Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 517.98+512.8

АВТОМОРФИЗМЫ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В РАСШИРЕННОЙ КОМПЛЕКСНОЙ f–АЛГЕБРЕ

А. Г. Кусраев

Аннотация: Устанавливается, что в расширенном комплексном K-пространстве с фиксированной мультипликативной структурой σ-дистрибутивность базы равносильна каждому из следующих утверждений: (1) любой нерасширяющий линейный оператор порядково ограничен; (2) нет ненулевых дифференцирований; (3) любой нерасширяющий эндоморфизм является порядковым проектором; (4) нет нетривиальных нерасширяющих автоморфизмов.

Ключевые слова: векторная решетка, f-алгебра, нерасширяющий оператор, дифференцирование, автоморфизм.

Семёну Самсоновичу Кутателадзе
к его шестидесятилетию

1. Введение

Известно, что база расширенного пространства Канторовича представляет собой σ-дистрибутивную булеву алгебру в том и только в том случае, когда всякий нерасширяющий линейный оператор в нем порядково ограничен или, что то же самое, регулярен. В то же время σ-дистрибутивность базы равносильна локальной одномерности K-пространства [1, 2]. Таким образом, если расширенное K-пространство не является локально одномерным, то в нем можно построить нерегулярный нерасширяющий линейный оператор. Впервые это было сделано в [3, 4]. Подробное изложение этого круга вопросов и соответствующий исторический комментарий имеется в [2, гл. 5].

Булевозначный подход к изучению нерасширяющих операторов, развитый в [5], обнаруживает новые взаимосвязи. Так, например, построение оператора указанного выше типа можно провести внутри подходящего булевозначного универсума с помощью базиса Гамеля поля вещественных чисел, рассматриваемого как векторное пространство над некоторым его подполем, см. [5, 6]. Точнее говоря, расширенное K-пространство в соответствии с теоремой Гордона [6, 10.3.4] можно представить как спуск $\mathscr{R}{\downarrow}$ булевозначного поля вещественных чисел $\mathscr{R}$, а образом стандартного поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ (при каноническом вложении стандартного универсума $\mathbb{V}$ в булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$) служит подполе $\mathbb{R}^\wedge$ поля $\mathscr{R}$. Разумеется, некоторые важные свойства K-пространства $\mathscr{R}{\downarrow}$ связаны со строением поля вещественных чисел $\mathscr{R}$, рассматриваемого как векторное пространство над $\mathbb{R}^\wedge$. В частности, используя базис Гамеля, можно построить разрывную $\mathbb{R}^\wedge$-линейную функцию в $\mathscr{R}$, которая и дает нерегулярный линейный нерасширяющий оператор в $\mathscr{R}{\downarrow}$.

Цель настоящей работы — провести аналогичные построения, но привлекая *базис трансцендентности* вместо базиса Гамеля, и получить новые характеризации K-пространств с σ-дистрибутивной базой в терминах более узкого класса нерасширяющих линейных операторов. Развивая булевозначный подход из [5], устанавливаем, что в расширенной комплексной f-алгебре (т. е. расширенном комплексном K-пространстве с фиксированной мультипликативной структурой) σ-дистрибутивность базы равносильна каждому из следующих утверждений: (а) нет ненулевых дифференцирований; (б) любой нерасширяющий эндоморфизм является порядковым проектором; (в) нет нетривиальных нерасширяющих автоморфизмов.

Необходимые сведения из теории векторных решеток содержатся в [2, 7, 8], из булевозначного анализа — в [6, 9, 10], из теории полей — в [11–13].

Автор выражает признательность рецензенту, указавшему на ряд неточностей в первоначальном варианте статьи.

2. Вспомогательные сведения

Рассмотрим некоторые свойства нерасширяющих операторов в комплексной векторной решетке. Всюду ниже $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — поля вещественных и комплексных чисел соответственно.

2.1. Напомним, что *комплексной векторной решеткой* принято называть комплексификацию $E_{\mathbb{C}} := E \oplus iE$ вещественной векторной решетки E при условии, что существует модуль $|z|$ каждого элемента $z \in E_{\mathbb{C}}$, определяемый формулой

$$|z| := \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} |(\cos\theta)x + (\sin\theta)y| \quad (z := x + iy \in E_{\mathbb{C}}).$$

Дизъюнктность элементов $z := x + iy$ и $z' := x' + iy'$ из $E_{\mathbb{C}}$ вводится, как обычно, формулой $z \perp z' \leftrightarrow |z| \wedge |z'| = 0$ и равносильна соотношению $\{x, y\} \perp \{x', y'\}$. Идеал J в $E_{\mathbb{C}}$ определяется как комплексификация $J_0 \oplus iJ_0$ идеала $J_0 \subset E$. При этом J называют *полосой* в $E_{\mathbb{C}}$, если J_0 — полоса в E. Как и в вещественном случае, всякая полоса в $E_{\mathbb{C}}$ допускает представление в виде $\{z \in E_{\mathbb{C}} : (\forall v \in V)\, z \perp v\}$, где V — непустое подмножество $E_{\mathbb{C}}$. Подробнее см. [8, гл. II, § 11].

2.2. Рассмотрим вещественные векторные решетки E и F. Пространство $\mathbb{C}$-линейных операторов $L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$ изоморфно комплексификации вещественного пространства $\mathbb{R}$-линейных операторов $L(E, F)$. Оператор $T \in L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$ допускает, и притом единственное, представление в виде $T = T_1 + iT_2$, где $T_1, T_2 \in L(E, F)$ и произвольный оператор $S \in L(E, F)$ отождествляется со своим каноническим продолжением $\widetilde{S} \in L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$, определяемым формулой $\widetilde{S}z := Sx + iSy$, $z = x + iy$. В частности, если E и F рассматривать как вещественные подпространства $E_{\mathbb{C}}$ и $F_{\mathbb{C}}$ соответственно, то пространство $L(E, F)$ можно понимать как вещественное подпространство $L(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$.

Оператор $T = T_1 + iT_2$ называют *положительным*, если $T_1 \geq 0$ и $T_2 = 0$. Если $E_{\mathbb{C}} = J \oplus J^{\perp}$ для некоторого идеала $J \subset E_{\mathbb{C}}$, то существует проектор $P : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ с ядром $J^{\perp}$ и образом J. Ограничение P на E будет порядковым проектором в E, и, в частности, P — положительный оператор.

2.3. Предположим, что F — подрешетка векторной решетки E. Как и в вещественном случае (см. [2, 3.3.2]), линейный оператор T из $F_{\mathbb{C}}$ в $E_{\mathbb{C}}$ называют *нерасширяющим* (или *сохраняющим полосы*), если

$$z \perp z' \to Tz \perp z' \quad (z \in F_{\mathbb{C}},\ z' \in E_{\mathbb{C}}),$$

где отношения дизъюнктности понимаются в $E_{\mathbb{C}}$.

Линейный оператор $T := T_1 + iT_2$ из $F_{\mathbb{C}}$ в $E_{\mathbb{C}}$ сохраняет полосы тогда и только тогда, когда вещественные линейные операторы $T_1, T_2 : F \to E$ сохраняют полосы.

Доказательство. Пусть операторы T_1 и T_2 сохраняют полосы. Если элементы $z := x + iy$ и $w := u + iv$ дизъюнктны, то $\{x, y\} \perp \{u, v\}$. Поэтому $\{x, y\} \perp \{T_1u - T_2v, T_1v + T_2u\}$. Отсюда $z \perp Tw$ ввиду равенства $Tw = (T_1u - T_2v) + i(T_1v + T_2u)$.

Обратно, если T сохраняет полосы и элементы $x \in E$ и $u \in F$ дизъюнктны, то $x \perp Tu = T_1u + iT_2u$, значит, $x \perp \{T_1u, T_2u\}$. $\square$

Отсюда вытекает, в частности, что если E — векторная решетка с главными проекциями и F — фундамент в E, то линейный оператор $T = T_1 + iT_2 : F_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ будет нерасширяющим в том и только в том случае, когда для любого порядкового проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ выполняется $\pi T_k z = T_k \pi z$ ($z \in F_{\mathbb{C}}$, $k = 1, 2$).

2.4. Всюду далее $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра, а $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — соответствующий булевозначный универсум, в котором булева оценка истинности произвольной формулы теории множеств $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ с элементами $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ обозначается формулой $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!]$. При этом $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] \in \mathbb{B}$ и истинность утверждения φ в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ означает по определению $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] = \mathbf{1}$.

В силу принципа максимума [6, теорема 4.3.9] существует элемент $\mathscr{C} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которого $[\![\,\mathscr{C}$ — поле комплексных чисел$\,]\!] = \mathbf{1}$. Так как равенство $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ выражается ограниченной теоретико-множественной формулой, то согласно ограниченному принципу переноса (см. [6, 4.2.9 (2)]) будет $[\![\,\mathbb{C}^\wedge = \mathbb{R}^\wedge \oplus i^\wedge \mathbb{R}^\wedge\,]\!] = \mathbf{1}$. Кроме того, $\mathbb{R}^\wedge$ считают плотным подполем поля $\mathscr{R}$, поэтому можно также считать, что $\mathbb{C}^\wedge$ — плотное подполе поля $\mathscr{C}$. Если 1 — единица поля $\mathbb{C}$, то $1^\wedge$ — единица поля $\mathscr{C}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Будем писать i вместо $i^\wedge$ и $\mathbf{1}$ вместо $1^\wedge$.

Спуском поля $\mathscr{C}$ называют множество $\mathscr{C}{\downarrow} := \{x \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})} : [\![x \in \mathscr{C}]\!] = \mathbf{1}\}$, на котором определена структура коммутативного комплексного упорядоченного кольца путем спуска операций, см. [6, § 5.3]. При этом $\mathscr{C}{\downarrow} = \mathscr{R}{\downarrow} \oplus i\mathscr{R}{\downarrow}$, следовательно, в силу теоремы Гордона [6, теорема 10.3.4] $\mathscr{C}{\downarrow}$ — расширенное комплексное K-пространство и комплексная f-алгебра одновременно, причем $1^\wedge$ — порядковая и кольцевая единица в $\mathscr{C}{\downarrow}$. Пространство $\mathscr{C}{\downarrow}$ зависит только от $\mathbb{B}$ и $\mathbb{C}$, поэтому будем использовать также обозначение $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$.

2.5. Пусть $\mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ — множество всех нерасширяющих линейных операторов в $G_{\mathbb{C}}$, где $G := \mathscr{R}{\downarrow}$. Ясно, что $\mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ — комплексное векторное пространство. Более того, $\mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ будет точным унитарным модулем над кольцом $G_{\mathbb{C}}$, если определить оператор gT формулой $gT : x \mapsto g \cdot Tx$ ($x \in G_{\mathbb{C}}$). Это следует из того, что умножение на элемент $G_{\mathbb{C}}$ представляет собой нерасширяющий оператор и композиция нерасширяющих операторов есть нерасширяющий оператор.

Обозначим символом $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C})$ элемент $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающий пространство всех $\mathbb{C}^\wedge$-линейных отображений из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{C}$. Тогда $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C})$ — векторное пространство над полем $\mathbb{C}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, а $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C}){\downarrow}$ — точный унитарный модуль над $G_{\mathbb{C}}$.

2.6. Так же, как и в [5, предложение 3.2], можно доказать, что линейный оператор в K-пространстве $G_{\mathbb{C}}$ будет нерасширяющим в том и только в том случае, когда он экстенсионален. Так как экстенсиональные отображения допускают подъем, то каждый оператор $T \in \mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ имеет подъем $\tau := T{\uparrow}$, который представляет собой единственную функцию из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{C}$, удовлетворяющую условию $[\![\tau(x) = Tx]\!] = \mathbf{1}$ $(x \in G_{\mathbb{C}})$, см. [6, теорема 5.5.6].

Модули $\mathrm{End}_N(G_{\mathbb{C}})$ *и* $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C}){\downarrow}$ *изоморфны. Изоморфизм устанавливается путем сопоставления нерасширяющему оператору его подъема.*

Доказательство повторяет рассуждения из [5, предложение 3.2] с учетом 2.3 и 2.4. $\square$

3. Основной результат

Напомним еще несколько определений, необходимых для формулировки основного результата.

3.1. Булеву σ-алгебру $\mathbb{B}$ называют *σ-дистрибутивной,* если для любой двойной последовательности $(b_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{B}$ выполнено условие

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{m\in\mathbb{N}} b_{n,m} = \bigwedge_{\varphi\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} b_{n,\varphi(n)}.$$

Другие эквивалентные определения имеются в книге [14]. Примером σ-дистрибутивной булевой алгебры служит полная атомная булева алгебра, т. е. алгебра всех подмножеств непустого множества. Важно подчеркнуть, что существуют и безатомные σ-дистрибутивные полные булевы алгебры (см. [2, 5.1.8]).

3.2. Комплексную *f-алгебру* $E_{\mathbb{C}}$ определим как комплексификацию вещественной f-алгебры E при условии, что существует модуль любого элемента (см. определение 2.1). Умножение в E естественно продолжается до умножения в $E_{\mathbb{C}}$ по формуле $(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$. При этом $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ $(z_1, z_2 \in E_{\mathbb{C}})$.

Если E — расширенное K-пространство с фиксированной порядковой единицей $\mathbf{1} \in E$, то в E имеется единственное умножение, превращающее E в f-алгебру, а $\mathbf{1}$ — в единицу умножения. Таким образом, $E_{\mathbb{C}}$ — пример комплексной f-алгебры. Рассматривая расширенное K-пространство как f-алгебру, всегда имеем в виду именно это обстоятельство.

3.3. Пусть даны алгебра A и некоторая ее подалгебра A_0. Линейный оператор $D : A_0 \to A$ называют *дифференцированием*, если выполнено условие

$$D(uv) = D(u)v + uD(v) \quad (u, v \in A_0).$$

Ядро дифференцирования представляет собой подалгебру. Ненулевое дифференцирование называют *нетривиальным.*

Эндоморфизмом алгебры называют линейный мультипликативный оператор в ней. Биективный эндоморфизм называют *автоморфизмом.* Тождественный автоморфизм принято называть *тривиальным.* Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемое как алгебра над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, допускает нетривиальные автоморфизмы (см., например, [15, гл. 5, теорема 7]).

Если данные выше определения автоморфизма и дифференцирования относятся к алгебре над полем $\mathbb{P}$, то говорят также о $\mathbb{P}$-автоморфизмах и $\mathbb{P}$-дифференцированиях соответственно.

3.4. Теорема. *Для произвольной полной булевой алгебры $\mathbb{B}$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *$\mathbb{B}$ является σ-дистрибутивной;*

(2) *$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathscr{C} = \mathbb{C}^\wedge$;*

(3) *в комплексном K-пространстве $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ все нерасширяющие линейные операторы порядково ограничены;*

(4) *в комплексной f-алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ нет ненулевых дифференцирований;*

(5) *в комплексной f-алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ всякий нерасширяющий эндоморфизм является порядковым проектором;*

(6) *в комплексной f-алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ нет нетривиальных нерасширяющих автоморфизмов.*

Доказательство. (1) $\to$ (2) Известно [6, 10.7.6], что если булева алгебра $\mathbb{B}$ σ-дистрибутивна, то $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{R}^\wedge = \mathscr{R}$. Отсюда, используя принцип ограниченного переноса [6, 4.2.9 (2)], выводим, что $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathscr{C} = \mathscr{R} \oplus i\mathscr{R} = \mathbb{R}^\wedge \oplus i\mathbb{R}^\wedge = \mathbb{C}^\wedge$.

(2) $\to$ (3) Если $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{C}^\wedge = \mathscr{C}$, то внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ множество $\mathrm{End}_{\mathbb{C}^\wedge}(\mathscr{C})$ состоит из функций $\tau : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ вида $\tau(z) = cz$, где $c \in \mathscr{C}$. Но тогда оператор $T := \tau{\downarrow}$ из $\mathscr{C}{\downarrow}$ в $\mathscr{C}{\downarrow}$ также имеет вид $T(u) = gu$ для некоторого $g \in \mathscr{C}{\downarrow}$.

(3) $\to$ (1) Из (3) следует, что в K-пространстве $\mathscr{R}{\downarrow}$ все нерасширяющие линейные операторы порядково ограничены. Но тогда $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{R}^\wedge = \mathscr{R}$ (см. [6, теорема 10.7.6]), стало быть, $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathscr{C} = \mathbb{C}^\wedge$.

(3) $\to$ (4) Следует из 5.5 и 5.7.

(3) $\to$ (5) Нерасширяющий эндоморфизм $T : \mathscr{C}{\downarrow} \to \mathscr{C}{\downarrow}$ допускает представление $T = T_1 + iT_2$, где T_1, T_2 — нерасширяющие линейные операторы в вещественном K-пространстве $\mathscr{R}{\downarrow}$, см. 2.3. В силу (3) T_1 и T_2 порядково ограничены, следовательно, $T_l x = c_l x$ $(x \in \mathscr{R}{\downarrow})$ для некоторых констант $c_1, c_2 \in \mathscr{R}{\downarrow}$. Как видно, $Tz = c \cdot z$ $(z \in \mathscr{C}{\downarrow})$, где $c := c_1 + ic_2$. Мультипликативность оператора T влечет $c^2 = c$, поэтому выполнены равенства $c_1^2 - c_2^2 = c_1$ и $2c_1c_2 = c_2$. Если $\pi := [c_2]$ — порядковый проектор в $\mathscr{R}{\downarrow}$ на полосу $\{c_2\}^{\perp\perp}$, то из второго равенства выводим $\pi c_1 = (1/2)\pi(\mathbf{1})$, а из первого вытекает $-\pi(c_2^2) = (1/4)\pi(\mathbf{1})$. Последнее возможно только при $\pi = 0$, значит, $c_2 = 0$ и $0 \leq c_1^2 = c_1$. Но верно также $0 \leq (\mathbf{1} - c_1)^2 = \mathbf{1} - c_1$, следовательно, $c_1 \leq \mathbf{1}$. Теперь видно, что оператор $x \mapsto T_1x = c_1x$ служит порядковым проектором в $\mathscr{R}{\downarrow}$ и, так как $T_2 = 0$, его каноническое продолжение на $\mathscr{C}{\downarrow}$ совпадает с T.

(5) $\to$ (6) Очевидно.

Нужные для завершения доказательства импликации (4) $\to$ (2) и (6) $\to$ (2) вытекают из доказанного ниже утверждения 5.8.

(4) $\to$ (2) Если в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ не выполняется равенство $\mathscr{C} = \mathbb{C}^\wedge$, то $b := [\![\mathscr{C} = \mathbb{C}^\wedge]\!] < \mathbf{1}$. Но тогда $b^* = [\![\mathscr{C} \neq \mathbb{C}^\wedge]\!] \neq \mathbf{0}$. В булевозначной модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B}_0)}$ над булевой алгеброй $\mathbb{B}_0 := [\mathbf{0}, b^*]$ имеет место соотношение $\mathscr{C} \neq \mathbb{C}^\wedge$. В силу утверждения 5.8 существует ненулевое дифференцирование D в полосе $b^*\mathscr{C}{\downarrow}$. Единственное продолжение $D \oplus 0$ оператора D, совпадающее с нулем на полосе $b\mathscr{C}{\downarrow}$, также будет ненулевым дифференцированием в $\mathscr{C}{\downarrow}$.

(6) $\to$ (2) Аналогичным образом, используя утверждение 5.8, для того же $b \in \mathbb{B}$ можно найти нетривиальный автоморфизм A^* в полосе $b^*\mathscr{C}{\downarrow}$. Если A — тождественное отображение в полосе $b\mathscr{C}{\downarrow}$, то $A^* \oplus A$ — нетривиальный автоморфизм в $\mathscr{C}{\downarrow}$. $\square$

3.5. Следствие. *Для расширенного вещественного K-пространства G с фиксированной структурой f-алгебры равносильны утверждения:*

(1) *булева алгебра* $\mathbb{B} := \mathfrak{P}(G)$ *σ-дистрибутивна;*

(2) *в комплексной f-алгебре $G_{\mathbb{C}}$ нет нетривиальных дифференцирований;*

(3) *в комплексной f-алгебре $G_{\mathbb{C}}$ нет нетривиальных нерасширяющих автоморфизмов.*

3.6. Эквивалентности (1) $\leftrightarrow$ (2) $\leftrightarrow$ (3) из 3.4, установленные А. Е. Гутманом в [1, 16] для вещественного K-пространства $\mathbb{B}(\mathbb{R}) := \mathscr{R}{\downarrow}$, содержат решение задачи Э. В. Викстеда об описании расширенных пространств Канторовича, в которых всякий нерасширяющий линейный оператор автоматически порядково ограничен [17]. Булевозначный подход к этому кругу вопросов см. в [5]. Дальнейшие подробности можно найти в [2].

4. Булевозначные комплексные числа

Как и выше, $\mathscr{C}$ — поле комплексных чисел внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, содержащее подполе $\mathbb{C}^{\wedge}$. При этом $\mathscr{C}{\downarrow}$ — расширенное комплексное K-пространство с единицей $\mathbf{1} := 1^{\wedge}$. База $\mathfrak{P}(\mathscr{C}{\downarrow})$ (т. е. булева алгебра порядковых проекторов в $\mathscr{C}{\downarrow}$) изоморфна $\mathbb{B}$, поэтому считаем, допуская вольность, что эти булевы алгебры совпадают.

4.1. *В модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ имеет место утверждение: поле $\mathbb{C}^{\wedge}$ алгебраически замкнуто в $\mathscr{C}$. В частности, если $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{C}^{\wedge} \neq \mathscr{C}$, то*

$$\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \text{«}\mathscr{C} \text{ — трансцендентное расширение поля } \mathbb{C}^{\wedge}\text{»}.$$

Доказательство. Вторая часть очевидным образом вытекает из первой. Докажем алгебраическую замкнутость поля $\mathbb{C}^{\wedge}$ в $\mathscr{C}$. Работая внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, предположим, что $z_0 \in \mathscr{C}$ является корнем ненулевого полинома с коэффициентами из $\mathbb{C}^{\wedge}$. Это утверждение можно формализовать следующим образом:

$$\varphi(z_0) \equiv (\exists n \in \omega)(\exists \varkappa : n \to \mathbb{C}^{\wedge}) \Big(\sum_{l \in n} \varkappa(l) z_0^l = 0 \Big) \wedge ((\exists l \in n) \varkappa(l) \neq 0).$$

Итак, $[\![\varphi(z_0)]\!] = \mathbf{1}$, и, раскрывая булевы оценки для кванторов с учетом принципа максимума [6, теорема 4.3.9], найдем счетное разбиение единицы $(b_n) \subset \mathbb{B}$ и последовательность $(\varkappa_n) \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которых

$$[\![\varkappa_n : n^{\wedge} \to \mathbb{C}^{\wedge}]\!] \geq b_n, \quad [\![(\exists l \in n^{\wedge}) \varkappa_n(l) \neq 0)]\!] \geq b_n,$$
$$[\![\varkappa_n(0^{\wedge}) + \varkappa_n(1^{\wedge}) z_0 + \dots + \varkappa_n((n-1)^{\wedge}) z_0^{(n-1)^{\wedge}} = 0]\!] \geq b_n \quad (n \in \omega).$$

Достаточно установить неравенство $[\![z_0 \in \mathbb{C}^{\wedge}]\!] \geq b_n$ для фиксированного $n \in \omega$. В дальнейших рассуждениях можем считать, не ограничивая общности, что $b_n = \mathbf{1}$, так как в противном случае можно заменить $\mathbb{B}$ на булеву алгебру $\mathbb{B}_n := [\mathbf{0}, b_n]$ с единицей b_n и $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ на $\mathbb{V}^{(\mathbb{B}_n)}$ с применением [6, теорема 4.2.3] к полному булеву гомоморфизму $\pi : b \mapsto b \wedge b_n$ из $\mathbb{B}$ в $\mathbb{B}_n$.

Заметим, что $E := \mathbb{C}^{\wedge}{\downarrow}$ представляет собой подкольцо и подрешетку в $\mathscr{C}{\downarrow}$ и состоит из кусочно постоянных элементов. Точнее, элемент $z \in \mathscr{C}$ входит в E в том и только в том случае, если имеет представление $z = o\text{-}\sum_{\xi} \lambda_{\xi} \pi_{\xi}(\mathbf{1})$, где (π_{ξ}) — разбиение единицы в $\mathbb{B} = \mathfrak{P}(\mathscr{C}{\downarrow})$ и (λ_{ξ}) — семейство комплексных чисел с тем же множеством индексов.

Пусть $k_n : \{0, 1, \dots, n-1\} \to E$ — модифицированный спуск $\varkappa_n$, см. [6, 5.7.7]. Так как $k_n(0), k_n(1), \dots, k_n(n-1) \in E$, можно подобрать такое разбиение единицы $(\pi_{\xi}) \subset \mathbb{B}$, $\pi_{\xi} \neq 0$, что $k_n(l) = o\text{-}\sum_{\xi} \lambda_{l,\xi} \pi_{\xi}(\mathbf{1})$, $l := 0, \dots, n-1$. Если

$\lambda_{0,\xi} = \lambda_{1,\xi} = \dots = \lambda_{n-1,\xi} = 0$ для некоторого ξ, то $[\![k_n(l) = 0]\!] \geq [\![k_n(l) = \lambda^{\wedge}_{l,\xi}]\!] \wedge [\![\lambda^{\wedge}_{l,\xi} = 0^{\wedge}]\!] \geq \pi_\xi$ при всех l, следовательно,

$$\bigvee_{l=0}^{n-1} [\![\varkappa_n(l^{\wedge}) \neq 0]\!] = \bigvee_{l=0}^{n-1} [\![k_n(l) \neq 0]\!] = \left(\bigwedge_{l=0}^{n-1} [\![k_n(l) = 0]\!]\right)^* \leq \pi_\xi^* < \mathbf{1}.$$

Но это противоречит соотношению

$$\mathbf{1} = [\![(\exists l \in n^{\wedge})\varkappa_n(l) \neq 0)]\!] = \bigvee_{l=0}^{n-1} [\![\varkappa_n(l^{\wedge}) \neq 0]\!].$$

Далее, соотношение $[\![\varkappa_n(0^{\wedge}) + \varkappa_n(1^{\wedge})z_0 + \dots + \varkappa_n((n-1)^{\wedge})z_0^{(n-1)^{\wedge}} = 0]\!] = \mathbf{1}$ влечет равенство $k_n(0) + k_n(1)z_0 + \dots + k_n(n-1)z_0^{n-1} = 0$, поэтому, учитывая указанное выше представление k_n, получаем семейство уравнений с постоянными комплексными коэффициентами

$$\lambda_{0,\xi} + \lambda_{1,\xi}\pi_\xi z_0 + \dots + \lambda_{n-1,\xi}\pi_\xi z_0^{n-1} = 0,$$

причем при каждом ξ не все $\lambda_{0,\xi}, \dots, \lambda_{n-1,\xi}$ равны нулю.

Пусть Q — открыто-замкнутое множество в стоуновском компакте булевой алгебры $\mathbb{B}$, соответствующее проектору π_ξ при стоуновском представлении. Тогда K-пространство $\pi_\xi \mathscr{C}{\downarrow}$ изоморфно $C_\infty(Q)$, причем элемент $\pi_\xi(\mathbf{1})$ переходит в функцию, тождественно равную единице на Q. Если $f \in C_\infty(Q)$ — образ элемента $\pi_\xi z_0$ при указанном изоморфизме, то приходим к соотношению

$$\lambda_{0,\xi} + \lambda_{1,\xi} f(q) + \dots + \lambda_{n-1,\xi} f(q)^{n-1} = 0 \quad (q \in Q).$$

В силу основной теоремы алгебры непрерывная функция f имеет не более n значений, следовательно, она ступенчата. Но тогда элемент $\pi_\xi z_0$ кусочно постоянен, стало быть, входит в E. Теперь ясно, что $z_0 \in E$. $\square$

4.2. Итак, при каноническом вложении комплексных чисел в булевозначную модель либо $\mathbb{C}^{\wedge} = \mathscr{C}$, либо поле комплексных чисел является трансцендентным расширением некоторого своего подполя. Для анализа этой ситуации потребуется понятие алгебраического или трансцендентного базиса поля над некоторым подполем.

Пусть $\mathbb{P}$ — подполе поля $\mathbb{C}$, причем $\mathbb{C}$ — трансцендентное расширение поля $\mathbb{P}$. В силу теоремы Штейница [11, гл. 5, § 5, теорема 1] существует базис трансцендентности $\mathscr{E} \subset \mathbb{C}$. Это означает, что множество $\mathscr{E}$ алгебраически независимо над $\mathbb{P}$, а $\mathbb{C}$ служит алгебраическим расширением поля $\mathbb{P}(\mathscr{E})$, получаемого путем присоединения к $\mathbb{P}$ элементов множества $\mathscr{E}$. Поле $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ называют *чистым расширением* поля $\mathbb{P}$.

5. Автоморфизмы и дифференцирования

Рассмотрим вопрос о существовании нетривиальных автоморфизмов и дифференцирований в комплексной расширенной f-алгебре. В этом параграфе G — расширенное K-пространство с фиксированной мультипликативной структурой, E — подкольцо и подрешетка в G, $G_{\mathbb{C}} := G \oplus iG$ и $E_{\mathbb{C}} := E \oplus iE$. Известно, что E и G — точные f-алгебры. Сначала для полноты приведем два необходимых ниже свойства поля комплексных чисел, которые автор не обнаружил в нужном виде в доступной ему литературе. Затем дадим булевозначную интерпретацию этих свойств.

5.1. *Пусть $\mathbb{C}$ служит трансцендентным расширением поля $\mathbb{P}$. Тогда в $\mathbb{C}$ существует нетривиальный $\mathbb{P}$-автоморфизм.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}$ — базис трансцендентности расширения $\mathbb{C}$ над $\mathbb{P}$. Так как $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое расширение поля $\mathbb{P}(\mathscr{E})$, любой $\mathbb{P}$-автоморфизм ϕ поля $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ продолжается до $\mathbb{P}$-автоморфизма Φ поля $\mathbb{C}$, см. [11, гл. 5, § 4, следствие из теоремы 1]. Ясно, что если ϕ нетривиален, то Φ также нетривиален.

Для построения нетривиального $\mathbb{P}$-автоморфизма в $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ рассмотрим сначала случай, когда $\mathscr{E}$ содержит лишь один элемент e, т. е. когда $\mathbb{C}$ — алгебраическое расширение простого трансцендентного расширения $\mathbb{P}(e)$. Возьмем элементы $a, b, c, d \in \mathbb{P}$, для которых $ad - bc \neq 0$. Тогда $e' = (ae + b)/(ce + d)$ — порождающий элемент поля $\mathbb{P}(e)$, отличный от e. Поле $\mathbb{P}(e) = \mathbb{P}(e')$ изоморфно полю рациональных дробей от одной переменной t, следовательно, дробно-линейная подстановка $t \mapsto (at + b)/(ct + d)$ определяет $\mathbb{P}$-автоморфизм ϕ поля $\mathbb{P}(e)$, переводящий e в e', см. [12, § 39].

Допустим теперь, что $\mathscr{E}$ содержит по меньшей мере два разных элемента e_1 и e_2, и возьмем произвольное биективное отображение $\phi_0 : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, для которого $\phi_0(e_1) = e_2$. Вновь используя то обстоятельство, что $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое расширение поля $\mathbb{P}(\mathscr{E})$, можно построить $\mathbb{P}$-автоморфизм ϕ поля $\mathbb{C}$, для которого $\phi_0(e) = \phi(e)$ при всех $e \in \mathscr{E}$, см. [11, гл. 5, § 6, предложение 1]. Как видно, ϕ нетривиален. $\square$

5.2. *Пусть $\mathbb{C}$ служит трансцендентным расширением поля $\mathbb{P}$. Тогда в $\mathbb{C}$ существует нетривиальное $\mathbb{P}$-дифференцирование.*

Доказательство. Воспользуемся вновь базисом трансцендентности $\mathscr{E}$ расширения $\mathbb{C}$ над $\mathbb{P}$. Известно, что любое дифференцирование поля $\mathbb{P}$ продолжается на чисто трансцендентное расширение, причем такое продолжение однозначно определяется заданием произвольных значений на базисе трансцендентности, см. [11, гл. V, § 9, предложение 4]. Таким образом, для любого отображения $d : \mathscr{E} \to \mathbb{C}$ существует единственное дифференцирование $D : \mathbb{P}(\mathscr{E}) \to \mathbb{C}$, для которого $D(e) = d(e)$ при всех $e \in \mathscr{E}$ и $D(x) = 0$ при $x \in \mathbb{P}$. Далее, $\mathbb{C}$ служит сепарабельным алгебраическим расширением поля $\mathbb{P}(\mathscr{E})$, следовательно, D допускает, и притом единственное, продолжение до дифференцирования $\overline{D} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, см. [11, гл. V, § 9, предложение 5]. Очевидно, что свобода в выборе d гарантирует нетривиальность $\overline{D}$. $\square$

5.3. Такими же рассуждениями, как и выше, можно показать, что для поля вещественных чисел справедливы аналоги утверждений 4.1 и 5.2. Точнее, справедливы утверждения: (a) $[\![$ поле $\mathbb{R}^\wedge$ алгебраически замкнуто в $\mathscr{R}$ $]\!] = \mathbf{1}$; (b) если $\mathbb{R}$ — трансцендентное расширение поля $\mathbb{P}$, то в $\mathbb{R}$ существует нетривиальное $\mathbb{P}$-дифференцирование.

Однако для поля вещественных чисел утверждение 5.1 не имеет места: в $\mathbb{R}$ нет нетривиальных автоморфизмов. Это связано с тем, что $\mathbb{R}$ не является алгебраически замкнутым полем.

5.4. *Пусть $D \in L(E_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{C}})$ и $D = D_1 + iD_2$. Оператор D будет комплексным дифференцированием в том и только в том случае, если D_1 и D_2 представляют собой вещественные дифференцирования из E в G.*

Доказательство. Нужно лишь в равенстве $D(uv) = D(u)v + uD(v)$ подставить $D := D_1 + iD_2$, вещественные $u := x \in E$ и $v := y \in E$, а затем приравнять вещественные и мнимые части полученного соотношения. $\square$

5.5. *Если $E^{\perp\perp} = G$, то любое дифференцирование из $E_{\mathbb{C}}$ в $G_{\mathbb{C}}$ является нерасширяющим оператором.*

Доказательство. В силу 2.3 и 5.4 нужно лишь установить, что любое вещественное дифференцирование является нерасширяющим оператором. Пусть $D : E \to G$ — вещественное дифференцирование. Возьмем дизъюнктные $x, y \in E$. Так как в f-алгебре соотношение $x \perp y$ влечет $xy = 0$, имеем $0 = D(xy) = D(x)y + xD(y)$. Но элементы $D(x)y$ и $xD(y)$ также дизъюнктны по определению f-алгебры, поэтому $D(x)y = 0$ и $xD(y) = 0$. Отсюда в силу точности f-алгебры E получаем $D(x) \perp y$ и $x \perp D(y)$. Рассмотрим теперь дизъюнктные $x \in E$ и $g \in G$. По условию идеал I, порожденный множеством $\{x\}^{\perp}$ и точкой x, будет фундаментом в G, поэтому можем предположить, не ограничивая общности, что $g \in I$. В то же время $|g| \leq y$ для некоторого $y \in E_{+}$, следовательно, $D(x) \perp g$ в силу доказанного выше. $\square$

5.6. Пусть $\mathscr{D}(\mathscr{C}{\downarrow})$ — множество всех дифференцирований, а $\mathscr{M}_N(\mathscr{C}{\downarrow})$ — множество всех нерасширяющих автоморфизмов в f-алгебре $\mathscr{C}{\downarrow}$. Пусть $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C})$ и $\mathscr{M}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C})$ — элементы $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающие множества всех $\mathbb{C}^{\wedge}$-дифференцирований и всех $\mathbb{C}^{\wedge}$-автоморфизмов в $\mathscr{C}$. Как видно, $\mathscr{D}(\mathscr{C}{\downarrow})$ — модуль над кольцом $\mathscr{C}{\downarrow}$ и $[\![\, \mathscr{D}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C})$ — комплексное векторное пространство $]\!] = \mathbf{1}$.

Операции спуска и подъема осуществляют изоморфизм модулей $\mathscr{D}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C}){\downarrow}$ и $\mathscr{D}(\mathscr{C}{\downarrow})$, а также биекцию множеств $\mathscr{M}_{\mathbb{C}^{\wedge}}(\mathscr{C}){\downarrow}$ и $\mathscr{M}_N(\mathscr{C}{\downarrow})$.

Доказательство следует из 2.6. Нужно лишь заметить, что оператор $T \in \mathrm{End}_N(\mathscr{C}{\downarrow})$ будет дифференцированием (автоморфизмом) тогда и только тогда, когда $[\![\tau := T{\uparrow}$ — дифференцирование (автоморфизм) $]\!] = \mathbf{1}$. $\square$

5.7. *Порядково ограниченное дифференцирование и порядково ограниченный нерасширяющий автоморфизм расширенного f-кольца $G_{\mathbb{C}}$ тривиальны.*

Доказательство. Можно считать $G_{\mathbb{C}} = \mathscr{C}{\downarrow}$. Если T — дифференцирование (нерасширяющий автоморфизм) f-кольца $G_{\mathbb{C}}$, то $[\![\tau := T{\uparrow}$ — $\mathbb{C}^{\wedge}$-дифференцирование ($\mathbb{C}^{\wedge}$-автоморфизм) поля $\mathscr{C}\,]\!] = \mathbf{1}$. Более того, T порядково ограничен тогда и только тогда, когда $[\![\tau$ порядково ограничен в $\mathscr{C}\,]\!] = \mathbf{1}$. Однако в поле $\mathscr{C}$ любое порядково ограниченное $\mathbb{C}^{\wedge}$-дифференцирование является нулевым и любой порядково ограниченный $\mathbb{C}^{\wedge}$-автоморфизм тождествен. В первом случае $T = 0$, а во втором $T = I$. $\square$

Докажем теперь утверждение, завершающее доказательство основной теоремы 3.4.

5.8. *Если $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models \mathbb{C}^{\wedge} \neq \mathscr{C}$, то в комплексной расширенной f-алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{C}) = \mathscr{C}{\downarrow}$ существуют нетривиальное дифференцирование и нетривиальный нерасширяющий автоморфизм.*

Доказательство. Из условия $\mathbb{C}^{\wedge} \neq \mathscr{C}$ вытекает, что $\mathscr{C}$ служит трансцендентным расширением подполя $\mathbb{C}^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, см. 4.1. Согласно 5.1 и 5.2 существуют нетривиальное $\mathbb{C}^{\wedge}$-дифференцирование $\delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ и нетривиальный $\mathbb{C}^{\wedge}$-автоморфизм $\alpha : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$. Если $D := \delta{\downarrow}$ и $A := \alpha{\downarrow}$, то в соответствии с 5.6 D — нетривиальное дифференцирование, а A — нетривиальный нерасширяющий автоморфизм f-алгебры $\mathscr{C}{\downarrow}$. $\square$

6. Заключительные замечания

6.1. Такими же рассуждениями, как в 3.4 и 5.8, можно показать с учетом 5.3, что если $\mathbb{R}^{\wedge} \neq \mathscr{R}$, то в вещественной f-алгебре $\mathbb{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{R}{\downarrow}$ существуют нетривиальные дифференцирования. Таким образом, в вещественном расширенном K-пространстве с фиксированной структурой f-алгебры отсутствие нетривиальных дифференцирований равносильно σ-дистрибутивности его базы.

В то же время в f-алгебре $\mathscr{R}{\downarrow}$ нет нетривиальных нерасширяющих автоморфизмов.

6.2. Хорошо известно, что если Q — компакт, то в алгебре $C(Q, \mathbb{C})$ комплекснозначных непрерывных функций на Q нет нетривиальных дифференцирований, см., например, [15, гл. 19, теорема 21]. В то же время из 3.4 (1), (4) следует, что если компакт Q экстремален и булева алгебра его открыто-замкнутых множеств не является σ-дистрибутивной, то существует нетривиальное дифференцирование в алгебре $C_\infty(Q, \mathbb{C})$.

6.3. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, обладающее свойством прямой суммы, см. [2, 1.1.7, 1.1.8]. Пусть $L^0_{\mathbb{C}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство (классов эквивалентности) всех измеримых комплекснозначных функций, а $L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство существенно ограниченных измеримых комплекснозначных функций. Тогда пространство $L^\infty_{\mathbb{C}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ изоморфно некоторому $C(Q, \mathbb{C})$, следовательно, в нем нет нетривиальных дифференцирований. Если булева алгебра $B(\Omega, \Sigma, \mu)$ измеримых множеств по модулю множеств нулевой меры не является σ-дистрибутивной, то согласно 3.4 (4) в $L^0_{\mathbb{C}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ существуют нетривиальные дифференцирования. То же самое можно сказать и о пространствах вещественнозначных измеримых функций $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$.

6.4. Любые два базиса трансцендентности поля над его подполем имеют одно и то же кардинальное число, называемое *степенью трансцендентности*, см. [13, гл. II, теорема 25]. Пусть $\tau(\mathscr{C})$ — степень трансцендентности $\mathscr{C}$ над полем $\mathbb{C}^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Булевозначный кардинал $\tau(\mathscr{C})$ несет в себе информацию о связи булевой алгебры $\mathbb{B}$ и множества комплексных чисел $\mathbb{C}$. Булевозначный кардинал является перемешиванием стандартных кардиналов, т. е. имеет место представление $\tau(\mathscr{C}) = \operatorname{mix}_\xi b_\xi \alpha_\xi^{\wedge}$, где (b_ξ) — разбиение единицы в булевой алгебре $\mathbb{B}$, а (α_ξ) — некоторое семейство кардиналов. При этом для $\mathbb{B}_\xi := [\mathbf{0}, b_\xi]$ будет $\mathbb{V}^{(\mathbb{B}_\xi)} \models \tau(\mathscr{C}) = \alpha_\xi^{\wedge}$. В этой связи было бы интересно охарактеризовать полные булевы алгебры $\mathbb{B}$, для которых внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ выполняется $\tau(\mathscr{C}) = \alpha^{\wedge}$ для некоторого кардинала α.

6.5. Говорят, что *элементы $x, y \in G$ различны на проекторе $\pi \in \mathfrak{P}(G)$*, если для любого порядкового проектора $\rho \in \mathfrak{P}(G)$ равенство $\rho x = \rho y$ влечет $\pi\rho = 0$. Подмножество $\mathscr{E} \subset G$ назовем *локально линейно независимым,* если для произвольного ненулевого порядкового проектора π в G, любых попарно различных на π элементов $e_1, \dots, e_n \in \mathscr{E}$ и чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ из условия $\pi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0$ вытекает справедливость равенства $\lambda_k = 0$ для всех $k := 1, \dots, n$ [5].

Для множества $\mathscr{E} \subset G$ обозначим символом $\langle E \rangle$ множество элементов вида $e_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot e_k^{n_k}$, где $e_1, \dots, e_k \in \mathscr{E}$ и $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$. Множество $\mathscr{E} \subset G$ назовем *локально алгебраически независимым*, если $\langle E \rangle$ локально линейно независимо.

Возможно, это понятие, являющееся внешней расшифровкой внутреннего понятия алгебраической независимости (или трансцендентности), окажется полезным при изучении спусков полей [6, § 8.3] или общих регулярных колец [18].

6.6. Рассмотрим нерасширяющий оператор $S : \mathscr{C}{\downarrow} \to \mathscr{C}{\downarrow}$, удовлетворяющий экспоненциальному функциональному уравнению Коши $S(u+v) = S(u)S(v)$ для любых $u, v \in \mathscr{C}{\downarrow}$. Если, кроме того, S удовлетворяет условию $S(\lambda u) = S(u)^\lambda$ при любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $u \in \mathscr{C}{\downarrow}$, то будем говорить, что оператор S *экспоненциален*. Говорят, что S *порядково ограничен*, если S переводит порядково ограниченные множества в порядково ограниченные множества. Если σ — подъем S, то σ экспоненциален внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, поэтому в классе функций, ограниченных сверху на ненулевом интервале, либо $\sigma = 0$, либо $\sigma(x) = e^{cx}$ $(x \in \mathscr{C})$ для некоторого $c \in \mathscr{C}$ [15, гл. 5, теорема 5]. Отсюда выводится, что условия (1)–(6) теоремы 3.4 равносильны также следующему: *любой нерасширяющий экспоненциальный оператор в* $\mathbb{B}(\mathbb{C}) := \mathscr{C}{\downarrow}$ *порядково ограничен* (*и, следовательно, имеет вид* $S = 0$ *или* $S(x) = e^{cx}$ $(x \in \mathscr{C}{\downarrow})$ *при некотором* $c \in \mathscr{C}{\downarrow}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gutman A. E.* Locally one-dimensional K-spaces and σ-distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math. 1995. V. 5, N 2. P. 99–121.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
3. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Операторы, сохраняющие дизъюнктность // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248, № 5. С. 1033–1036.
4. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Операторы, сохраняющие дизъюнктность, их непрерывность и мультипликативное представление // Линейные операторы и их приложения / Межвузовский сб. науч. тр. Л.: ЛГПИ, 1981. С. 3–34.
5. *Кусраев А. Г.* О нерасширяющих операторах // Владикавк. мат. журн. 2004. Т. 6, № 3. С. 48–58.
6. *Кусраев А. Г. Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
7. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators. New York: Acad. Press, 1985.
8. *Schaefer H. H.* Banach lattices and positive operators. Berlin etc.: Springer-Verl., 1974.
9. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.
10. *Bell J. L.* Boolean-valued models and independence proofs in set theory. New York etc.: Clarendon Press, 1985.
11. *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. М.: Наука, 1965.
12. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976.
13. *Зарисский О., Самюэль П.* Коммутативная алгебра. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
14. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.
15. *Ацел Я., Домбр Ж.* Функциональные уравнения с несколькими переменными. М.: Физматлит, 2003.
16. *Gutman A. E.* Disjointness preserving operators // Vector lattices and integral operators (Ed. S. S. Kutateladze). Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1996. P. 361–454.
17. *Wickstead A. W.* Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces // Compositio Math. 1977. V. 35, N 3. P. 225–238.
18. *Goodearl K. R.* Von Neumann regular rings. London: Pitman, 1979.

Статья поступила 27 июня 2005 г.

Кусраев Анатолий Георгиевич
Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
kusraev@alanianet.ru