Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2006. Том 47, № 2

УДК 510.53 + 512.563

СЛОЖНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ЕСТЕСТВЕННЫХ ПРОБЛЕМ НА КЛАССЕ ВЫЧИСЛИМЫХ I–АЛГЕБР

Н. Т. Когабаев

Аннотация: Изучаются вычислимые булевы алгебры с выделенными идеалами (кратко I-алгебры). Доказано, что проблема изоморфизма вычислимых I-алгебр является Σ_1^1-полной. Показано, что проблема вычислимого изоморфизма и проблема вычислимой категоричности вычислимых I-алгебр являются Σ_3^0-полными.

Ключевые слова: вычислимая булева алгебра с выделенными идеалами, вычислимый изоморфизм, вычислимо категоричная структура, арифметическая сложность, аналитическая сложность.

В работе изучаются вычислимые булевы алгебры с конечным числом выделенных идеалов. В дальнейшем, следуя сложившейся терминологии, такие структуры будем для краткости называть I-*алгебрами* и рассматривать их в сигнатуре

$$\sigma_\lambda = \langle \vee, \wedge, C, 0, 1, I_1, \dots, I_\lambda \rangle,$$

где $\vee$, $\wedge$, C, 0, 1 — символы стандартного языка булевых алгебр, $I_1, \dots, I_\lambda$ — символы унарных предикатов. Формальная теория I-алгебр порождается аксиомами булевых алгебр и предложениями, утверждающими, что $I_1, \dots, I_\lambda$ являются идеалами. Всюду далее натуральное число $\lambda \geq 1$ считается фиксированным.

В статье [1], основные сведения из которой излагаются в § 1, доказано существование универсальной вычислимой нумерации для класса всех I-алгебр. Наличие такой нумерации позволяет получать точные оценки арифметической или аналитической сложности алгоритмических проблем на классе I-алгебр. Настоящая статья посвящена нахождению некоторых из этих оценок. В § 2 доказывается Σ_1^1-полнота проблемы изоморфизма вычислимых I-алгебр, в § 3 — Σ_3^0-полнота проблемы вычислимого изоморфизма вычислимых I-алгебр. Наконец, в § 4 приводится доказательство Σ_3^0-полноты проблемы вычислимой категоричности вычислимых I-алгебр.

§ 1. Предварительные сведения

Обозначения и основные определения по теории вычислимых моделей, которые мы используем, являются общепринятыми и могут быть найдены в [2, 3]. Для получения точных оценок сложности алгоритмических проблем мы будем использовать метод порождающих бинарных деревьев для булевых алгебр. Определения бинарного дерева, вычислимых функций $L(n)$, $R(n)$, $H(n)$, $S(n)$

Исследования автора частично поддержаны Советом по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2112.2003.1), Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00819) и программой «Университеты России» (код проекта УР.04.01.198).

и вычислимого частичного порядка $\preccurlyeq$, заданного на вершинах бинарных деревьев, содержатся в [4, § 1.7].

Напомним (см. [1]), что подмножество K бинарного дерева D является *идеальным в* D, если выполняются следующие условия:

(а) $\forall n((n \neq 0 \mathbin{\&} n \in K \mathbin{\&} S(n) \in K) \Longrightarrow H(n) \in K)$,

(б) $\forall m \forall n((m \in K \mathbin{\&} n \in D \mathbin{\&} n \preccurlyeq m) \Longrightarrow n \in K)$.

Для данного $\lambda \geq 1$ введем конечную булеву алгебру $\mathfrak{X}$, состоящую из 2^λ элементов. Алгебра $\mathfrak{X}$ будет выполнять вспомогательные функции. Через $\sqsubseteq$ будем обозначать стандартный частичный порядок на $\mathfrak{X}$. Пусть $\varkappa = 2^\lambda$. Зафиксируем следующую нумерацию всех элементов $\mathfrak{X}$.

Положим $\xi_0 = 0^{\mathfrak{X}}$.

Пусть $1 \leq k \leq \lambda$, $m = C_\lambda^0 + \cdots + C_\lambda^{k-1} - 1$, где $C_\lambda^n = \frac{\lambda!}{(\lambda-n)!n!}$. Через $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_{m+C_\lambda^k}$ обозначим набор всех (заиндексированных в произвольном порядке) элементов алгебры $\mathfrak{X}$, представимых в виде объединения k штук различных атомов. (В частности, $\xi_1, \ldots, \xi_\lambda$ — это в точности все атомы алгебры $\mathfrak{X}$, а $\xi_{\varkappa-1} = 1^{\mathfrak{X}}$.)

В [1] было доказано существование одноместных вычислимых функций $\alpha_0, \ldots, \alpha_{\varkappa-1}$ таких, что для любого натурального n вычислимо перечислимые множества

$$L_0 = W_{\alpha_0(n)}, \ldots, L_{\varkappa-1} = W_{\alpha_{\varkappa-1}(n)}$$

удовлетворяют следующим условиям:

(1) $D = L_0 \cup \cdots \cup L_{\varkappa-1}$ — бинарное дерево, и $L_p \cap L_q = \varnothing$ $(p \neq q)$,

(2) для любого $s \in \{1, \ldots, \lambda\}$ множество

$$K_s = \bigcup \{L_k \mid \xi_k \sqsupseteq \xi_s,\ k \in \{1, \ldots, \varkappa - 1\}\}$$

является идеальным в D.

При этом имеет место следующее свойство: если $n = c^\varkappa(n_0, \ldots, n_{\varkappa-1})$, где $c^\varkappa$ — канторовская нумерация кортежей длины $\varkappa$, и для вычислимо перечислимых множеств $L_0 = W_{n_0}, \ldots, L_{\varkappa-1} = W_{n_{\varkappa-1}}$ выполняются условия (1) и (2), то $W_{n_0} = W_{\alpha_0(n)}, \ldots, W_{n_{\varkappa-1}} = W_{\alpha_{\varkappa-1}(n)}$.

В [1] описана эффективная конструкция, которая равномерно по набору произвольных вычислимо перечислимых множеств $L_0, \ldots, L_{\varkappa-1}$, удовлетворяющих условиям (1) и (2), порождает некоторую вычислимую I-алгебру $\mathfrak{B}_{L_0,\ldots,L_{\varkappa-1}}$ такую, что множество $D = L_0 \cup \cdots \cup L_{\varkappa-1}$ является порождающим бинарным деревом для $\mathfrak{B}_{L_0,\ldots,L_{\varkappa-1}}$, а выделенные идеалы данной I-алгебры естественным образом определяются идеальными множествами $K_1, \ldots, K_\lambda$, связанными с $L_0, \ldots, L_{\varkappa-1}$ условием (2).

Для каждого $n \in \omega$ обозначим $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{B}_{L_0,\ldots,L_{\varkappa-1}}$, где $L_0 = W_{\alpha_0(n)}, \ldots, L_{\varkappa-1} = W_{\alpha_{\varkappa-1}(n)}$. В [1] установлено, что определенная таким образом последовательность $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\omega}$ вычислимых I-алгебр является универсальной вычислимой нумерацией для класса всех I-алгебр. Мы будем оценивать сложность алгоритмических проблем относительно данной нумерации.

Зафиксируем следующие обозначения.

Для каждого $t \in \omega$ положим $a_t = 2^{t+2} - 3$, $b_t = 2^{t+2} - 2$. Последовательность вершин $(b_t)_{t\in\omega}$ образует (вместе с корнем) крайнюю правую ветвь полного бинарного дерева, а вершина a_t является соседней к b_t для каждого $t \in \omega$.

Для каждого $n \in \omega$ определим вычислимую функцию f_n по следующей рекурсивной схеме:

$$\begin{cases} f_n(0) = n, \\ f_n(L(x)) = L(f_n(x)), \\ f_n(R(x)) = R(f_n(x)). \end{cases}$$

Заметим, что функция f_n изоморфно отображает полное бинарное дерево в область $\{x \in \omega \mid x \preccurlyeq n\}$.

Будем писать $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, если структуры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны, и $\mathfrak{A} \cong_{\Delta^0_1} \mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ вычислимо изоморфны.

Через $\omega^{<\omega}$ будем обозначать дерево всех конечных последовательностей натуральных чисел. Для вершин $\tau, \sigma \in \omega^{<\omega}$ будем писать $\tau \subseteq \sigma$, если τ является предшественником σ в дереве $\omega^{<\omega}$.

Будем использовать одну и ту же запись $\langle m, n\rangle$ для обозначения упорядоченной пары натуральных чисел m, n и для обозначения ее канторовского номера.

§ 2. Проблема изоморфизма *I*-алгебр

Оценка сложности проблемы изоморфизма для определенного класса структур K имеет существенное значение при определении трудоемкости получения классификационных теорем для структур из K. Чем ниже уровень сложности данной проблемы, тем вероятнее наличие приемлемой классификационной теоремы в терминах относительно простых инвариантов. Так, например, проблема изоморфизма для таких классов, как векторные пространства над бесконечным вычислимым полем или алгебраически замкнутые поля фиксированной характеристики, имеет сложность в точности Π^0_3. С другой стороны, такие классы, как абелевы p-группы, деревья, булевы алгебры, линейные порядки, обладают максимально сложной проблемой изоморфизма, т. е. ее сложность в точности Σ^1_1 (см. [5]).

В теореме 1 мы докажем, что *проблема изоморфизма I-алгебр* является Σ^1_1-полной.

Теорема 1. *Множество $E = \{\langle m, n\rangle \mid m, n \in \omega, \mathfrak{A}_m \cong \mathfrak{A}_n\}$ является Σ^1_1-полным.*

Доказательство. Принадлежность множества E классу Σ^1_1 аналитической иерархии устанавливается непосредственно.

Докажем, что E является полным в классе Σ^1_1. В [5, теорема 4.4] определены Σ^1_1-полное множество A и две вычислимые последовательности $(S_n)_{n\in\omega}$, $(T_n)_{n\in\omega}$ бесконечных поддеревьев $\omega^{<\omega}$ такие, что выполняются следующие свойства.

(а) Деревья S_n и T_n являются ω-ветвящимися, т. е. любая неконцевая вершина в этих деревьях имеет бесконечно много непосредственных последователей.

(б) Для любого $n \in \omega$ дерево T_n содержит бесконечный путь и поддерево, изоморфное $\omega^{<\omega}$, т. е. дерево $\omega^{<\omega}$, вкладывается в T_n.

(в) Если $n \in A$, то $S_n \cong T_n$.

(г) Если $n \notin A$, то S_n не имеет бесконечных путей.

Стандартным образом равномерно по n определим строго вычислимую последовательность

$$\{\varnothing\} = S^0_n \subseteq S^1_n \subseteq \dots \subseteq S^t_n \subseteq \dots$$

конечных поддеревьев $\omega^{<\omega}$, для которых выполняются условия:

(д) $\bigcup\limits_{t\in\omega} S_n^t = S_n$;

(е) $|S_n^{t+1} \setminus S_n^t| = 1$;

(ж) если $\sigma \in S_n^{t+1} \setminus S_n^t$, то для любого $\tau \subseteq \sigma$, $\tau \neq \sigma$, выполняется $\tau \in S_n^t$.

Аналогично определяется последовательность

$$\{\varnothing\} = T_n^0 \subseteq T_n^1 \subseteq \dots \subseteq T_n^t \subseteq \dots$$

для дерева T_n.

Пусть теперь n — фиксированное натуральное число. Опишем равномерную по n процедуру построения двух перечислимых бинарных деревьев D и E. Будем по шагам определять последовательности

$$D^0 \subseteq D^1 \subseteq \dots \subseteq D^t \subseteq \dots, \quad E^0 \subseteq E^1 \subseteq \dots \subseteq E^t \subseteq \dots$$

конечных бинарных деревьев и отображения $\alpha^t : S_n^t \to D^t$, $\beta^t : T_n^t \to E^t$.

Шаг 0. Полагаем $D^0 = E^0 = \{0\}$, $\alpha^0(\varnothing) = \beta^0(\varnothing) = 0$.

Шаг $t+1$. Пусть $D^t, E^t, \alpha^t, \beta^t$ уже определены, и пусть $S_n^{t+1} \setminus S_n^t = \{\sigma\}$. Следовательно, можно представить $\sigma = \tau k$ для некоторых $\tau \in \omega^{<\omega}$ и $k \in \omega$. Таким образом, τ является непосредственным предшественником σ в дереве S_n, и, значит, $\tau \in S_n^t$.

Обозначим $a = \alpha^t(\tau)$. Найдем наименьшее $s \in \omega$ такое, что вершина $f_a(a_s)$ еще не попала в бинарное дерево D^t. Тогда полагаем $D^{t+1} = D^t \cup \{f_a(a_s), f_a(b_s)\}$, $\alpha^{t+1} = \alpha^t \cup \{\langle \sigma, f_a(a_s)\rangle\}$.

Аналогичным образом (с точностью до замены символов S, D, α на T, E, β соответственно) определяем E^{t+1} и β^{t+1}, после чего переходим к следующему шагу.

Положим $D = \bigcup\limits_{t\in\omega} D^t$, $E = \bigcup\limits_{t\in\omega} E^t$. Заметим, что инструкции для перечисления D и E равномерно эффективным образом зависят от n. Следовательно, существуют вычислимые функции f и g такие, что $D = W_{f(n)}$, $E = W_{g(n)}$.

Зафиксируем n_0 такое, что $W_{n_0} = \varnothing$, и определим две вычислимые функции:

$$\varphi(n) = c^{\varkappa}(n_0, \dots, n_0, f(n)), \quad \psi(n) = c^{\varkappa}(n_0, \dots, n_0, g(n)).$$

Тогда вычислимые I-алгебры $\mathfrak{A}_{\varphi(n)}$ и $\mathfrak{A}_{\psi(n)}$ являются алгебрами с несобственными выделенными идеалами

$$I_1^{\mathfrak{A}_{\varphi(n)}} = \dots = I_\lambda^{\mathfrak{A}_{\varphi(n)}} = \mathfrak{A}_{\varphi(n)}, \quad I_1^{\mathfrak{A}_{\psi(n)}} = \dots = I_\lambda^{\mathfrak{A}_{\psi(n)}} = \mathfrak{A}_{\psi(n)}.$$

Определим, наконец, вычислимую функцию

$$h(n) = \langle \varphi(n), \psi(n)\rangle$$

и докажем, что h сводит множество A к множеству E.

Пусть $n \in A$. Тогда $S_n \cong T_n$. Отсюда вытекает, что изоморфизм деревьев S_n и T_n порождает изоморфизм I-алгебр $\mathfrak{A}_{\varphi(n)}$ и $\mathfrak{A}_{\psi(n)}$, т. е. $h(n) \in E$.

Пусть теперь $n \notin A$. В этом случае, с одной стороны, дерево T_n содержит бесконечный путь и дерево $\omega^{<\omega}$ вкладывается в T_n. Отсюда следует, что полное бинарное дерево вкладывается в бинарное дерево $E = W_{g(n)}$. Поэтому E содержит континуальное число бесконечных путей и I-алгебра $\mathfrak{A}_{\psi(n)}$ не является суператомной.

С другой стороны, так как $n \notin A$, заключаем, что S_n не имеет бесконечных путей. Тем самым S_n имеет только счетное число конечных путей. Отсюда следует, что бинарное дерево $D = W_{f(n)}$ содержит только счетное число максимальных цепей и I-алгебра $\mathfrak{A}_{\varphi(n)}$ является суператомной. Таким образом, $\mathfrak{A}_{\varphi(n)} \ncong \mathfrak{A}_{\psi(n)}$, и, значит, $h(n) \notin E$.

§ 3. Проблема вычислимого изоморфизма *I*-алгебр

Важной подпроблемой проблемы изоморфизма является проблема вычислимого изоморфизма. Известно, что для таких классов структур, как линейные порядки, булевы алгебры, абелевы p-группы, модели эквивалентности, проблема вычислимого изморфизма имеет максимально возможную арифметическую сложность, т. е. сложность Σ^0_3 (см. [5]).

В теореме 2 мы докажем, что *проблема вычислимого изоморфизма I-алгебр* является Σ^0_3-полной.

Теорема 2. *Множество $E_{\Delta^0_1} = \{\langle m, n\rangle \mid m, n \in \omega,\ \mathfrak{A}_m \cong_{\Delta^0_1} \mathfrak{A}_n\}$ является Σ^0_3-полным.*

Доказательство. Принадлежность множества $E_{\Delta^0_1}$ классу Σ^0_3 следует непосредственно из определения вычислимого изоморфизма и из вычислимости последовательности $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\omega}$.

Докажем, что $E_{\Delta^0_1}$ является полным в классе Σ^0_3. Пусть A — произвольное Σ^0_3-множество. Существует трехместное вычислимое отношение $R(n, k, x)$ такое, что

$$n \in A \iff \exists k \exists^\omega x R(n, k, x).$$

Пусть n — фиксированное натуральное число. Опишем равномерную по n процедуру построения двух перечислимых множеств K и L таких, что $K \cup L = \omega$, $K \cap L = \varnothing$, K — идеальное подмножество в ω. Будем по шагам определять последовательности

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_t \subseteq \dots, \quad L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_t \subseteq \dots$$

конечных множеств таких, что $D_t = K_t \cup L_t$ является бинарным деревом, $K_t \cap L_t = \varnothing$, K_t — идеальное подмножество в D_t.

Шаг 0. Полагаем $K_0 = \{3\}$, $L_0 = \{0, 1, 2, 4\}$.

Шаг $t + 1$. Пусть K_t, L_t, D_t уже построены, при этом вершины a_0, b_0, ..., a_t, b_t уже попали в дерево D_t, а $a_{t+1}, b_{t+1} \notin D_t$.

Проверяем, верно ли $R(n, k, x)$ для $\langle k, x\rangle = t$.

Случай 1. Если $R(n, k, x)$ не верно, то полагаем

$$K_{t+1} = K_t \cup \{L(a), R(a) \mid a \in K_t,\ a \text{ — концевая вершина } D_t,\ a \preccurlyeq a_i,\ 0 \le i \le t\} \cup \{L(a_{t+1})\},$$

$$L_{t+1} = L_t \cup \{L(a), R(a) \mid a \in L_t,\ a \text{ — концевая вершина } D_t,\ a \preccurlyeq a_i,\ 0 \le i \le t\} \cup \{a_{t+1}, b_{t+1}, R(a_{t+1})\}.$$

Другими словами, для всех i, $0 \le i \le t$, каждую концевую вершину D_t, лежащую под a_i и принадлежащую K_t, разбиваем на две вершины из K_{t+1}, а принадлежащую L_t, — на две вершины из L_{t+1}. Крайнюю правую концевую вершину b_t разбиваем на три вершины, две из которых попадают в L_{t+1}, а одна — в K_{t+1}. После этого переходим к следующему шагу.

Случай 2. Если $R(n,k,x)$ верно, то полагаем

$$\begin{aligned} K_{t+1} = K_t \cup \{L(a), R(a) \mid a \in K_t,\ a \text{ — концевая вершина } D_t,\\ a \preccurlyeq a_i,\ 0 \le i \le t\} \cup \{LL(a) \mid a \in L_t,\ a \text{ — концевая}\\ \text{вершина } D_t,\ a \preccurlyeq a_i,\ k+1 \le i \le t\} \cup \{L(a_{t+1})\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{t+1} = L_t \cup \{L(a), R(a) \mid a \in L_t,\ a \text{ — концевая вершина } D_t,\\ a \preccurlyeq a_i,\ 0 \le i \le k\} \cup \{L(a), R(a), RL(a) \mid a \in L_t,\ a \text{ — концевая}\\ \text{вершина } D_t,\ a \preccurlyeq a_i,\ k+1 \le i \le t\} \cup \{a_{t+1}, b_{t+1}, R(a_{t+1})\}. \end{aligned}$$

Другими словами, для всех i, $k+1 \le i \le t$, каждую концевую вершину D_t, лежащую под a_i и принадлежащую L_t, разбиваем на три вершины, две из которых попадают в L_{t+1}, а одна — в K_{t+1}. Все остальные концевые вершины D_t разбиваем так же, как и в случае 1. После этого переходим к следующему шагу.

Положим $K = \bigcup\limits_{t\in\omega} K_t$, $L = \bigcup\limits_{t\in\omega} L_t$. Легко видеть, что по построению $K \cup L = \omega$, $K \cap L = \varnothing$, K идеальное в ω. Инструкции для перечисления K и L равномерно эффективным образом зависят от n. Следовательно, существуют вычислимые функции f и g такие, что $K = W_{f(n)}$, $L = W_{g(n)}$.

Определим вычислимую функцию

$$h(n) = c^{\varkappa}(n_0, \dots, n_0, g(n), n_0, \dots, n_0, f(n)),$$

где $W_{n_0} = \varnothing$, элемент $g(n)$ расположен на $(\varkappa - \lambda)$-м месте, а элемент $f(n)$ — на $\varkappa$-м месте в наборе аргументов функции $c^{\varkappa}$.

Таким образом, вычислимая I-алгебра $\mathfrak{A}_{h(n)}$ является алгеброй с несобственными выделенными идеалами $I_2^{\mathfrak{A}_{h(n)}} = \dots = I_\lambda^{\mathfrak{A}_{h(n)}} = \mathfrak{A}_{h(n)}$. Поскольку ω является порождающим деревом для $\mathfrak{A}_{h(n)}$, то $\mathfrak{A}_{h(n)}$ — счетная безатомная алгебра. По построению под любой вершиной из L существуют две различные вершины, также лежащие в L. Отсюда следует, что фактор-алгебра $\mathfrak{A}_{h(n)}/I_1^{\mathfrak{A}_{h(n)}}$ является счетной безатомной.

Зафиксируем теперь вычислимые I-алгебры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ с несобственными выделенными идеалами $I_2^{\mathfrak{B}} = \dots = I_\lambda^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$, $I_2^{\mathfrak{C}} = \dots = I_\lambda^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}$, в которых выполняются следующие свойства:

(а) $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ счетные безатомные,

(б) $\mathfrak{B}/I_1^{\mathfrak{B}}$ и $\mathfrak{C}/I_1^{\mathfrak{C}}$ счетные безатомные,

(в) $I_1^{\mathfrak{B}}$ — ненулевой главный идеал в $\mathfrak{B}$,

(г) $I_1^{\mathfrak{C}}$ — ненулевой плотный идеал в $\mathfrak{C}$,

(д) $J\big(I_1^{\mathfrak{B}}\big) = \big\{x \in \mathfrak{B} \mid \forall y\big(0 < y \le x \to y \notin I_1^{\mathfrak{B}}\big)\big\}$ — ненулевой главный идеал в $\mathfrak{B}$.

Заметим, что $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ счетно категоричны. Более того, в силу результатов из [6, 7] $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ являются вычислимо категоричными. Зафиксируем натуральное m_0 такое, что $\mathfrak{A}_{m_0} \cong_{\Delta_1^0} \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$. Заметим, что идеал

$$J\big(I_1^{\mathfrak{A}_{m_0}}\big) = \big\{x \in \mathfrak{A}_{m_0} \mid \forall y\big(0 < y \le x \to y \notin I_1^{\mathfrak{A}_{m_0}}\big)\big\}$$

является главным в $\mathfrak{A}_{m_0}$. Определим вычислимую функцию

$$\alpha(n) = \langle h(n), m_0 \rangle$$

и докажем, что α сводит множество A к множеству $E_{\Delta_1^0}$.

Пусть $n \in A$. Найдется наименьшее $k \in \omega$ такое, что $R(n,k,x)$ истинно для бесконечно многих x. Тогда для любого i, $0 \leq i \leq k$, существует шаг t_0 такой, что каждая концевая вершина $a \in L_t$, $a \preccurlyeq a_i$, $t \geq t_0$, будет разбиваться на две вершины из L_{t+1}. Отсюда следует, что каждая новая вершина $b \in \{b \preccurlyeq a_i \mid b \in K\}$, появляющаяся на шаге $t \geq t_0$, будет расположена под вершинами из K_{t_0}, а каждая новая вершина $a \in \{a \preccurlyeq a_i \mid \forall b(b \preccurlyeq a \to b \in L)\}$, появляющаяся на шаге $t \geq t_0$, — под вершинами из L_{t_0}.

Следовательно, множество $\{b \preccurlyeq a_i \mid b \in K\}$ содержит только конечное число максимальных относительно $\preccurlyeq$ элементов, и $\{a \preccurlyeq a_i \mid \forall b(b \preccurlyeq a \to b \in L)\}$ содержит только конечное число максимальных относительно $\preccurlyeq$ элементов.

С другой стороны, для любого $i \geq k+1$ существует бесконечно много шагов t таких, что каждая концевая вершина $a \in L_t$, $a \preccurlyeq a_i$, будет разбита на три вершины, две из которых попадут в L_{t+1}, а одна — в K_{t+1}. Тем самым под любой вершиной $a \in \{a \preccurlyeq a_i \mid a \in L\}$ найдется вершина из K. Таким образом, под любой вершиной $a \in \{a \preccurlyeq b_k \mid a \in L\}$ найдется вершина из K.

Отсюда можно заключить, что I-алгебра $\mathfrak{A}_{h(n)}$ представима в виде прямой суммы $\mathfrak{B}_0 \times \dots \times \mathfrak{B}_k \times \mathfrak{B}_{k+1}$, где $\mathfrak{B}_i$ для $i \leq k$ порождается поддеревом $\{a \in \omega \mid a \preccurlyeq a_i\}$, а $\mathfrak{B}_{k+1}$ порождается поддеревом $\{a \in \omega \mid a \preccurlyeq b_k\}$, причем в силу сделанных выше замечаний для $i \leq k$ идеал $I_1^{\mathfrak{B}_i}$ является главным в $\mathfrak{B}_i$, а идеал $I_1^{\mathfrak{B}_{k+1}}$ — плотным в $\mathfrak{B}_{k+1}$. Отсюда заключаем, что $\mathfrak{A}_{h(n)} \cong \mathfrak{B}_0 \times \dots \times \mathfrak{B}_k \times \mathfrak{B}_{k+1} \cong \mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{B}_{k+1}$ и прямая сумма $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{B}_{k+1}$ обладает свойствами (а)–(д). Следовательно, в силу счетной категоричности

$$\mathfrak{A}_{h(n)} \cong \mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{B}_{k+1} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{C},$$

а ввиду вычислимой категоричности

$$\mathfrak{A}_{h(n)} \cong_{\Delta_1^0} \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}.$$

Окончательно заключаем, что $\mathfrak{A}_{h(n)} \cong_{\Delta_1^0} \mathfrak{A}_{m_0}$ и, следовательно, $\alpha(n) \in E_{\Delta_1^0}$.

Пусть теперь $n \notin A$. Тогда для любого $k \in \omega$ отношение $R(n,k,x)$ истинно только для конечного числа элементов x. Проводя такие же рассуждения, как выше, заключаем, что для любого $i \geq 0$ множество $\{b \preccurlyeq a_i \mid b \in K\}$ содержит только конечное число максимальных относительно $\preccurlyeq$ элементов и множество $\{a \preccurlyeq a_i \mid \forall b(b \preccurlyeq a \to b \in L)\}$ включает только конечное число максимальных относительно $\preccurlyeq$ элементов. В целом множество $\{a \in \omega \mid \forall b(b \preccurlyeq a \to b \in L)\}$ содержит бесконечное число максимальных относительно $\preccurlyeq$ элементов.

Таким образом, I-алгебра $\mathfrak{A}_{h(n)}$ представима в виде бесконечной прямой суммы $\sum\limits_{i\in\omega} \mathfrak{B}_i$, где $\mathfrak{B}_i$ порождается поддеревом $\{b \in \omega \mid b \preccurlyeq a_i\}$. В силу свойств дерева заключаем, что $\mathfrak{B}_i \cong \mathfrak{B}$ для всех $i \geq 0$. Тогда в алгебре $\mathfrak{A}_{h(n)} \cong \sum\limits_{i\in\omega} \mathfrak{B}_i$ идеал

$$J\big(I_1^{\mathfrak{A}_{h(n)}}\big) = \big\{x \in \mathfrak{A}_{h(n)} \mid \forall y\big(0 < y \leq x \to y \notin I_1^{\mathfrak{A}_{h(n)}}\big)\big\}$$

является неглавным, откуда немедленно вытекает, что I-алгебра $\mathfrak{A}_{h(n)}$ не изоморфна $\mathfrak{A}_{m_0}$. Окончательно получаем, что $\alpha(n) \notin E_{\Delta_1^0}$.

§ 4. Проблема вычислимой категоричности *I*-алгебр

В заключение рассмотрим проблему, тесно связанную как с проблемой изоморфизма, так и с проблемой вычислимого изоморфизма. Напомним, что вычислимая структура $\mathfrak{A}$ *вычислимо категорична*, если для любой вычислимой структуры $\mathfrak{B}$ из условия $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ следует, что $\mathfrak{B} \cong_{\Delta_1^0} \mathfrak{A}$.

В теореме 3 докажем, что *проблема вычислимой категоричности I-алгебр* является Σ_3^0-полной.

Зафиксируем некоторое эффективное кодирование кортежей натуральных чисел. Код кортежа $(x_0, \ldots, x_n)$ обозначим через $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$, а функцию, вычисляющую длину кортежа по его коду x, — через $\mathrm{lh}(x)$. Функцию, вычисляющую i-ю компоненту кортежа с кодом x, будем обозначать через $\langle x \rangle_i$. Через $\mathrm{seq}(x)$ обозначим вычислимый предикат, который истинен на x тогда и только тогда, когда x — код некоторого кортежа.

Теорема 3. *Множество $C_{\Delta_1^0} = \{n \in \omega \mid \mathfrak{A}_n$-вычислимо категорична$\}$ является Σ_3^0-полным.*

Доказательство. Получим сначала верхнюю оценку. Пусть $\mathfrak{C}_0, \ldots, \mathfrak{C}_m$ — список всех вычислимых *устойчивых* I-алгебр. В [6] доказано, что произвольная вычислимая I-алгебра $\mathfrak{A}$ является вычислимо категоричной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ представима в виде прямой суммы конечного числа устойчивых I-алгебр.

Другими словами, $\mathfrak{A}$ вычислимо категорична тогда и только тогда, когда существуют $a_0, \ldots, a_k \in \mathfrak{A}$ и $j_0, \ldots, j_k \le m$ такие, что набор $\langle a_0, \ldots, a_k \rangle$ является дизъюнктным разбиением единицы алгебры $\mathfrak{A}$ и $\hat{a}_0 \cong_{\Delta_1^0} \mathfrak{C}_{j_0}, \ldots, \hat{a}_k \cong_{\Delta_1^0} \mathfrak{C}_{j_k}$ (через $\hat{a}$ мы обозначаем I-алгебру всех элементов $\mathfrak{A}$, лежащих под a).

Таким образом, в нашем случае имеет место эквивалентность

$$\mathfrak{A}_n \text{ вычислимо категорична } \iff$$
$$\exists k \exists a \exists e \Bigg(\mathrm{seq}(a) \& \,\mathrm{seq}(e) \& \,\mathrm{lh}(a) = \mathrm{lh}(e) = k \& \forall i \le k (\langle a \rangle_i \in \mathfrak{A}_n)$$
$$\& \forall i \le k \forall j \le k (i \ne j \to \langle a \rangle_i \wedge^{\mathfrak{A}_n} \langle a \rangle_j = 0^{\mathfrak{A}_n})$$
$$\& (\langle a \rangle_0 \vee^{\mathfrak{A}_n} \cdots \vee^{\mathfrak{A}_n} \langle a \rangle_k = 1^{\mathfrak{A}_n}) \& \forall i \le k \left(\bigvee_{j=0}^{m} \mathrm{Isom}(\langle e \rangle_i, \langle a \rangle_i, j) \right) \Bigg),$$

где отношение $\mathrm{Isom}(\langle e \rangle_i, \langle a \rangle_i, j)$ истинно тогда и только тогда, когда $\varphi_{\langle e \rangle_i}$ является вычислимым изоморфизмом $\widehat{\langle a \rangle}_i$ на $\mathfrak{C}_j$. Хорошо известно, что данное отношение определимо $\forall\exists$-формулой. Используя алгоритм Тарского — Куратовского, заключаем, что наше исходное отношение определяется $\exists\forall\exists$-формулой. Другими словами, $C_{\Delta_1^0} \in \Sigma_3^0$.

Для нижней оценки сложности рассмотрим Σ_3^0-полное множество $A = \{n \in \omega \mid W_n$ коконечно$\}$. Докажем, что A сводится к $C_{\Delta_1^0}$.

Пусть n — фиксированное натуральное число, и пусть последовательность

$$W_n^0 \subseteq W_n^1 \subseteq \cdots \subseteq W_n^t \subseteq \ldots$$

является стандартной строго вычислимой последовательностью конечных множеств, аппроксимирующих W_n. Опишем равномерную по n процедуру построения перечислимого бинарного дерева D. Будем по шагам определять последовательность

$$D^0 \subseteq D^1 \subseteq \cdots \subseteq D^t \subseteq \ldots$$

конечных бинарных деревьев.

Шаг 0. Полагаем $D^0 = \{0, 1, 2\}$.

Шаг $t+1$. Пусть D^t уже построено, при этом вершины $a_0, b_0, \dots, a_t, b_t$ уже попали в дерево D_t, а $a_{t+1}, b_{t+1} \notin D_t$. Тогда полагаем

$$D^{t+1} = D^t \cup \{a_{t+1}, b_{t+1}\} \cup \big\{L(a), R(a) \mid a \in D^t,\\ a \text{ — концевая вершина } D^t,\ a \preccurlyeq a_i,\ 0 \le i \le t,\ i \in W_n^{t+1}\big\}.$$

Положим $D = \bigcup\limits_{t\in\omega} D^t$. Инструкции для перечисления D равномерно эффективным образом зависят от n. Тогда существует вычислимая функция g такая, что $D = W_{g(n)}$.

Зафиксируем n_0 такое, что $W_{n_0} = \varnothing$, и определим вычислимую функцию $f(n) = c^{\varkappa}(n_0, \dots, n_0, g(n))$. Покажем, что f — искомая сводящая функция.

Если $n \in A$, то $\omega \setminus W_n$ конечно. Множество концевых вершин дерева $W_{g(n)}$ совпадает с множеством $\{a_i \mid i \in \omega \setminus W_n\}$, т. е. оно конечно. Отсюда следует, что $\mathfrak{A}_{f(n)}$ является вычислимой I-алгеброй с конечным числом атомов и с несобственными выделенными идеалами $I_1^{\mathfrak{A}_{f(n)}} = \dots = I_\lambda^{\mathfrak{A}_{f(n)}} = \mathfrak{A}_{f(n)}$. Такая I-алгебра вычислимо категорична.

Если же $n \notin A$, то $\omega \setminus W_n$ бесконечно. Аналогичным образом заключаем, что $W_{g(n)}$ является бинарным деревом с бесконечным множеством концевых вершин. Таким образом, $\mathfrak{A}_{f(n)}$ — вычислимая I-алгебра с бесконечным числом атомов и с несобственными выделенными идеалами $I_1^{\mathfrak{A}_{f(n)}} = \dots = I_\lambda^{\mathfrak{A}_{f(n)}} = \mathfrak{A}_{f(n)}$. Такая I-алгебра не является вычислимо категоричной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Когабаев Н. Т.* Универсальная нумерация конструктивных I-алгебр // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 561–579.
2. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.
3. *Ershov Yu. L., Goncharov S. S.* Elementary theories and their constructive models. Handbook of Recursive Mathematics. Amsterdam: North-Holland, 1998. (Stud. Logic Found. Math.; V. 138).
4. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
5. *Гончаров С. С., Найт Дж.* Вычислимые структурные и антиструктурные теоремы // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 6. С. 639–681.
6. *Алаев П. Е.* Автоустойчивые I-алгебры // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 5. С. 511–550.
7. *Когабаев Н. Т.* Автоустойчивость булевых алгебр с выделенным идеалом // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1074–1084.

Статья поступила 1 февраля 2005 г.

Когабаев Нурлан Талгатович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kogabaev@math.nsc.ru