Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2006. Том 47, № 2

УДК 517.956

ИНВАРИАНТНЫЕ ТЕНЗОРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

О. В. Капцов

Аннотация: Рассматриваются тензоры с коэффициентами, принадлежащими коммутативной дифференциальной алгебре A. С помощью производной Ли вводится понятие тензора, инвариантного относительно дифференцирования на идеале алгебры A. Каждая система уравнений с частными производными порождает идеал в некоторой дифференциальной алгебре. Это позволяет изучать инвариантные тензоры на идеале, порожденном такой системой. В качестве примеров рассматриваются уравнения газовой динамики и магнитной гидродинамики.

Ключевые слова: интегральные инварианты, производная Ли, инвариантный тензор.

Введение

Первые примеры инвариантных тензоров были получены в середине девятнадцатого века, хотя само понятие тензора появилось позднее. Пуанкаре ввел термин «интегральный инвариант» в своей знаменитой работе по небесной механике [1]. Он разработал основы теории интегральных инвариантов и сумел эффективно их применить в исследовании устойчивости решений гамильтоновых уравнений. С тех пор интегральные инварианты традиционно используются в задачах механики [2, 3]. В то же время Э. Картан [4] указывал на важность их применения в гидродинамике и электродинамике.

Главные результаты в теории интегральных инвариантов были получены в начале двадцатого века. Некоторые ссылки на работы того времени можно найти в [4], современное изложение имеется в [3, 5]. Интегральные инварианты получаются из инвариантных дифференциальных форм [4]. Более общие объекты — тензоры, инвариантные относительно групп преобразований, — изучаются в дифференциальной геометрии [6]. Например, часто требуется найти метрические тензоры, инвариантные относительно заданной группы преобразований.

В настоящей работе на основе алгебраической конструкции вводятся тензоры, инвариантные относительно некоторого дифференцирования. Эта конструкция применяется к дифференциальным уравнениям с частными производными. В § 1 рассматриваются дифференциальная алгебра A, модуль дифференцирований этой алгебры, сопряженный к нему и тензорное произведение произвольного числа таких модулей. Тогда каждое дифференцирование алгебры A

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00130).

позволяет определить производную Ли от любого элемента тензорного произведения. В § 2 вводится основное понятие — тензора, инвариантного относительно дифференцирования на идеале алгебры A. Доказывается ряд утверждений об инвариантных тензорах и дифференциальных формах, среди которых алгебраический вариант теоремы Фридмана о сохранении линий и интенсивностей трубок векторного поля. В § 3 описанная конструкция применяется к уравнениям в частных производных. В качестве конкретных приложений рассмотрены уравнения газовой динамики и магнитной гидродинамики. Для этих систем приведены примеры инвариантных тензоров.

§ 1. Производные Ли

Пусть A — коммутативная ассоциативная алгебра с единицей над полем K нулевой характеристики. Модуль дифференцирований алгебры A обозначается через $\operatorname{Der} A$. Под дифференцированием понимается эндоморфизм D алгебры A, удовлетворяющий условию

$$D(ab) = aD(b) + bD(a) \quad \forall a, b \in A.$$

После введения умножения

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1, \quad D_1, D_2 \in \operatorname{Der} A,$$

на модуле $\operatorname{Der} A$ возникает структура алгебры Ли над K.

Множество линейных отображений из $\operatorname{Der} A$ в A представляет собой A-модуль. Этот модуль обозначается через $\operatorname{Der}^* A$ и называется *модулем линейных дифференциальных форм.* Значение линейной дифференциальной формы ω на элементе $D \in \operatorname{Der} A$ обозначается через $\langle \omega, D \rangle$.

Если $D_0 \in \operatorname{Der} A$, то производная Ли L_{D_0} на алгебре $\operatorname{Der} A$ определяется с помощью внутреннего дифференцирования

$$L_{D_0}(D) = [D_0, D].$$

Производная Ли от линейной дифференциальной формы $\omega \in \operatorname{Der}^* A$ задается выражением

$$\langle L_{D_0}\omega, D \rangle = D_0 \langle \omega, D \rangle - \langle \omega, [D_0, D] \rangle \quad \forall D \in \operatorname{Der} A. \tag{1.1}$$

Дифференциалом элемента $a \in A$ называется линейная дифференциальная форма $da \in \operatorname{Der}^* A$, действующая на элементы из $\operatorname{Der} A$ по формуле [7]

$$\langle da, D \rangle = Da \quad \forall D \in \operatorname{Der} A.$$

Производная Ли перестановочна с действием дифференциала, т. е. для любых $a \in A$ и $D_0, D \in \operatorname{Der} A$ имеет место соотношение

$$\langle L_{D_0} da, D \rangle = \langle dD_0 a, D \rangle.$$

Данное соотношение справедливо в силу следующих равенств:

$$\langle L_{D_0} da, D \rangle = D_0 \langle da, D \rangle - \langle da, [D_0, D] \rangle = D_0 Da - [D_0, D]a = DD_0 a = \langle dD_0 a, D \rangle.$$

Обозначим через Ten^p_q тензорное произведение p модулей $\operatorname{Der} A$ и q модулей $\operatorname{Der}^* A$.

Определение. Пусть $D_0 \in \operatorname{Der} A$. *Производной Ли от тензора*

$$T = D_1 \otimes D_2 \otimes \cdots \otimes D_p \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_q$$

называется тензор

$$L_{D_0}T = \sum_{i=1}^{p} D_1 \otimes \cdots \otimes L_{D_0}(D_i) \otimes \cdots \otimes D_p \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_q$$
$$+ \sum_{j=1}^{q} D_1 \otimes \cdots \otimes D_p \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes L_{D_0}(\omega_j) \otimes \cdots \otimes \omega_q. \quad (1.2)$$

Предположим теперь, что в A-модуле $\operatorname{Der} A$ имеется n коммутирующих линейно независимых дифференцирований $D_1, \dots, D_n$. Подмодуль A-модуля $\operatorname{Der} A$, порожденный этими дифференцированиями, обозначим через $\operatorname{Der}_n A$.

Если $D_1, D_2 \in \operatorname{Der}_n A$, то

$$D_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i D_i,\ D_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i D_i,\ a_i, b_i \in A, \quad [D_1, D_2] = \sum_{i=1}^{n} (D_1(b_i) - D_2(a_i)) D_i. \quad (1.3)$$

Поэтому A-модуль $\operatorname{Der}_n A$ можно рассматривать как алгебру Ли над полем K.

Обозначим через $\operatorname{Der}_n^* A$ модуль, двойственный с $\operatorname{Der}_n A$. Согласно [7] в $\operatorname{Der}_n^* A$ существует базис линейных дифференциальных форм $d_1, \dots, d_n$ такой, что

$$\langle d_i, D_j \rangle = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Кроме того, для дифференциала da верно равенство

$$\langle da, D \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle D_i(a) d_i, D \rangle \quad \forall D \in \operatorname{Der}_n A.$$

Лемма 1. *Пусть $D_0 \in \operatorname{Der}_n A$ имеет вид $D_0 = \sum_{i=1}^{n} b_i D_i$. Тогда справедливы формулы*

$$\langle L_{D_0} d_i, D \rangle = \langle db_i, D \rangle = \sum_{j=1}^{n} D_j(b_i) \langle d_j, D \rangle, \quad (1.4)$$

$$L_{D_0}(D_j) = -\sum_{i=1}^{n} D_j(b_i) D_i. \quad (1.5)$$

Доказательство. Возьмем произвольное дифференцирование

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_j D_j \in \operatorname{Der}_n A.$$

Тогда формула (1.4) получается из цепочки равенств:

$$\langle L_{D_0} d_i, D \rangle = D_0 \langle d_i, D \rangle - \langle d_i, [D_0, D] \rangle = D_0 \left\langle d_i, \sum_{j=1}^{n} a_j D_j \right\rangle$$
$$- \left\langle d_i, \sum_{j=1}^{n} (D_0(a_j) - D(b_j)) D_j \right\rangle = D_0(a_i) - (D_0(a_i) - D(b_i)) = D(b_i) = \langle db_i, D \rangle.$$

Соотношение (1.5) следует из (1.3).

Обозначим через $\operatorname{Ten}_n^{(p,q)}$ тензорное произведение p модулей $\operatorname{Der}_n A$ и q модулей $\operatorname{Der}_n^* A$.

Любой элемент из $\mathrm{Ten}_n^{(p,q)}$ представляется в виде суммы тензоров вида

$$t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} D_{i_1}\otimes\cdots\otimes D_{i_p}\otimes d_{j_1}\otimes\cdots\otimes d_{j_q},$$

при этом $t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}\in A$ называются *коэффициентами тензора.* Тензоры

$$D_{i_1}\otimes\cdots\otimes D_{i_p}\otimes d_{j_1}\otimes\cdots\otimes d_{j_q}$$

составляют базис модуля $\mathrm{Ten}_n^{(p,q)}$.

Лемма 1 позволяет находить производную Ли от любого тензора из $\mathrm{Ten}_n^{(p,q)}$.

Если рассматривать антисимметричные тензоры из $\mathrm{Ten}_n^{(0,q)}$, то получим дифференциальные формы степени q, которые записываются в виде

$$\sum a_{j_1\dots j_q}\, d_{j_1}\wedge\cdots\wedge d_{j_q},\quad a_{j_1\dots j_q}\in A.$$

Производная Ли L_{D_0} от дифференциальных форм удовлетворяет обычным свойствам [5]:

$$L_{D_0}(\alpha\wedge\omega)=L_{D_0}(\alpha)\wedge\omega+\alpha\wedge L_{D_0}\omega,\quad L_{D_0}d\omega=dL_{D_0}\omega,$$

где α, ω — произвольные дифференциальные формы, а d — внешний дифференциал. Кроме того, для произвольных $D_0, D_1\in\mathrm{Der}_n A$ справедливо равенство [5]

$$L_{[D_0,D_1]}=[L_{D_0},L_{D_1}]. \tag{1.6}$$

§ 2. Инвариантные тензоры

В этом параграфе вводятся инвариантные тензоры и изучаются их свойства. Всюду в дальнейшем I обозначает некоторый идеал алгебры A. Если все коэффициенты тензора $T\in\mathrm{Ten}_n^{(p,q)}$ принадлежат идеалу I, то мы будем писать $T\equiv 0$.

Идеал I называется *устойчивым относительно* $D\in\mathrm{Der}\,A$, если $D(I)\subset I$. Если идеал устойчив относительно любого $D\in\mathrm{Der}_n A$, то он называется *дифференциальным идеалом* [8].

Лемма 2. *Пусть идеал I устойчив относительно $D\in\mathrm{Der}_n A$. Если тензор $T\in\mathrm{Ten}_n^{(p,q)}$ такой, что $T\equiv 0$, то*

$$L_DT\equiv 0,\quad T\otimes T_1\equiv 0$$

для любого тензора $T_1\in\mathrm{Ten}_n^{(S,\tau)}$.

Доказательство. Разложим тензор T по базису $\{T_k\}$ модуля $\mathrm{Ten}_n^{(p,q)}$:

$$T=\sum_{k=1}^N a_kT_k,$$

где $a_k\in I$. Тогда из определения производной Ли получим

$$L_DT=\sum_{k=1}^N D(a_k)T_k+\sum_{k=1}^N a_kL_D(T_k).$$

Поскольку I — устойчивый идеал, то $D(a_k)\in I$. Значит, верно равенство $L_DT\equiv 0$. Второе свойство следует из того, что коэффициенты тензора T принадлежат идеалу.

Определение. Тензор $T \in \mathrm{Ten}_n^{(p,q)}$ называется *инвариантным относительно дифференцирования* $D \in \mathrm{Der}_n\, A$ *на идеале* I, если $L_D T \equiv 0$.

Можно обобщить приведенное определение следующим образом.

Определение. Тензор $T \in \mathrm{Ten}_n^{(p,q)}$ называется *инвариантным относительно подалгебры Ли* $M \subset \mathrm{Der}_n\, A$ *на идеале* I, если $L_D T \equiv 0\ \forall D \in M$.

Очевидно, тензорное произведение инвариантных тензоров — инвариантный тензор.

В дальнейшем внешний дифференциал будет обозначаться через d.

Определение. Дифференциальная форма ω называется *d-инвариантной* относительно $D \in \mathrm{Der}_n\, A$ на I, если $L_D d\omega \equiv 0$.

Лемма 3. *Пусть α и ω — дифференциальные формы, а I — дифференциальный идеал. Предположим, что α является d-инвариантной относительно $D \in \mathrm{Der}_n\, A$ на I, а ω — замкнутой и инвариантной относительно D на I. Тогда их внешнее произведение является d-инвариантной формой на I.*

Доказательство непосредственно получается из условий леммы:

$$L_D d(\alpha \wedge \omega) = dL_D(\alpha \wedge \omega) \equiv d(L_D\alpha \wedge \omega) \equiv dL_D\alpha \equiv 0.$$

Лемма 4. *Пусть I — дифференциальный идеал, а $D_0, D_1 \in \mathrm{Der}_n\, A$ коммутируют на I, т. е.*

$$[D_0, D_1] \equiv 0. \tag{2.1}$$

Если тензор $T \in \mathrm{Ten}_n^{(p,q)}$ инвариантен относительно D_0 на I, то тензор $T_1 = L_{D_1}T$ также инвариантен.

Доказательство. Поскольку I — дифференциальный идеал, из условия (2.1) следует, что

$$L_{[D_0,D_1]}T \equiv 0.$$

Тогда согласно (1.6) получим

$$L_{D_0}L_{D_1}T - L_{D_1}L_{D_0}T \equiv 0.$$

По условию леммы $L_{D_0}T \equiv 0$, значит,

$$L_{D_0}T_1 = L_{D_0}L_{D_1}T \equiv 0.$$

Из этой леммы вытекает, что производная Ли L_{D_1} переводит инвариантные тензоры в инвариантные.

Следующая лемма является обобщением теоремы о двух последних множителях в теории обыкновенных дифференциальных уравнений [4].

Лемма 5. *Пусть $\alpha = ad_1 \wedge \dots \wedge d_n$ и $\omega = bd_1 \wedge \dots d_n$ — дифференциальные формы, инвариантные относительно $D \in \mathrm{Der}_n\, A$ на I. Если $b^{-1} \in A$, то элемент a/b инвариантен относительно D на I.*

Доказательство. Дифференцирование D представляется в виде

$$D = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_i, \quad \lambda_i \in A.$$

Из инвариантности форм α и ω следуют соотношения

$$D(a) + a\sum_{i=1}^{n} D_i(\lambda_i) \equiv 0, \quad D(b) + b\sum_{i=1}^{n} D_i(\lambda_i) \equiv 0.$$

Тогда имеют место формулы

$$D(a/b) = (aD(b) - bD(a))/b^2 \equiv -ab\left(\sum_{i=1}^{n} D_i(\lambda_i)\right) + ab\left(\sum_{i=1}^{n} D_i(\lambda_i)\right)/b^2 \equiv 0.$$

Лемма 6. *Пусть задано дифференцирование*
$$D_B = \sum_{i=1}^{n} b_i D_i, \quad b_i \in A, \tag{2.2}$$
алгебры A. *Дифференциальная форма*
$$\omega_{n-1} = a_1 d_2 \wedge \cdots \wedge d_n - a_2 d_1 \wedge d_3 \wedge \cdots \wedge d_n + \cdots + (-1)^{n-1} a_n d_1 \wedge \cdots \wedge d_{n-1} \tag{2.3}$$
степени $n-1$ *инвариантна относительно* D_B *на идеале* I *тогда и только тогда, когда дифференцирования* D_B *и*
$$D_A = \sum_{i=1}^{n} a_i D_i \tag{2.4}$$
удовлетворяют соотношению
$$[D_B, D_A] + \sum_{i=1}^{n} D_i(b_i) D_A \equiv 0. \tag{2.5}$$

Доказательство. По условию леммы $L_{D_B}\omega_{n-1} \equiv 0$. Следовательно, все коэффициенты дифференциальной формы, стоящей в левой части последнего соотношения, должны принадлежать идеалу I. Нетрудно видеть, что коэффициент m_j при $d_1 \wedge d_2 \wedge \cdots \wedge d_{j-1} \wedge d_{j+1} \wedge \cdots \wedge d_n$ имеет вид
$$m_j = D_B(a_j) - D_A(b_j) + \sum_{i=1}^{n} D_i(b_i) a_j.$$
Очевидно, совокупность равенств $m_j \equiv 0$ равносильна условию (2.5).

Эта лемма является обобщением соответствующего результата из [9].

Лемма 7. *Предположим, что формы* (2.3) *и*
$$\omega_n = \rho d_1 \wedge \cdots \wedge d_n, \quad \rho^{-1} \in A, \tag{2.6}$$
инвариантны относительно (2.2) *на* I. *Тогда*

1) *дифференцирования* D_B *и* D_A, *заданные с помощью* (2.2), (2.4), *удовлетворяют равенству*
$$[D_B, \rho^{-1} D_A] \equiv 0; \tag{2.7}$$

2) *если идеал* I *устойчив относительно* D_B *и существует элемент* $f \in A$ *такой, что* $D_A f \equiv 0$, *то* $D_A D_B f \equiv 0$.

Доказательство. Поскольку ω_n инвариантна относительно (2.2), то выполняются соотношение
$$\sum_{i=1}^{n} D_i(\rho b_i) \equiv 0$$
и вытекающее из него соотношение
$$D_B(\rho^{-1}) \equiv \rho^{-1} \sum_{i=1}^{n} D_i(b_i).$$
Используя (2.5), получаем цепочку равенств
$$[D_B, \rho^{-1} D_A] = D_B(\rho^{-1}) D_A + \rho^{-1}[D_B, D_A] \equiv D_B(\rho^{-1}) D_A - \rho^{-1} \sum_{i=1}^{n} D_i(b_i) D_A \equiv 0.$$
Применяя (2.5) к элементу f, приходим ко второму утверждению.

Замечание. Инвариантность формы (2.6) не требуется для доказательства второго утверждения леммы 7.

Следствие. *Предположим, что дифференциальная форма (2.6) и элементы $f_1, \dots, f_{n-1} \in A$ инвариантны относительно (2.2) на I. Тогда дифференцирование D, записанное в виде формального определителя*

$$D = \rho^{-1} \begin{vmatrix} D_1 & \dots & D_1 \\ D_1 f_1 & \dots & D_n f_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_{n-1} & \dots & D_n f_{n-1} \end{vmatrix},$$

коммутирует с D_B на I.

Доказательство. По условию $f_1, \dots, f_{n-1}$ инвариантны. Значит, формы $df_1, \dots, df_{n-1}$ и $\Omega_{n-1} = df_1 \wedge \dots \wedge df_{n-1}$ также являются инвариантными. Форма Ω_{n-1} представляется в виде суммы форм вида

$$\begin{vmatrix} D_1 f_1 & \dots & D_{i-1} f_1 & D_{i+1} f_1 & \dots & D_n f_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_{n-1} & \dots & D_{i-1} f_{n-1} & D_{i+1} f_{n-1} & \dots & D_n f_{n-1} \end{vmatrix} d_1 \wedge \dots \wedge d_{i-1} \wedge d_{i+1} \wedge \dots \wedge d_n.$$

Для завершения доказательства остается воспользоваться леммой 7.

Лемма 8. *Предположим, что дифференцирование D_b имеет вид*

$$D_b = D_1 + \sum_{i=2}^{n} b_i D_i, \tag{2.8}$$

а ω_{n-3} — произвольная дифференциальная форма степени $n-3$. Если дифференциальная форма

$$\omega_{n-2} = a_2 d_3 \wedge \dots \wedge d_n - a_3 d_2 \wedge d_4 \wedge \dots \wedge d_n + \dots + (-1)^n a_n d_2 \wedge \dots \wedge d_{n-2} + d_1 \wedge \omega_{n-3} \tag{2.9}$$

инвариантна относительно D_b на идеале I, то

$$D_a = \sum_{i=2}^{n} a_i D_i \tag{2.10}$$

удовлетворяет соотношению

$$[D_b, D_a] + \sum_{i=2}^{n} D_i(b_i) D_a \equiv 0. \tag{2.11}$$

Доказательство фактически такое же, как в лемме 6. Достаточно найти слагаемые в форме $L_{D_b}\omega_{n-2}$, не содержащие d_1, и приравнять их к нулю. Это и даст соотношение (2.11).

Замечание. Если выполняется соотношение (2.11), то можно построить форму Ψ вида (2.9), инвариантную относительно D_b. Эта форма получается из формы

$$\Phi(d_2, \dots, d_n) = a_2 d_3 \wedge \dots \wedge d_n - \dots + (-1)^n a_n d_2 \wedge \dots \wedge d_{n-2}$$

с помощью «сдвига»

$$\Psi = \Phi(d_2 - b_2 d_1, \dots, d_n - b_n d_1).$$

Лемма 9. *Пусть α_{n-2} — дифференциальная форма степени $n-2$. Предположим, что формы (2.9) и*

$$\omega_{n-1} = \rho d_2 \wedge \dots \wedge d_n + d_1 \wedge \alpha_{n-2}, \quad \rho^{-1} \in A, \tag{2.12}$$

инвариантны относительно (2.8) на I. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $[D_b, \rho^{-1} D_a] \equiv 0$, *где D_a задано с помощью (2.10);*

2) *если найдется $f \in A$ такой, что $D_a f \equiv 0$ и идеал I устойчив относительно D_b, то $D_a D_b f \equiv 0$.*

Доказательство фактически повторяет рассуждения доказательства леммы 7.

Следствие. *Предположим, что форма (2.12) и элементы $f_1, \dots, f_{n-2} \in A$ инвариантны относительно (2.8) на I. Тогда дифференцирование D, записанное в виде формального определителя*

$$D = \rho^{-1} \begin{vmatrix} D_2 & \dots & D_n \\ D_2 f_1 & \dots & D_n f_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ D_2 f_{n-2} & \dots & D_n f_{n-2} \end{vmatrix},$$

коммутирует с D_b на I.

Лемму 9 и ее следствие можно использовать для построения дифференцирований, переводящих одни инвариантные тензоры в другие.

Из лемм 8 и 9, в частности, легко выводится теорема Фридмана [10] о сохранении линий и интенсивностей трубок векторного поля. Для полноты изложения приведем эту теорему в терминах интегральных инвариантов.

Теорема. *Пусть имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx}{dt} = u(t, x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = v(t, x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = w(t, x, y, z) \tag{2.13}$$

с непрерывно дифференцируемыми правыми частями. Тогда следующие условия равносильны:

а) *интеграл*

$$J = \int_S P\, dy \wedge\, dz + Q\, dz \wedge\, dx + R\, dx \wedge\, dy, \tag{2.14}$$

где S — гладкая ориентированная поверхность, а P, Q, R — непрерывно дифференцируемые функции переменных t, x, y, z, является абсолютным интегральным инвариантом (в смысле Пуанкаре [1]) *системы (2.13);*

б) *векторные поля*

$$X = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z, \quad A = P\partial_x + Q\partial_y + R\partial_z$$

удовлетворяют условию

$$[A, X] + (u_x + v_y + w_z)A = 0. \tag{2.15}$$

Кроме того, при выполнении этих условий интегральные кривые поля A переходят в интегральные кривые под действием преобразования, порожденного векторным полем X.

В [4] показано, что если имеется абсолютный интегральный инвариант, то с помощью «сдвига», описанного выше, можно получить инвариантную дифференциальную форму.

Интеграл (2.14) часто называют *потоком векторного поля* A, а про само поле A говорят, что оно «вморожено». Из условия (2.15) следует, что X является симметрией векторного поля A. Это приводит к «вмороженности» поля A. Классическими примерами «вмороженных» полей являются вихрь в идеальной газовой динамике (при условии постоянства энтропии) и магнитное поле в магнитной гидродинамике.

Многомерный аналог теоремы Фридмана получается, если рассматривается система из n обыкновенных дифференциальных уравнений, а интеграл берется от формы типа (2.9) при $\omega_{n-3} = 0$. Иное обобщение теоремы Фридмана предложено в [3].

§ 3. Применение к дифференциальным уравнениям

Для того чтобы применить описанную выше конструкцию к уравнениям с частными производными, нужно задать алгебру A, модуль $\mathrm{Der}_n A$ и дифференциальный идеал I.

В простейшем случае в качестве A можно взять алгебру $R[u]$ дифференциальных многочленов [8] над полем R. Каждый многочлен из $R[u]$ зависит от конечного числа коммутирующих переменных из счетного набора символов $x_1, \dots, x_n, u^1, \dots, u^k, \dots, u^k_\alpha, \dots$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le m$. Базисные дифференцирования $D_1, \dots, D_n$, определяющие $\mathrm{Der}_n A$, действуют на переменные следующим образом:

$$D_i x_j = \delta_{ij}, \quad D_i u^k = u^k_{1_i}, \quad D_i u^k_\alpha = u^k_{\alpha+1_i},$$

здесь δ_{ij} — символ Кронекера, 1_i — мультииндекс, у которого i-я компонента равна 1, а остальные нулевые. Дифференциальный идеал I порождается конечным числом многочленов $P_1, \dots, P_r \in R[u]$. Он образован элементами из $R[u]$, каждый из которых представляется конечной суммой слагаемых $a^i_\alpha D^\alpha P_s$, где $a^i_\alpha \in A$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $s = 1, \dots, r$. Часто вместо кольца дифференциальных многочленов $R[u]$ приходится рассматривать более широкие алгебры A. В дальнейшем это будет делаться без оговорок.

Система уравнений с частными производными

$$F^1 = 0, \dots, F^m = 0$$

порождает дифференциальный идеал I с помощью элементов $F^1, \dots, F^m$. Возникает важный вопрос о том, относительно каких дифференцирований $D \in \mathrm{Der}_n A$ следует искать инвариантные тензоры. Для систем уравнений, имеющих вещественные характеристики, в качестве D можно брать операторы дифференцирования вдоль этих характеристик.

Пусть, например, задана система уравнений первого порядка:

$$F^1(x, u, u_x) = 0, \dots, F^m(x, u, u_x) = 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u = (u^1, \dots, u^m)$, u_x — набор частных производных первого порядка. Рассмотрим характеристическую форму [11]

$$Q(\xi) = \det\left(\frac{\partial(F)}{\partial(u_{x_1})}\xi_1 + \dots + \frac{\partial(F)}{\partial(u_{x_n})}\xi_n\right),$$

где $\frac{\partial(F)}{\partial(u_{x_i})} = \frac{\partial(F^1,\dots,F^m)}{\partial(u^1_{x_i},\dots,u^m_{x_i})}$ — матрица Якоби, $\xi_i \in \mathbb{R}$.

Если форма $Q(\xi)$ делится на линейный множитель $\lambda_1\xi_1 + \cdots + \lambda_n\xi_n$, $\lambda_i \in A$, то оператор

$$D = \lambda_1 D_{x_1} + \cdots + \lambda_n D_{x_n}$$

называется *оператором дифференцирования вдоль характеристики*. Здесь и в дальнейшем D_{x_i} — оператор полного дифференцирования по x_i. Можно определить оператор дифференцирования вдоль характеристик для уравнений выше первого порядка.

В качестве первого примера рассмотрим нестационарные уравнения газовой динамики в одномерном случае [12]:

$$\rho(u_t + uu_x) + p_x = 0, \quad \rho_t + (u\rho)_x = 0, \quad p_t + up_x + \rho c^2 u_x = 0, \tag{3.1}$$

где u, ρ, p — скорость, плотность и давление, а c — скорость звука, являющаяся функцией от p, ρ.

Найдем инвариантные дифференциальные формы первой степени:

$$\omega = a\,dx + b\,dt,$$

где a и b — функции от t, x, u, p, ρ. Для системы (3.1) существуют три оператора дифференцирования вдоль характеристик:

$$D_1 = D_t + uD_x, \quad D_{2,3} = D_t + (u \pm c)D_x,$$

где D_t, D_x — полные производные по t и x.

Действуя оператором D_1 на ω, получаем два уравнения

$$D_t a + D_x(ua) \equiv 0, \tag{3.2}$$

$$D_t b + uD_x b + au_t \equiv 0.$$

Легко видеть, что если a — решение первого уравнения, то $b = -ua$ удовлетворяет второму. Очевидно, $a = \rho$ удовлетворяет (3.2). Другие решения получаются умножением ρ на произвольную функцию от энтропии.

Действуя оператором D_2 на ω, приходим к уравнениям

$$D_t a + D_x((u + c)a) \equiv 0, \tag{3.3}$$

$$D_t b + (u + c)D_x b + aD_t(u + c) \equiv 0.$$

Если решение уравнения (3.3) найдено, то $b = -(u + c)a$ является решением последнего уравнения.

Будем искать решения уравнения (3.3). Поскольку функция a по предположению может зависеть только от t, x, u, p, ρ, а уравнение (3.3) содержит производные, то, вычисляя коэффициенты в левой части (3.3) при u_x, p_x, ρ_x, приходим к трем уравнениям

$$ca_u - \rho a_\rho - a_p \rho c^2 + a = 0, \tag{3.4}$$

$$a_u - \rho(ac)_p = 0, \quad (ca)_\rho = 0. \tag{3.5}$$

Слагаемые, не содержащие производных в (3.3), дают еще одно уравнение

$$a_t + (u + c)a_x = 0. \tag{3.6}$$

Для того чтобы найти решение системы (3.4)–(3.6), нужно сначала исследовать ее на совместность. Из уравнений (3.4), (3.5) получаем следующее условие совместности:

$$\rho c^2 c_p + \rho c_\rho + c = 0. \tag{3.7}$$

Решение уравнения (3.7) задается в неявной форме

$$\Phi(c\rho, p + c^2\rho) = 0.$$

Поскольку функция c задана в неявной форме, уравнения (3.4), (3.5) удобно решать, задавая конкретный ее вид.

Например, если взять $c = \sqrt{(1-p)/\rho}$, то функция a будет иметь вид $a = k/c$, $k \in R$. Если же $c = \sqrt{p/(\rho^2 - \rho)}$, то $a = k\sqrt{\rho/(p(\rho-1))}$.

Заметим, что каждая найденная функция a приводит к закону сохранения уравнений газовой динамики.

Рассмотрим теперь трехмерные нестационарные уравнения газовой динамики [12]:

$$\begin{gathered} \rho_t + \operatorname{div}(u\rho) = 0, \\ \rho(u_t + (u \cdot \nabla)u) + \nabla p = 0, \\ s_t + (u \cdot \nabla)s = 0, \end{gathered} \tag{3.8}$$

где ρ, p, s — плотность, давление и энтропия, $u = (u^1, u^2, u^3)$ — вектор скорости. Предполагается, что p зависит от ρ и s. Оператор дифференцирования вдоль характеристики имеет вид

$$\mathbf{D} = D_t + u^1 D_x + u^2 D_y + u^3 D_z, \tag{3.9}$$

где D_t, D_x, D_y, D_z — полные производные по t, x, y, z соответственно. Идеал, порожденный системой (3.8), обозначим через I_G.

Энтропия s и интеграл Эртеля $E = (\nabla s, \operatorname{rot} u)/\rho$ являются инвариантными относительно (3.9) на идеале I_G. Принято говорить, что s и E *постоянны вдоль траекторий.* Инвариантность дифференциальной формы

$$\rho(dx - u^1 dt) \wedge (dy - u^2 dt) \wedge (dz - u^3 dt) \tag{3.10}$$

равносильна уравнению неразрывности. Если форму (3.10) умножить на функцию $f(s, E)$, то снова получится инвариантная форма. Отсюда следует, что уравнения газовой динамики обладают бесконечным числом законов сохранения.

Согласно следствию леммы 9 дифференцирование

$$X = \rho^{-1} \begin{vmatrix} D_x & D_y & D_z \\ s_x & s_y & s_z \\ D_x(E) & D_y(E) & D_z(E) \end{vmatrix}$$

инвариантно относительно (3.9) на I_G, т. е. $[\mathbf{D}, X] \equiv 0$. Значит, интегральные кривые векторного поля

$$W = \left(\begin{vmatrix} s_y & s_z \\ D_y(E) & D_z(E) \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} s_x & s_z \\ D_x(E) & D_z(E) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} s_x & s_y \\ D_x(E) & D_y(E) \end{vmatrix} \right)$$

переходят в интегральные кривые под действием потока, порожденного вектором скорости.

Если движение газа является баротропным, то оператор

$$Y = \rho^{-1}(\omega_1 D_x + \omega_2 D_y + \omega_3 D_z)$$

коммутирует с $\mathbf{D}$ на I_G. Здесь ω_i — компоненты вихря $\omega = \operatorname{rot} u$. Коммутативность этих операторов эквивалентна известной формуле, задающей перенос завихренности [12]. Кроме того, как следует из [4], дифференциальная форма вихря

$$\Omega = \omega_1(dy-u^2dt)\wedge(dz-u^3dt)+\omega_2(dz-u^3dt)\wedge(dx-u^1dt)+\omega_3(dx-u^1dt)\wedge(dy-u^2dt)$$

является инвариантной относительно $\mathbf{D}$ на I_G, а форма «импульса-энергии» [4]

$$\alpha = u^1dx + u^2dy + u^3dz - \left(\frac{|u|^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho}\right) dt$$

d-инвариантна. Дифференциальная форма $\alpha \wedge \Omega$ приводит к закону сохранения спиральности (теорема Маро [3]).

Кратко коснемся трехмерных уравнений идеальной магнитной гидродинамики [13]:

$$\begin{gathered}\rho_t + \operatorname{div}(u\rho) = 0, \quad s_t + (u\cdot\nabla)s = 0,\\ \rho(u_t + (u\cdot\nabla)u) + \nabla\rho + B\times\operatorname{rot} B = 0,\\ B_t = \operatorname{rot}(u\times B), \quad \operatorname{div} B = 0.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Здесь $B = (B_1, B_2, B_3)$ — магнитное поле, остальные обозначения имеют такой же смысл, как и для системы (3.8). Идеал, порожденный системой (3.11), обозначим через I_M. Дифференциальная форма второй степени

$$\eta = B_1(dy-u^2dt)\wedge(dz-u^3dt)+B_2(dz-u^3dt)\wedge(dx-u^1dt)+B_3(dx-u^1dt)\wedge(dy-u^2dt)$$

инвариантна относительно $\mathbf{D}$ (3.9) на I_M. Значит, согласно лемме 7 дифференцирование [14]

$$Z = \rho^{-1}(B_1D_x + B_2D_y + B_3D_z)$$

коммутирует с $\mathbf{D}$ на I_M. Поэтому имеется бесконечная последовательность инвариантов [14]

$$I_1 = s, \quad I_{n+1} = Z(I_n).$$

Следовательно, с помощью следствия леммы 9 можно построить бесконечное число дифференцирований, коммутирующих с $\mathbf{D}$, и получить дополнительные инварианты.

Заключение

В работе рассмотрены инвариантные тензоры. Известные инвариантные формы давно нашли свое приложение в задачах механики и физики. Однако более общий взгляд представляется полезным. Использование языка дифференциальной алгебры удобно для изложения, так как с помощью него можно строго работать с понятиями, которые иногда рассматриваются неформально.

Например, в работе [14] утверждается, что дифференциальная форма

$$\rho^{-1}(B_1dx + B_2dy + B_3dz)$$

инвариантна относительно $\mathbf{D}$ в случае трехмерных уравнений магнитной гидродинамики. Неясно, в каком смысле понимать это утверждение.

Было бы интересно также рассмотреть обобщение инвариантных геометрических объектов [15], прежде всего дифференциальные операторы порядка выше первого. Коэффициенты этих операторов могут лежать в дифференциальном кольце. Кроме того, в работе совсем не затрагиваются инвариантные уравнения Пфаффа (см. [4]). Формализовать или обобщить такие построения не представляет труда, однако здесь нужны нетривиальные примеры.

В заключение хотелось бы отметить недавние интересные работы [16, 17] по теории трещин, в которых рассматриваются интегральные инварианты неклассического типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // Избранные труды. М.: Наука, 1972. С. 9–445.

2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.

3. *Козлов В. В.* Общая теория вихрей. Ижевск: РХД, 2000.

4. *Картан Э.* Интегральные инварианты. М.; Л.: Гостехиздат, 1940.

5. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.

6. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.

7. *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. М.: Наука, 1965.

8. *Kolchin E. A.* Differential algebra and algebraic groups. New York; London: Acad. Press, 1973.

9. *Goursat E.* Lecons sur le probleme de Pfaff. Paris: Herman, 1922.

10. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963.

11. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

12. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

13. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 2001.

14. *Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T., Weinstein A.* Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Phys. Reports. 1985. V. 123, N 1&2. P. 1–116.

15. *Кириллов А. А.* Лекции по методу орбит. Новосибирск: Научная книга, 2002.

16. *Соколовский Я., Хлуднев А. М.* О производной функционала энергии по длине трещины в задачах теории упругости // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, № 3. С. 467–475.

17. *Ковтуненко В. А.* Инвариантные интегралы энергии для нелинейной задачи о трещине с возможным контактом берегов // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, № 1. С. 109–123.

Статья поступила 26 июля 2004 г.

Капцов Олег Викторович
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, Красноярск 660036
`kaptsov@icm.krasn.ru`