, \dots, a_s}_{r}, \dots]. \tag{8}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $s \neq 0$. Существует такое натуральное число $0 \le w \le p-1$, что $i_0 + ws \equiv s \,(\mathrm{mod}\, p)$. Тогда $[a_{i_0}, \underbrace{a_s, \dots, a_s}_{w}] \in L_s$ и следующие $p-1$ элементов $a_s$ дополняют этот начальный отрезок до подкоммутатора с нулевой суммой индексов. В рамках соглашения об индексах переобозначая $[a_{i_0}, \underbrace{a_s, \dots, a_s}_{w}]$ в (8) через $a_s$, получим

$$[[\underbrace{a_s, \dots, a_s}_{p}], a_s, \dots]. \tag{9}$$

По лемме 6 элемент $a_s \in Z_s$, следующий за коммутатором $[\underbrace{a_s, \dots, a_s}_{p}]$, можно представить в виде линейной комбинации коммутаторов вида

$$[y_{l_0}(N-1),\, c_0, \dots, c_0,\, y_{l_1}(N-1), \dots, y_{l_t}(N-1)],$$

где $l_0 + \dots + l_t \equiv s \,(\mathrm{mod}\, p)$, $t \ge 0$, $y_{l_j}(N-1) \in L_{l_j}(N-1)$ — централизаторы уровня $N-1$. Подставив это выражение в (9) и раскрыв скобки по тождеству Якоби $[a,[b,c]] = [a,b,c] - [a,c,b]$, получим линейную комбинацию коммутаторов с начальным отрезком

$$[[\underbrace{a_s, \dots, a_s}_{p}], c_0, \dots, c_0, y_{k_1}(N-1), \dots] \tag{10}$$

(при этом в некоторых слагаемых элементы $c_0 \in L_0$ между начальным отрезком $[\underbrace{a_s, \dots, a_s}_{p}]$ и первым централизатором уровня $N-1$ могут отсутствовать).

Заметим, что элементы $c_0$ и $y_{l_j}(N-1)$ в представлении элемента $a_s$ могут не принадлежать подкольцу $U$, поэтому в отличие от первоначальных элементов $a_s$ мы не можем их переставлять по модулю $\gamma_{k+1}([U,U])$. Воспользуемся тождеством Якоби, чтобы избавиться от элементов $c_0$, расположенных между подкоммутатором $[\underbrace{a_s,\dots,a_s}_{p}]$ и первым централизатором уровня $N-1$. Будем переносить элементы $c_0$ налево через элементы $a_s$ в начало коммутатора (10). При этом будут получаться дополнительные слагаемые вида

$$[[\underbrace{a_s,\dots,a_s}_{p-w}[a_s,c_0],\underbrace{a_s,\dots,a_s}_{w-1}],c_0,\dots,c_0,y_{k_1}(N-1),\dots].$$

Так как подкоммутаторы $[a_s,c_0]$ снова принадлежат $\varphi$-однородным компонентам $L_s$, то все эти дополнительные слагаемые будут такого же вида, как коммутатор (10), но с меньшим числом элементов $c_0$, расположенных между подкоммутатором $[\underbrace{a_s,\dots,a_s}_{p}]$ и первым централизатором уровня $N-1$. Переобозначим $a_s:=[a_s,a_0]$ и продолжим переносить налево оставшиеся элементы $c_0$, расположенные между $[\underbrace{a_s,\dots,a_s}_{p}]$ и первым централизатором уровня $N-1$. В результате нам удастся получить линейную комбинацию коммутаторов с начальным отрезком вида

$$[[\underbrace{a_s,\dots,a_s}_{p}],y_{k_1}(N-1)]. \tag{11}$$

По лемме 1 заморозим подкоммутатор $[\underbrace{a_s,\dots,a_s}_{p}]$ в уровне 0 и подставим выражение $[\underbrace{x_s(0),\dots,x_s(0)}_{p}]$ в коммутатор (11). Используя тождество $[a,b]=-[b,a]$ и раскрывая скобки по тождеству Якоби, представим (11) в виде линейной комбинации коммутаторов длины $p+1$ от тех же самых элементов с централизатором $y_{k_1}(N-1)$ на первом месте:

$$[y_{k_1}(N-1),\underbrace{x_s(0),\dots,x_s(0)}_{p}].$$

Каждый такой коммутатор имеет подкоммутатор длины $\le p$ с нулевой суммой индексов, поэтому все эти коммутаторы равны 0 в силу (3).

Пусть теперь $s=0$ в (8). По следствию из леммы 6 все элементы $a_0\in Z_0$ можно представить в виде линейных комбинаций коммутаторов вида $[x_{-i}(N-2),x_i(N-2)]$, где $x_{\pm i}(N-2)\in L_{\pm i}(N-2)$ — $x$-представители уровня $N-2$. Подставив эти выражения в (8) и расписав по линейности, получим линейную комбинацию коммутаторов вида

$$[a_{i_0},[x_{-i_1}(N-2),x_{i_1}(N-2)],[x_{-i_2}(N-2),x_{i_2}(N-2)],\dots,[x_{-i_r}(N-2),x_{i_r}(N-2)]].$$

В каждом слагаемом среди $r=(4p-4)(p-1)+1$ подкоммутаторов $[x_{-j}(N-2),x_j(N-2)]$, $j\in\{1,\dots,p-1\}$ найдется не менее $4p-3$ подкоммутаторов вида $[x_{-l}(N-2),x_l(N-2)]$ с одним и тем же значением $l\ne 0$. Заморозим остальные подкоммутаторы $[x_{-j}(N-2),x_j(N-2)]$ при $j\ne l$ в нулевом уровне и обозначим их через $c_0 = [x_{-j}(0), x_j(0)]$. Их общее количество в каждом коммутаторе полученной линейной комбинации не превосходит $r - 4p + 3$. В результате получим коммутаторы, удовлетворяющие лемме 4, по которой все они равны 0. Условия

$$W_1 \geq 2(r - 4p + 3) + 5p - 4 \quad \text{и} \quad N - 2 \geq 4p - 3$$

выполняются автоматически в силу выбора параметров $W_1$ и $N$ (см. [9, § 7]).

(б) Индукция по $k$. При $k = 1$ это утверждение (а) для $k = 1$. При $k > 1$ по предположению индукции имеем

$$\gamma_{Tk+2}(U) = [\gamma_{T(k-1)+2}(U), \underbrace{U, \dots, U}_{T}] \subseteq [\gamma_k([U,U]), \underbrace{U, \dots, U}_{T}] \subseteq \gamma_{k+1}([U,U]),$$

где во втором включении снова использовано утверждение (а).

(в) Индукция по $n$. При $n = 1$ имеем $\gamma_{f(T,1)+1}(U) = \gamma_2(U) = U^{(1)}$. При $n \geq 2$ согласно (б) имеем

$$\gamma_{f(T,n)+1}(U) = \gamma_{Tf(T,n-1)+2}(U) \subseteq \gamma_{f(T,n-1)+1}([U,U]).$$

Применим теперь предположение индукции для $n - 1$ к однородному относительно аддитивных подгрупп $Z_i$ подкольцу $[U,U]$:

$$\gamma_{f(T,n-1)+1}([U,U]) \subseteq [U,U]^{(n-1)} = U^{(n)},$$

что завершает доказательство предложения 2. $\square$

Завершим доказательство предложения 1. В силу [9, предложение 1] идеал $Z$ разрешим ступени, ограниченной некоторой функцией $g(p)$. Остается применить п. (в) предложения 2 при $n = g(p)$ к идеалу $Z$. $\square$

## 4. Завершение доказательства основных теорем

Нам потребуются следующие хорошо известные леммы.

**Лемма 7** (см., например, [14, 1.7.4]). *Пусть $p$ — простое число, и пусть $\varphi$ — автоморфизм конечного порядка $p^k$ периодической абелевой группы $A$ периода $p^a$, имеющий конечное число неподвижных точек, равное $p^b$. Тогда группа $A$ конечна и ее порядок не превосходит $p^{abp^k}$.*

**Лемма 8** (см., например, [14, 1.7.5]). *Пусть $p$ — простое число, и пусть $\varphi$ — линейное преобразование конечного порядка $p^k$ векторного пространства $V$ над полем характеристики $p$, пространство неподвижных точек которого имеет конечную размерность $m$. Тогда размерность $V$ конечна и не превосходит $mp^k$.*

Случай колец Ли. Пусть $L$ — кольцо Ли, основное кольцо которого содержит примитивный корень $p$-й степени из 1, а $\varphi$ — его автоморфизм, имеющий ровно $m$ неподвижных точек, так что $|L_0| \leq m$. По предложению 1 подкольцо $L_0 + L_1 + \dots + L_{p-1}$ обладает идеалом $Z$ $(m,p)$-ограниченного аддитивного индекса, которое нильпотентно $p$-ограниченной ступени $g$. Так как $pL \subseteq L_0 + L_1 + \dots + L_{p-1}$, подкольцо $Z \cap pL$ имеет $(m,p)$-ограниченный индекс в аддитивной группе $pL$ и $\gamma_{g+1}(Z \cap pL) = 0$. Полный прообраз $F$ подгруппы $Z \cap pL$ в аддитивной группе $L$ относительно гомоморфизма $l \to pl$ имеет $(m,p)$-ограниченный индекс в $L$. Обозначим через $H$ идеал, порожденный $F$. Тогда индекс аддитивной группы $H$ в $L$ также $(m,p)$-ограничен. Так как $Z$ — идеал подкольца $L_0 + L_1 + \dots + L_{p-1}$, $pF \subseteq Z$ и $pL \subseteq L_0 + L_1 + \dots + L_{p-1}$, для любых $x \in F$ и $y, z, \ldots \in L$ имеем

$$p^k[x, y, z, \ldots] = [px, py, pz, \ldots] \in Z,$$

где $k$ — вес коммутатора, т. е. аддитивная фактор-группа $H/Z$ является $p$-группой. Вспомним, что аддитивная группа $H/F$ имеет $(m,p)$-ограниченный порядок и $pF \leq Z$. Следовательно, $p^r H \subseteq Z$ для некоторого $(m,p)$-ограниченного числа $r$. Так как $\gamma_{g+1}(Z) = 0$, то $p^{r(g+1)}\gamma_{g+1}(H) = 0$, т. е. аддитивная группа $\gamma_{g+1}(H)$ — периодическая $p$-группа и ее период делит $(m,p)$-ограниченное число $p^{r(g+1)}$. По лемме 7 $\gamma_{g+1}(H)$ — конечная группа $(m,p)$-ограниченного порядка. Подмножество

$$C = C_H(\gamma_{g+1}(H)) = \{c \in H \mid [c, \gamma_{g+1}(H)] = 0\}$$

является идеалом $L$: для $c \in C$, $h \in \gamma_{g+1}(H)$, $l \in L$ имеем $[[c,l],h] = [[c,h],l] + [c,[l,h]] = 0$, ибо $[l,h] \in \gamma_{g+1}(H)$. Фактор-кольцо $H/C$ конечно $(m,p)$-ограниченного порядка, так как $H/C$ вкладывается в $\mathrm{Hom}(\gamma_{g+1}(H))$. Поскольку порядок $|L/H|$ также $(m,p)$-ограничен, фактор-кольцо $L/C$ также конечно $(m,p)$-ограниченного порядка. Имеем

$$\gamma_{g+2}(C) = [\gamma_{g+1}(C), C] \subseteq [\gamma_{g+1}(H), C] = 0,$$

откуда получаем, что идеал $C$ нильпотентен $p$-ограниченной ступени.

Случай алгебр Ли. Вместо всех $\varphi$-однородных элементов $c$, равных значению некоторого шаблона $\mathbf{P}$ с нулевой суммой индексов, будем выбирать некоторый фиксированный базис подпространства, натянутого на все значения $\mathbf{P}$. Это подпространство содержится в $L_0$, и потому его размерность не превосходит $m$. Элементы таких базисов и возьмут на себя роль элементов $c$ в построении обобщенных централизаторов и фиксированных $x$-представителей. Фиксированные $b$-представители выбираются как представители смежных классов некоторого базиса фактор-пространства $L_j/L_j(t)$. Общее число $x$-представителей и $b$-представителей будет $(m,p)$-ограниченным. С этими изменениями доказательство аналога предложения 1 для алгебр Ли получается дословным повторением с заменой слова «индекс» всюду словом «коразмерность».

Если характеристика $L$ не делит $p$, то автоморфизм $\varphi$ полупрост и теорема 1 для алгебр Ли эквивалентна предложению 1. Если характеристика $L$ равна $p$, то по лемме 8 размерность всей алгебры ограничена в терминах $m$ и $p$. $\square$

Доказательство следствия можно получить, повторив дословно доказательство предложения 1, с очевидными изменениями для алгебр Ли, как в предыдущем параграфе.

Теорема 2 следует из теоремы 1 после применения тех же самых рассуждений, что и в [3, § 7], с использованием соответствия Мальцева. $\square$

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Higman G.* Groups and rings which have automorphisms without non-trivial fixed elements // J. London Math. Soc. 1957. V. 32, N 2. P. 321–334.
2. *Крекнин В. А., Кострикин А. И.* Алгебры Ли с регулярными автоморфизмами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149, № 2. С. 249–251.
3. *Khukhro E. I., Makarenko N. Yu.* Lie rings with almost regular automorphisms // J. Algebra. 2003. V. 264, N 2. P. 641–664.

**4.** *Крекнин В. А.* Разрешимость алгебр Ли с регулярными автоморфизмами конечного периода // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, № 3. С. 467–469.
**5.** *Крекнин В. А.* Разрешимость алгебр Ли с регулярным автоморфизмом // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 3. С. 715–716.
**6.** *Хухро Е. И.* Кольца Ли и группы, допускающие почти регулярный автоморфизм простого порядка // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 9. С. 1207–1219.
**7.** *Хухро Е. И.* Кольца Ли с почти регулярными автоморфизмами // Докл. РАН. 2003. Т. 388, № 3. С. 298–299.
**8.** *Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И.* Почти-разрешимость алгебр Ли с почти-регулярными автоморфизмами // Докл. РАН. 2003. Т. 393, № 1. С. 18–19.
**9.** *Makarenko N. Yu., Khukhro E. I.* Almost solubility of Lie algebras with almost regular automorphisms // J. Algebra. 2004. V. 277, N 1. P. 370–407.
**10.** *Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И.* Кольца Ли, допускающие автоморфизм порядка 4 с малым числом неподвижных точек // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 1. С. 41–78.
**11.** *Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И.* Нильпотентные группы, допускающие почти регулярный автоморфизм порядка 4 // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 3. С. 314–333.
**12.** *Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И.* Кольца Ли, допускающие автоморфизм порядка 4 с малым числом неподвижных точек. II // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 2. С. 144–166.
**13.** *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups II. Berlin: Springer-Verl., 1982.
**14.** *Khukhro E. I.* Nilpotent groups and their automorphisms. Berlin: De Gruyter, 1993.

*Статья поступила 7 июня 2005 г.*

*Макаренко Наталья Юрьевна*
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
*пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090*
makarenk@math.nsc.ru