Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 515.164.13

АДДИЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

В. И. Кузьминов, И. А. Шведов

Аннотация: Вопрос о сохранении дискретности спектра оператора Лапласа, действующего в пространстве дифференциальных форм, при разрезании и склеивании многообразий сводится к аналогичным вопросам о компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования. На этой основе указаны условия на разрез Y, разбивающий риманово многообразие X на две части X_+ и X_-, при выполнении которых спектр оператора Лапласа на X дискретен тогда и только тогда, когда дискретны спектры операторов Лапласа на X_+ и X_-.

Ключевые слова: оператор Лапласа, дифференциальные формы, спектр самосопряженного оператора.

1. Введение

Пусть риманово многообразие X разбито гладкой поверхностью Y на две области X_+ и X_-. Представляет интерес задача о том, как соотносятся между собой спектральные свойства операторов Лапласа, действующих в пространствах дифференциальных форм на многообразиях X, X_+ и X_-. В случае форм степени 0 эта задача тесно связана с так называемым принципом расщепления в качественной спектральной теории дифференциальных операторов [1].

В качестве операторов Лапласа в указанной задаче естественно рассматривать самосопряженные расширения минимального оператора $\Delta^k_{\min}$, порожденного дифференциальной операцией Δ^k. Если многообразие X полно (без края), то такое расширение единственно. В общем случае это не так. Поэтому необходимо указывать, какие именно операторы Лапласа, действующие на многообразиях X, X_+ и X_-, имеются в виду. Мы рассматриваем операторы $\Delta^k = \mathrm{D}^* \circ \mathrm{D}$, где D — замкнутый оператор, порожденный дифференциальной операцией $d \times \delta$, d — операция внешнего дифференцирования, δ — операция кодифференцирования.

Ключевым моментом в нашем исследовании является следующий факт: спектр оператора $\mathrm{D}^* \circ \mathrm{D}$ дискретен тогда и только тогда, когда оператор D компактно разрешим и $\dim \operatorname{Ker} \mathrm{D} < \infty$.

Этот результат позволяет свести вопрос о сохранении дискретности спектра оператора Лапласа при разрезании и склеивании многообразий к аналогичным вопросам о компактной разрешимости операторов внешнего дифференцирования и на этой основе найти условия, при выполнении которых спектр оператора

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–311.2003.1).

Лапласа на многообразии X дискретен в том и только том случае, когда дискретны спектры соответствующих операторов Лапласа на многообразиях X_+ и X_-.

Все результаты работы о спектре операторов относятся к самосопряженным операторам, действующим в гильбертовом пространстве. В то же время вспомогательные результаты о компактной разрешимости относятся к операторам, действующим в банаховых пространствах. Нам представляется, что в этой большей общности вспомогательные результаты приобретают самостоятельное значение.

2. Предварительные сведения об операторах в банаховых пространствах

В дальнейшем оператором $T : A \to B$, действующим из векторного пространства A в векторное пространство B, будем называть произвольное линейное отображение, заданное на некотором линейном подпространстве $\operatorname{Dom} T$ пространства A и принимающее значения в пространстве B. Будем использовать обозначения $\operatorname{Ker} T = \{a \in \operatorname{Dom} T : Ta = 0\}$, $\operatorname{Im} T = \{Ta : a \in \operatorname{Dom} T\}$. Для произвольного линейного подпространства $K \subset \operatorname{Ker} T$ обозначим через $T/K : A/K \to B$ оператор, определенный следующими условиями: $\operatorname{Dom} T/K = \pi(\operatorname{Dom} T)$, $(T/K)\pi a = Ta$ для любого $a \in \operatorname{Dom} T$, где $\pi : A \to A/K$ — каноническая проекция.

Для нормированных пространств A и B и оператора $T : A \to B$ пространство $\operatorname{Dom} T$ будем считать снабженным нормой $\|a\|_{\operatorname{Dom} T} = \left(\|a\|_A^2 + \|Ta\|_B^2\right)^{1/2}$.

Пусть A и B — банаховы пространства. Замкнутый оператор $T : A \to B$ называется *нормально* (*компактно*) *разрешимым*, если оператор $(T/\operatorname{Ker} T)^{-1} : \operatorname{Im} T \to A/\operatorname{Ker} T$, заданный на $\operatorname{Im} T$, непрерывен (компактен).

Замкнутый оператор $T : A \to B$ нормально разрешим тогда и только тогда, когда подпространство $\operatorname{Im} T$ замкнуто в B.

Лемма 1. *Пусть $T : A \to B$ — оператор, A и B — банаховы пространства, K — замкнутое подпространство пространства A, $K \subset \operatorname{Ker} T$. Тогда*

1) *оператор T/K замкнут тогда и только тогда, когда замкнут оператор T;*

2) *оператор T/K нормально (компактно) разрешим тогда и только тогда, когда нормально (компактно) разрешим оператор T;*

3) *оператор T/K плотно определен тогда и только тогда, когда плотно определен оператор T;*

4) *если оператор T плотно определен, то $T^* = \pi^* \circ (T/K)^*$, где $\pi : A \to A/K$ — каноническая проекция.*

Доказательство. Первые три утверждения леммы очевидны. Докажем следующее утверждение, эквивалентное п. 4: если $T = R \circ S$, $S : A \to C$ — непрерывный оператор, $\operatorname{Dom} S = A$, $\operatorname{Im} S = C$, $R : C \to B$ — плотно определенный оператор, то $T^* = S^* \circ R^*$.

Включение $S^* \circ R^* \subset T^*$ очевидно, докажем обратное включение.

Пусть $f \in \operatorname{Dom} T^*$. Так как оператор S непрерывен и $\operatorname{Im} S = C$, то найдется такая константа M, что для каждого $c \in C$ существует $a_c \in A$, для которого $Sa_c = c$ и $\|a_c\|_A \le M\|c\|_C$. Так как $f \in \operatorname{Dom} T^*$, найдется такая константа N, что $|f(Ta)| \le N\|a\|_A$ для любого $a \in \operatorname{Dom} T$. Тогда $|f(Rc)| = |f(Ta_c)| \le NM\|c\|_C$ для любого $c \in \operatorname{Dom} R$. Следовательно, $f \in \operatorname{Dom} R^* = \operatorname{Dom}(S^* \circ R^*)$. Лемма доказана.

Лемма 2 [2]. *Замкнутый оператор $T : A \to B$ компактно разрешим тогда и только тогда, когда компактен оператор $\pi \circ j : \operatorname{Dom} T \to A/\operatorname{Ker} T$, где $j : \operatorname{Dom} T \to A$ — оператор вложения, $\pi : A \to A/\operatorname{Ker} T$ — каноническая проекция.*

Следствие 1. *Оператор вложения $j : \operatorname{Dom} T \to A$ компактен тогда и только тогда, когда оператор T компактно разрешим и $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$.*

Используя п. 4 леммы 1, легко доказать следующее утверждение.

Лемма 3 [2]. *Замкнутый плотно определенный оператор $T : A \to B$ компактно разрешим тогда и только тогда, когда компактно разрешим оператор $T^* : B^* \to A^*$.*

Для произвольных операторов $R : A \to B$ и $S : A \to C$ символом $R \times S : A \to B \times C$ будем обозначать оператор, определенный следующим образом:

$$\operatorname{Dom}(R \times S) = \operatorname{Dom} R \cap \operatorname{Dom} S, \quad (R \times S)a = (Ra, Sa).$$

Для произвольных операторов $U : B \to A$ и $V : C \to A$ символом $U \oplus V : B \times C \to A$ будем обозначать оператор, для которого $\operatorname{Dom}(U \oplus V) = \operatorname{Dom} U \times \operatorname{Dom} V$, $(U \oplus V)(b, c) = Ub + Vc$.

Лемма 4. *Пусть Z_1 и Z_2 — замкнутые подпространства банахова пространства A такие, что $Z_1 \cap Z_2 = 0$ и подпространство $Z_1 + Z_2$ замкнуто в A. Тогда найдется такая константа M, что для любых $a \in A$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$ имеет место оценка*

$$\|a\|_A \leq M(\|a - z_1\|_A + \|a - z_2\|_A).$$

Доказательство. Пусть $\pi : Z_1 + Z_2 \to Z_1$ — оператор проектирования на подпространство Z_1 параллельно подпространству Z_2. Используя теорему Банаха об открытом отображении, заключаем, что этот оператор ограничен. Для произвольных $a \in A$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$ имеем

$$\|a\|_A \leq \|a - z_1\|_A + \|z_1\|_A \leq \|a - z_1\|_A + \|\pi\| \cdot \|z_1 - z_2\|_A = \|a - z_1\|_A \\ + \|\pi\| \cdot \|z_1 - a - z_2 + a\|_A \leq (1 + \|\pi\|) \cdot (\|a - z_1\|_A + \|a - z_2\|_A).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть A, B, C — банаховы пространства, $R : A \to C$ и $S : A \to C$ — замкнутые операторы. Тогда*

1) *если операторы R и S нормально (компактно) разрешимы и подпространство $\operatorname{Ker} R + \operatorname{Ker} S$ замкнуто в A, то оператор $R \times S$ нормально (компактно) разрешим;*

2) *если оператор $R \times S$ нормально (компактно) разрешим и $\operatorname{Dom} R \subset \operatorname{Ker} R + \operatorname{Ker} S$, то R — нормально (компактно) разрешимый оператор.*

Доказательство. Лемма 1 позволяет, не ограничивая общности, предполагать, что $\operatorname{Ker} R \cap \operatorname{Ker} S = 0$. Пусть операторы R и S нормально разрешимы, подпространство $\operatorname{Ker} R + \operatorname{Ker} S$ замкнуто в A и $\operatorname{Ker} R \cap \operatorname{Ker} S = 0$. В силу нормальной разрешимости операторов R и S найдется такая константа K, что для любого $a \in \operatorname{Dom}(R \times S)$ существуют такие $z_1 \in \operatorname{Ker} R$ и $z_2 \in \operatorname{Ker} S$, что $\|a - z_1\|_A \leq K\|Ra\|_B$ и $\|a - z_2\|_A \leq K\|Sa\|_C$.

По лемме 4

$$\|a\|_A \leq M(\|a - z_1\|_A + \|a - z_2\|_A) \leq MK(\|Ra\|_B + \|Sa\|_C)$$

для некоторой константы M. Следовательно, оператор $R\times S$ нормально разрешим.

Предположим теперь, что R и S компактно разрешимы и $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — последовательность в $\operatorname{Dom}(R\times S)$ такая, для которой последовательности $\{Ra_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{Sa_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ограничены. В силу компактной разрешимости операторов R и S найдутся такая подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и такие последовательности $\{z'_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\subset\operatorname{Ker}R$, $\{z''_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\subset\operatorname{Ker}S$, что последовательности $\{a_{n_k}-z'_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\{a_{n_k}-z''_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ сходятся в A. По лемме 4

$$\|a_{n_k}-a_{n_l}\|_A\le M(\|a_{n_k}-a_{n_l}-z'_k+z'_l\|_A+\|a_{n_k}-a_{n_l}-z''_k+z''_l\|_A).$$

Для любого $\varepsilon>0$ при достаточно больших k и l получаем $\|a_{n_k}-a_{n_l}\|<\varepsilon$. Следовательно, последовательность $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ сходится. Оператор $R\times S$ компактно разрешим.

Пусть оператор $R\times S$ нормально разрешим, $\operatorname{Dom}R\subset\operatorname{Ker}R+\operatorname{Ker}S$, $\operatorname{Ker}R\cap\operatorname{Ker}S=0$, $a\in\operatorname{Dom}R$. Представим элемент a в виде $a=a'+a''$, $a'\in\operatorname{Ker}R$, $a''\in\operatorname{Ker}S$. Так как $a''\in\operatorname{Dom}(R\times S)$, в силу нормальной разрешимости оператора $R\times S$ имеет место оценка

$$\|a''\|_A\le\|(R\times S)^{-1}\|\cdot\|(R\times S)a''\|_{B\times C}=\|(R\times S)^{-1}\|\cdot\|Ra\|_B.$$

Следовательно, оператор R нормально разрешим.

Предположим теперь, что оператор $R\times S$ компактно разрешим, $\operatorname{Dom}R\subset\operatorname{Ker}R+\operatorname{Ker}S$, $\operatorname{Ker}R\cap\operatorname{Ker}S=0$. Пусть $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — последовательность в $\operatorname{Dom}R$, для которой последовательность $\{Ra_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ограничена. Представим элементы a_n в виде $a_n=a'_n+a''_n$, $a'_n\in\operatorname{Ker}R$, $a''_n\in\operatorname{Ker}S$. Тогда $a''_n\in\operatorname{Dom}(R\times S)$ и $(R\times S)a''_n=(Ra_n,0)$ — ограниченная последовательность в $B\times C$.

В силу компактной разрешимости оператора $R\times S$ найдется сходящаяся в A подпоследовательность $\{a''_{n_k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ последовательности $\{a''_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Кроме того, $Ra''_n=Ra_n$. Этим установлена компактная разрешимость оператора R. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $R:A\to B$, $S:A\to C$ — замкнутые плотно определенные операторы и $\operatorname{Ker}R+\operatorname{Ker}S=A$. Тогда $R\times S$ — замкнутый плотно определенный оператор и $(R\times S)^*=R^*\oplus S^*$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\operatorname{Ker}R\cap\operatorname{Ker}S=0$. Используя теорему Банаха об открытом отображении, заключаем, что оператор $P:A\to\operatorname{Ker}S$ проектирования на $\operatorname{Ker}S$ параллельно подпространству $\operatorname{Ker}R$ непрерывен. Поэтому подпространство $P(\operatorname{Dom}R)=\operatorname{Dom}(R\times S)\cap\operatorname{Ker}S$ плотно в $\operatorname{Ker}S$. Аналогично подпространство $\operatorname{Dom}(R\times S)\cap\operatorname{Ker}R$ плотно в $\operatorname{Ker}R$. Следовательно, подпространство $\operatorname{Dom}(R\times S)$ плотно в A. Оператор $R\times S$ плотно определен, и его замкнутость очевидна.

Для доказательства равенства $(R\times S)^*=R^*\oplus S^*$ достаточно установить импликацию $(f,g)\in\operatorname{Dom}(R\times S)^*\Longrightarrow f\in\operatorname{Dom}R^*$, $g\in\operatorname{Dom}S^*$.

Пусть $(f,g)\in\operatorname{Dom}(R\times S)^*$. Это означает, что функционал $f\circ R+g\circ S$ непрерывен на $\operatorname{Dom}(R\times S)$ относительно нормы пространства A. Но тогда функционал $f\circ R$ непрерывен на $\operatorname{Dom}(R\times S)\cap\operatorname{Ker}S=\operatorname{Dom}R\cap\operatorname{Ker}S$. Так как $f\circ R\circ P=f\circ R$, функционал $f\circ R$ непрерывен на $(\operatorname{Dom}R\cap\operatorname{Ker}S)+\operatorname{Ker}R=\operatorname{Dom}R$. Следовательно, $f\in\operatorname{Dom}R^*$. Аналогично $g\in\operatorname{Dom}S^*$. В случае $\operatorname{Ker}R\cap\operatorname{Ker}S=0$ лемма доказана.

Рассмотрим общий случай. Пусть $K=\operatorname{Ker}R\cap\operatorname{Ker}S$. Выполнено равенство $(R\times S)/K=R/K\times S/K$. По лемме 1 операторы R/K и S/K плотно определены и замкнуты. Так как $(\operatorname{Ker}(R/K)) \cap (\operatorname{Ker}(S/K)) = 0$, по доказанному частному случаю леммы оператор $(R \times S)/K$ плотно определен и замкнут. Кроме того,

$$(R \times S)^* = \pi^* \circ ((R \times S)/K)^* = \pi^* \circ ((R/K)^* \oplus (S/K)^*) \\ = \pi^* \circ (R/K)^* \oplus \pi^* \circ (S/K)^* = R^* \oplus S^*.$$

Лемма доказана.

Пусть $L : H \to H$ — самосопряженный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Следуя общепринятой терминологии, будем говорить, что *спектр оператора L дискретен*, если он состоит из собственных значений конечной кратности и является дискретным подмножеством вещественной прямой.

Лемма 7. *Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства, $D : H_1 \to H_2$ — замкнутый плотно определенный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *спектр оператора $D^* \circ D : H_1 \to H_1$ дискретен,*
2) *оператор D компактно разрешим и* $\dim \operatorname{Ker} D < \infty$,
3) *оператор вложения $i : \operatorname{Dom} D \to H_1$ компактен.*

Доказательство. По теореме фон Неймана [3, теорема V.3.24] оператор $D^* \circ D$ самосопряжен. В [2] установлено, что спектр самосопряженного оператора T дискретен тогда и только тогда, когда оператор T компактно разрешим и $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$. Там же установлено, что оператор $D^* \circ D$ компактно разрешим тогда и только тогда, когда компактно разрешим оператор D. Так как $\operatorname{Ker}(D^* \circ D) = \operatorname{Ker} D$, утверждения 1 и 2 эквивалентны. По следствию леммы 2 эквивалентны утверждения 2 и 3. Лемма доказана.

3. Банаховы и гильбертовы комплексы

Пусть для каждого $i \in \mathbb{Z}$ заданы банахово пространство A^i и оператор $T_A^i : A^i \to A^{i+1}$. Будем говорить, что пространства A^i и операторы T_A^i *образуют банахов комплекс A*, если все операторы T_A^i плотно определены и замкнуты, причем $\operatorname{Im} T_A^i \subset \operatorname{Ker} T_A^{i+1}$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$.

Последовательность $\varphi = (\varphi^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ограниченных операторов $\varphi^i : A^i \to B^i$ называется *морфизмом банахова комплекса A в банахов комплекс B*, если

$$\operatorname{Dom} \varphi^i = A^i, \quad \varphi^i(\operatorname{Dom} T_A^i) \subset \operatorname{Dom} T_B^i$$

и

$$T_B^i \circ \varphi^i = \varphi^{i+1} \circ T_A^i$$

на $\operatorname{Dom} T_A^i$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$.

Для произвольного банахова комплекса A определены пространства гомологий $H^i A \rightleftharpoons \operatorname{Ker} T_A^i / \operatorname{Im} T_A^{i-1}$. Каждому морфизму $\varphi : A \to B$ банаховых комплексов обычным образом соответствуют линейные отображения $H^i \varphi : H^i A \to H^i B$ пространств гомологий.

Последовательность

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$$

банаховых комплексов A, B, C и их морфизмов φ и ψ будем называть *точной* (в члене B), если для каждого $i \in \mathbb{Z}$ точны последовательности

$$A^i \xrightarrow{\varphi^i} B^i \xrightarrow{\psi^i} C^i$$

и

$$\operatorname{Dom} T_A^i \xrightarrow{\varphi^i} \operatorname{Dom} T_B^i \xrightarrow{\psi^i} \operatorname{Dom} T_C^i$$

векторных пространств.

Каждой точной (в членах A, B и C) последовательности банаховых комплексов

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

обычным образом соответствует точная последовательность гомологий

$$\cdots \to H^{i-1}(C) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(A) \xrightarrow{H^i\varphi} H^i(B) \xrightarrow{H^i\psi} H^i(C) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(A) \to \dots . \tag{1}$$

Лемма 8 [4, теорема 3]. *Пусть*

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

— точная последовательность банаховых комплексов и для некоторого $i \in \mathbb{Z}$ оператор T_B^i компактно разрешим. Тогда операторы T_A^i и T_C^i компактно разрешимы и $\dim \operatorname{Im} \delta^i < \infty$.

Лемма 9. *Пусть*

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

— точная последовательность банаховых комплексов. Тогда если для некоторого $i \in \mathbb{Z}$ операторы T_A^i и T_C^i компактно разрешимы, $\dim \operatorname{Im} \delta^i < \infty$ и выполнено следующее условие:

($\mathscr{P}_i$) *существует такой ограниченный линейный оператор $\Pi_i : C^i \to B^i$, что $\psi^i \circ \Pi_i = \mathrm{Id}_C^i$ и $\Pi_i(\operatorname{Dom} T_C^i) \subset \operatorname{Dom} T_B^i$,*

то оператор T_B^i компактно разрешим.

Доказательство. Прежде всего заметим, что сужение

$$\Pi_i|_{\operatorname{Dom} T_C^i} : \operatorname{Dom} T_C^i \to \operatorname{Dom} T_B^i$$

оператора Π_i является непрерывным оператором. Действительно, непрерывность оператора Π_i влечет замкнутость его графика. Из замкнутости графика оператора Π_i, непрерывности вложений $\operatorname{Dom} T_C^i \subset C^i$, $\operatorname{Dom} T_B^i \subset B^i$ и условия $\Pi_i\big(\operatorname{Dom} T_C^i\big) \subset \operatorname{Dom} T_B^i$ следует замкнутость графика оператора $\Pi_i|_{\operatorname{Dom} T_C^i}$. Оператор $\Pi_i|_{\operatorname{Dom} T_C^i} : \operatorname{Dom} T_C^i \to \operatorname{Dom} T_B^i$ непрерывен по теореме о замкнутом графике.

Пусть $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — последовательность в $\operatorname{Dom} T_B^i$, для которой последовательность $\big\{T_B^i b_n\big\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ограничена в B^{i+1}. Тогда последовательность $\big\{\psi^{i+1} T_B^i b_n\big\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ограничена в C^{i+1} и содержится в $\operatorname{Im} T_C^i$. В силу компактной разрешимости оператора T_C^i существуют такие подпоследовательность $\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ последовательности $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и сходящаяся в C^i последовательность $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, лежащая в $\operatorname{Dom} T_C^i$, что $T_C^i c_k = \psi^{i+1} T_B^i b_{n_k}$.

Поскольку операторы $\Pi_i : C^i \to B^i$ и $\Pi_i|_{\operatorname{Dom} T_C^i} : \operatorname{Dom} T_C^i \to \operatorname{Dom} T_B^i$ ограничены, последовательность $b'_k = \Pi_i c_k$ сходится в B^i, а последовательность $T_B^i b'_k$ ограничена в B^{i+1}. Так как $\psi^{i+1} T_B^i (b_{n_k} - b'_k) = 0$, найдутся такие $a_k \in A^{i+1}$, что $\varphi^{i+1} a_k = T_B^i (b_{n_k} - b'_k)$.

Последовательность $\big\{T_B^i (b_{n_k} - b'_k)\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ограничена в B^{i+1}, подпространство $\operatorname{Im} \varphi^{i+1} = \operatorname{Ker} \psi^{i+1}$ замкнуто в B^{i+1} и $\operatorname{Ker} \varphi^{i+1} = 0$, поэтому по теореме Банаха об открытом отображении последовательность $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ограничена в A^{i+1}.

Последовательности

$$A^{i+2} \overset{\varphi^{i+2}}{\to} B^{i+2} \overset{\psi^{i+2}}{\to} C^{i+2}, \quad \operatorname{Dom} T_A^{i+1} \overset{\varphi^{i+1}}{\to} \operatorname{Dom} T_B^{i+1} \overset{\psi^{i+1}}{\to} \operatorname{Dom} T_C^{i+1}$$

точны и $T_B^{i+1}\varphi^{i+1}a_k = 0$, значит, $a_k \in \operatorname{Dom} T_A^{i+1}$ и $T_A^{i+1}a_k = 0$.

Обозначим через $[a_k]$ элемент пространства гомологий $H^{i+1}A$, содержащий цикл a_k. Так как $[a_k] = \delta^i[\psi^i b_{n_k} - c_k]$ и $\dim \operatorname{Im} \delta^i < \infty$, последовательность $\{[a_k]\}_{k\in\mathbb{Z}}$ содержится в некотором конечномерном подпространстве пространства $H^{i+1}A$.

Найдется такое конечномерное подпространство V в $\operatorname{Ker} T_A^{i+1}$, что $[a_k] \in \pi(V)$, где $\pi : \operatorname{Ker} T_A^{i+1} \to H_A^{i+1}$ — каноническая проекция. Оператор T_A^i компактно разрешим и поэтому нормально разрешим. Следовательно, подпространство $\operatorname{Im} T_A^i$ замкнуто в A^{i+1}. Ограниченная последовательность $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ содержится в $\operatorname{Im} T_A^i + V$, подпространство $\operatorname{Im} T_A^i$ замкнуто в A^{i+1}, а подпространство V конечномерно. Поэтому последовательность $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ можно представить в виде $a_k = a_k' + a_k''$, где $\{a_k'\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — ограниченная последовательность в $\operatorname{Im} T_A^i$, а $\{a_k''\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — ограниченная последовательность в V.

Переходя к подпоследовательностям, без ограничения общности можно считать последовательность $\{a_k''\}_{k\in\mathbb{Z}}$ сходящейся.

В силу компактной разрешимости оператора T_A^i существуют такие подпоследовательность $\{a_{k_j}'\}_{j\in\mathbb{Z}}$ последовательности $\{a_k'\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и сходящаяся в A^i последовательность $\{\tilde a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, что $T_A^i\tilde a_j = a_{k_j}'$. Вновь переходя к подпоследовательностям, будем считать, что $k_j = j$, т. е. что подпоследовательность $\{a_{k_j}'\}_{j\in\mathbb{Z}}$ совпадает со всей последовательностью $\{a_k'\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Последовательность $\{\varphi^{i+1}a_k''\}_{k\in\mathbb{Z}}$ сходится в B^{i+1} и содержится в конечномерном подпространстве $\varphi^{i+1}(V)$. Так как $\varphi^{i+1}a_k \in \operatorname{Im} T_B^i$ и $\varphi^{i+1}a_k' = \varphi^{i+1}T_A^i\tilde a_k = T_B^i\psi^i\tilde a_k$, то $\varphi^{i+1}a_k' \in \operatorname{Im} T_B^i$. Следовательно, $\varphi^{i+1}a_k'' \in \operatorname{Im} T_B^i$.

Найдется такая сходящаяся в B^i последовательность $\{\tilde b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, лежащая в $\operatorname{Dom} T_B^i$, что $T_B^i\tilde b_k = \varphi^{i+1}a_k''$. Последовательность $\{\varphi^i\tilde a_k + \tilde b_k + b_k'\}_{k\in\mathbb{Z}}$ сходится в B^i, и

$$T_B^i(\varphi^i\tilde a_k + \tilde b_k + b_k') = \varphi^{i+1}a_k' + \varphi^{i+1}a_k'' + T_B^i b_k' = T_B^i b_{n_k}.$$

Установлено, что оператор $\bigl(T_B^i/\operatorname{Ker} T_B^i\bigr)^{-1} : \operatorname{Im} T_B^i \to B^i/\operatorname{Ker} T_B^i$ компактен. Лемма доказана.

Банахов комплекс $A = \bigl(A^i, T_A^i\bigr)_{i\in\mathbb{Z}}$ будем называть *гильбертовым комплексом*, если все A^i — сепарабельные гильбертовы пространства.

Пусть A — произвольный гильбертов комплекс. Так как $\operatorname{Ker}\bigl(T_A^{i-1}\bigr)^* = \bigl(\operatorname{Im} T_A^{i-1}\bigr)^\perp$ и $\operatorname{Im} T_A^{i-1} \subset \operatorname{Ker} T_A^i$, то $\operatorname{Ker}\bigl(T_A^{i-1}\bigr)^* + \operatorname{Ker} T_A^i = A^i$ для каждого i. По лемме 6

$$T_A^{i-1} \circ \bigl(T_A^{i-1}\bigr)^* + \bigl(T_A^i\bigr)^* \circ T_A^i = \bigl(D_A^i\bigr)^* \circ D_A^i,$$

где $D_A^i = \bigl(T_A^{i-1}\bigr)^* \times T_A^i$. Из лемм 7, 5 и 3 и равенства $\operatorname{Ker} D_A^i = H^iA$ вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Для произвольного гильбертова комплекса A следующие утверждения эквивалентны:*

1) *спектр оператора* $L_A^i = T_A^{i-1} \circ \bigl(T_A^{i-1}\bigr)^* + \bigl(T_A^i\bigr)^* \circ T_A^i$ *дискретен,*
2) *операторы* T_A^{i-1} *и* T_A^i *компактно разрешимы и* $\dim H^iA < \infty$,
3) *оператор вложения* $\operatorname{Dom} D_A^i \subset A^i$ *компактен.*

Теорема 2. *Пусть*

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

— точная последовательность гильбертовых комплексов. Тогда

1) если спектр оператора L_B^i дискретен , то дискретны спектры операторов L_A^i и L_C^i;

2) если спектры операторов L_A^i и L_C^i дискретны и выполнены условия $(\mathscr{P}_i)$ и $(\mathscr{P}_{i-1})$ леммы 9, то спектр оператора L_B^i дискретен.

Доказательство. 1. Пусть спектр оператора L_B^i дискретен. По теореме 1 операторы T_B^{i-1} и T_B^i компактно разрешимы и $\dim H^iB < \infty$. По лемме 8 операторы T_A^{i-1}, T_A^i, T_C^{i-1}, T_C^i компактно разрешимы и $\dim \delta^{i-1} < \infty$, $\dim \delta^i < \infty$. В силу точности последовательности гомологий (1) $\dim H^iA < \infty$ и $\dim H^iC < \infty$. По теореме 1 спектры операторов L_A^i и L_C^i дискретны.

2. Пусть спектры операторов L_A^i и L_C^i дискретны и выполнены условия $(\mathscr{P}_i)$ и $(\mathscr{P}_{i-1})$. По теореме 1 операторы T_A^{i-1}, T_A^i, T_C^{i-1}, T_C^i компактно разрешимы и $\dim H^iA < \infty$, $\dim H^iC < \infty$. Из условия $\dim H^iA < \infty$ следует, что $\dim \delta^{i-1} < \infty$, а из условия $\dim H^iC < \infty$ — что $\dim \delta^i < \infty$. По лемме 9 операторы T_B^{i-1} и T_B^i компактно разрешимы. Так как последовательность гомологий точна и $\dim H^iA < \infty$, $\dim H^iC < \infty$, то $\dim H^iB < \infty$. По теореме 1 спектр оператора L_B^i дискретен. Теорема доказана.

4. Аддиционная теорема для гладких многообразий

Пусть X — гладкое n-мерное ориентируемое риманово многообразие, σ — гладкая строго положительная функция, называемая в дальнейшем *весовой функцией на* X или *весом*, $\Lambda^k T^*$ — k-я внешняя степень кокасательного расслоения T^* над X. Сечения расслоения $\Lambda^k T^*$ — это дифференциальные формы степени k на X. Риманова метрика многообразия X индуцирует на каждом слое $\Lambda^k T_x^*$ скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_x$.

Будем использовать следующие обозначения для некоторых пространств сечений расслоения $\Lambda^k T^*$:

$\mathscr{D}^k(X)$ — пространство гладких сечений с компактными носителями, лежащими в $\operatorname{int} X = X \setminus \partial X$;

$L_{1,\mathrm{loc}}^k(X)$ — пространство тех дифференциальных форм степени k на X, представления которых в локальных картах многообразия X имеют локально интегрируемые коэффициенты;

$L_2^k(X,\sigma)$ — гильбертово пространство, снабженное скалярным произведением

$$(\alpha,\beta) = \int\limits_X (\alpha,\beta)_x \sigma^2(x)\,dx = \int\limits_X \alpha \wedge \sigma^2 * \beta,$$

где $*$ — оператор Ходжа, dx — элемент риманова объема многообразия X; это пространство образовано всеми формами $\alpha \in L_{1,\mathrm{loc}}^k(X)$, для которых $\|\alpha\| = (\alpha,\alpha)^{1/2} < \infty$;

$L_{2,\mathrm{loc}}^k(X,\sigma)$ — пространство тех форм из $L_{1,\mathrm{loc}}^k(X)$, которые, будучи умноженными на любую гладкую функцию с компактным носителем, принадлежат $L_2^k(X,\sigma)$;

$H_{\mathrm{loc}}^{k,s}(X)$ — пространство форм степени k на X, представления которых в локальных картах многообразия X имеют коэффициенты, принадлежащие пространству Соболева H_{loc}^s, $s \geq 0$ целое.

В дальнейшем мы будем иметь дело со следующими дифференциальными операторами, действующими в пространствах дифференциальных форм:

$d^k : \mathscr{D}^k(X) \to \mathscr{D}^{k+1}(X)$ — оператор внешнего дифференцирования;

$\delta^k_\sigma : \mathscr{D}^k(X) \to \mathscr{D}^{k-1}(X)$ — оператор, формально сопряженный к оператору d^{k-1};

$D^k_\sigma = \delta^k_\sigma \times d^k : \mathscr{D}^k(X) \to \mathscr{D}^{k-1} \times \mathscr{D}^{k+1}(X)$ — оператор Гаусса — Бонне (соответствующий весу σ);

$\Delta^k_\sigma = \delta^{k+1}_\sigma \circ d^k + d^{k-1} \circ \delta^k_\sigma$ — оператор Лапласа (соответствующий весу σ).

В соответствии с определением оператор δ^k_σ формально сопряжен к оператору d^{k-1}. Это означает, что для любых $\alpha \in \mathscr{D}^{k-1}(X)$ и $\beta \in \mathscr{D}^k(X)$ выполнено равенство $(d^{k-1}\alpha, \beta) = \big(\alpha, \delta^k_\sigma \beta\big)$.

Так как для любых $\alpha \in \mathscr{D}^{k-1}(X)$, $\beta \in \mathscr{D}^k(X)$

$$(d^{k-1}\alpha, \beta) = \int\limits_X d^{k-1}\alpha \wedge \sigma^2 * \beta = (-1)^k \int\limits_X \alpha \wedge d^{m-k+1}\sigma^2 * \beta$$
$$= (\alpha, (-1)^k \sigma^{-2} *^{-1} d^{m-k+1} * \sigma^2 \beta),$$

то

$$\delta^k_\sigma \beta = (-1)^k \sigma^{-2} *^{-1} d^{m-k+1} * \sigma^2 \beta = \delta^k_1 \beta + (-1)^k *^{-1} (2\sigma^{-1} d\sigma \wedge *\beta). \qquad (2)$$

Здесь δ^k_1 — оператор δ^k_σ, соответствующий весу $\sigma \equiv 1$.

Используя формулу (2), получаем

$$D^k_\sigma \alpha = D^k_1 \alpha + ((-1)^k *^{-1} (2\sigma^{-1} d\sigma \wedge *\alpha), 0), \qquad (3)$$

$$\Delta^k_\sigma \alpha = \Delta^k_1 \alpha + (-1)^{k+1} *^{-1} (2\sigma^{-1} d\sigma \wedge *d^k\alpha) + (-1)^k d^{k-1} *^{-1} (2\sigma^{-1} d\sigma \wedge *\alpha). \quad (4)$$

Поскольку d^k, δ^k_σ, D^k_σ и Δ^k_σ — дифференциальные операторы, их действие стандартным образом распространяется на пространства, более широкие, чем $\mathscr{D}^k(X)$. В частности, будем рассматривать оператор d^k как оператор, действующий из $L^k_{1,\mathrm{loc}}(X)$ в $L^{k+1}_{1,\mathrm{loc}}(X)$. Область задания этого оператора образована всеми формами $\omega \in L^k_{1,\mathrm{loc}}(X)$, для каждой из которых существует такая форма $\omega' \in L^{k+1}_{1,\mathrm{loc}}(X)$, что

$$\int\limits_X \big(\omega, \delta^{k+1}_\sigma \alpha\big)_x \sigma^2 \, dx = \int\limits_X (\omega', \alpha)_x \sigma^2 \, dx \qquad (5)$$

для всех $\alpha \in D^{k+1}(X)$.

Условие (5) определяет форму ω' однозначно. Эта форма ω' объявляется значением оператора d^k на форме $\omega \in \operatorname{Dom} d^k$. Используя формулу (2), легко проверить, что так определенный оператор $d^k : L^k_{1,\mathrm{loc}}(X) \to L^{k+1}_{1,\mathrm{loc}}(X)$ не зависит от выбора веса σ.

Определим оператор $d^k_{\max} : L^k_2(X, \sigma) \to L^{k+1}_2(X, \sigma)$. Область задания этого оператора образована всеми теми формами $\omega \in \operatorname{Dom} d^k \cap L^k_2(X, \sigma)$, для которых $d^k\omega \in L^{k+1}_2(X, \sigma)$, $d^k_{\max}\omega := d^k\omega$ для форм $\omega \in \operatorname{Dom} d^k_{\max}$.

Рассмотрим оператор $d^k : L^k_2(X, \sigma) \to L^{k+1}_2(X, \sigma)$ с областью определения $\operatorname{Dom} d^k = \mathscr{D}^k(X)$. Замыкание этого оператора будем обозначать через $d^k_{\min} : L^k_2(X, \sigma) \to L^{k+1}_2(X, \sigma)$.

Аналогично тому, как это было сделано в случае операторов d^k, $d^k_{\max}$ и $d^k_{\min}$, определяются операторы

$$\delta^k_\sigma : L^k_{1,\mathrm{loc}}(X) \to L^{k-1}_{1,\mathrm{loc}}(X), \quad \delta^k_{\sigma,\min}, \delta^k_{\sigma,\max} : L^k_2(X, \sigma) \to L^{k-1}_2(X, \sigma),$$

$$D^k_\sigma : L^k_{1,\mathrm{loc}}(X) \to L^{k-1}_{1,\mathrm{loc}}(X) \times L^{k+1}_{1,\mathrm{loc}}(X),$$

$$D^k_{\sigma,\max}, D^k_{\sigma,\min} : L^k_2(X,\sigma) \to L^{k-1}_2(X,\sigma) \oplus L^{k+1}_2(X,\sigma),$$

$$\Delta^k_\sigma : L^k_{1,\mathrm{loc}}(X) \to L^k_{1,\mathrm{loc}}(X), \quad \Delta^k_{\sigma,\max}, \Delta^k_{\sigma,\min} : L^k_2(X,\sigma) \to L^k_2(X,\sigma).$$

Оператор $\delta^k_{\sigma,\max}$ сопряжен к оператору $d^{k-1}_{\min}$, $d^k_{\max}$ сопряжен к $\delta^{k+1}_{\sigma,\min}$, $\Delta^k_{\sigma,\max}$ сопряжен к $\Delta^k_{\sigma,\min}$.

Лемма 10. *Если $\omega \in L^k_{2,\mathrm{loc}}(X)$ — форма с компактным носителем и $d^k\omega \in L^{k+1}_{2,\mathrm{loc}}(X)$ ($\delta^k_\sigma\omega \in L^{k-1}_{2,\mathrm{loc}}(X)$), то $\omega \in \mathrm{Dom}\, d^k_{\min}$ ($\omega \in \mathrm{Dom}\, \delta^k_{\sigma,\min}$).*

Доказательство. В случае $d^k\omega \in L^{k+1}_{2,\mathrm{loc}}(X)$ утверждение леммы легко доказать, используя для аппроксимации формы ω гладкими формами процедуру усреднения [5]. Случай $\delta^k_\sigma\omega \in L^{k-1}_{2,\mathrm{loc}}(X)$ сводится к предыдущему с помощью формулы (2). Лемма доказана.

Пусть $\omega \in \mathrm{Dom}\big(\delta^k_\sigma : L^k_{1,\mathrm{loc}}(X) \to L^{k-1}_{1,\mathrm{loc}}(X)\big)$ и $f : X \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Тогда для произвольной формы $\alpha \in \mathscr{D}^{k-1}(X)$ имеем

$$\int\limits_X (f\omega, d^{k-1}\alpha)_x \sigma^2\,dx = \int\limits_X (\omega, d^{k-1}(f\alpha) - df \wedge d^{k-1}\alpha)_x \sigma^2\,dx = \int\limits_X \big(f\delta^k_\sigma\omega, \alpha\big)_x \sigma^2\,dx$$
$$+ (-1)^k \int\limits_X d^{k-1}\alpha \wedge df \wedge *\sigma^2\omega = \int\limits_X \big(\big(f\delta^k_\sigma\omega\big) + (-1)^k *^{-1} (df \wedge *\omega), \alpha\big)_x \sigma^2\,dx.$$

Так как $f\delta^k_\sigma\omega + (-1)^k *^{-1} (df \wedge *\omega) \in L^{k-1}_{1,\mathrm{loc}}(X)$, то $f\omega \in \mathrm{Dom}\,\delta^k_\sigma$ и

$$\delta^k_\sigma(f\omega) = f\delta^k_\sigma\omega + (-1)^k *^{-1} (df \wedge *\omega). \tag{6}$$

Аналогично устанавливаем, что

$$d^k(f\omega) = df \wedge \omega + fd^k\omega, \tag{7}$$

если $\omega \in \mathrm{Dom}\big(d^k : L^k_{1,\mathrm{loc}}(X) \to L^{k+1}_{1,\mathrm{loc}}(X)\big)$, $f : X \to \mathbb{R}$ — гладкая функция.

Лемма 11. *На полном римановом многообразии (без края) $d^k_{\max} = d^k_{\min}$, $\delta^k_{\sigma,\max} = \delta^k_{\sigma,\min}$, $D^k_{\sigma,\max} = D^k_{\sigma,\min}$, $\Delta^k_{\sigma,\max} = \Delta^k_{\sigma,\min}$.*

Доказательство. На полном римановом многообразии существует последовательность $f_n : X \to [0,1]$ гладких функций, удовлетворяющая следующим условиям: 1) каждая функция f_n имеет компактный носитель, 2) $f_{n+1} \geq f_n$, 3) для каждой точки $x \in X$ существует такой номер $n = n(x)$, что $f_n(x) = 1$, 4) $|df_n|_x \leq 1$ в каждой точке $x \in X$. Используя оценки

$$|df_n \wedge \omega|_x \leq |\omega|_x, \quad |*^{-1} (df_n \wedge *\omega)|_x \leq |df_n|_x|\omega|_x$$

и формулы (6) и (7), заключаем, что для каждой формы $\omega \in \mathrm{Dom}\, d^k_{\max}$ будет $f_n\omega \in \mathrm{Dom}\, d^k_{\max}$ и $f_n\omega \to \omega$ в $\mathrm{Dom}\, d^k_{\max}$ при $n \to \infty$, а для каждой формы $\omega \in \mathrm{Dom}\,\delta^k_{\sigma,\max}$ будет $f_n\omega \in \mathrm{Dom}\,\delta^k_{\sigma,\max}$ и $f_n\omega \to \omega$ в $\mathrm{Dom}\,\delta^k_{\sigma,\max}$ при $n \to \infty$. По лемме 10 $f_n\omega \in \mathrm{Dom}\, d^k_{\min}$ в первом случае и $f_n\omega \in \mathrm{Dom}\,\delta^k_{\sigma,\min}$ во втором. Поэтому в силу замкнутости операторов $d^k_{\min}$ и $\delta^k_{\sigma,\min}$ имеем $d^k_{\max} = d^k_{\min}$ и $\delta^k_{\sigma,\max} = \delta^k_{\sigma,\min}$.

Известно, что символы дифференциальных операторов D^k_1 и Δ^k_1 инъективны [6]. Ввиду формул (3) и (4) порядок оператора $D^k_\sigma - D^k_1$ меньше порядков операторов D^k_σ и D^k_1, а порядок оператора $\Delta^k_\sigma - \Delta^k_1$ меньше порядков операторов Δ^k_σ и Δ^k_1. Поэтому символы операторов D^k_σ и Δ^k_σ инъективны. Следовательно, согласно теории эллиптических операторов $\operatorname{Dom} D^k_{\sigma,\max} \subset H^{k,1}_{\mathrm{loc}}(X)$, $\operatorname{Dom} \Delta^k_{\sigma,\max} \subset H^{k,2}_{\mathrm{loc}}(X)$ [7, теорема 7.1].

Пусть $\omega \in \operatorname{Dom} D^k_{\sigma,\max}$. Так как $D^k_{\sigma,\max} = \delta^k_{\sigma,\max} \times d^k_{\max}$ и $f_n\omega \to \omega$ в пространствах $\operatorname{Dom} \delta^k_{\sigma,\max}$ и $\operatorname{Dom} d^k_{\max}$, то $f_n\omega \to \omega$ в пространстве $\operatorname{Dom} D^k_{\sigma,\max}$. Поскольку $f_n\omega \in H^{k,1}_{\mathrm{loc}}(X)$ и носитель этой формы компактен, с помощью процедуры сглаживания ее можно представить как предел сходящейся в $H^{k,1}_{\mathrm{loc}}(X)$ последовательности форм из $\mathscr{D}^k(X)$, носители которых лежат в одном компакте $K \subset X$. Подпространство $H^{k,1}_K$ пространства $H^{k,1}_{\mathrm{loc}}(X)$, образованное формами с носителями в K, содержится в $\operatorname{Dom} D^k_{\sigma,\max}$, причем вложение $H^{k,1}_K \subset \operatorname{Dom} D^k_{\sigma,\max}$ непрерывно. Следовательно, $\omega \in \operatorname{Dom} D^k_{\sigma,\min}$ для любой формы $\omega \in \operatorname{Dom} D^k_{\sigma,\max}$, и тем самым $D^k_{\sigma,\max} = D^k_{\sigma,\min}$.

Пусть $\omega \in \operatorname{Dom} \Delta^k_{\sigma,\max}$. Поскольку $\omega \in H^{k,2}_{\mathrm{loc}}(X)$ и гладкая функция f_n имеет компактный носитель, получаем

$$\begin{aligned}
\bigl\|f_n\delta^k_\sigma\omega\bigr\|^2 &= \int_X \bigl(f_n\delta^k_\sigma\omega, f_n\delta^k_\sigma\omega\bigr)_x \sigma^2\,dx = \int_X \bigl(\delta^k_\sigma\omega, f_n^2\delta^k_\sigma\omega\bigr)_x \sigma^2\,dx \\
&= \int_X \bigl(\delta^k_\sigma\omega, \delta^k_\sigma f_n^2\omega\bigr)_x \sigma^2\,dx - (-1)^k \int_X \bigl(\delta^k_\sigma\omega, *^{-1}(df_n^2 \wedge *\omega)_x \sigma^2\bigr)\,dx \\
&= \int_X \bigl(d^{k-1}\delta^k_\sigma\omega, f_n^2\omega\bigr)_x \sigma^2\,dx - (-1)^k \int_X \bigl(f_n\delta^k_\sigma\omega, *^{-1}(2\cdot df_n \wedge *\omega)_x \sigma^2\bigr)\,dx \\
&\le \int_X \bigl(d^{k-1}\delta^k_\sigma\omega, f_n^2\omega\bigr)_x \sigma^2\,dx + \frac{1}{2}\bigl\|f_n\delta^k_\sigma\omega\bigr\|^2 + 2\|df_n \wedge *\omega\|^2.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\|f_n\delta^k_\sigma\omega\|^2 \le \int_X \bigl(d^{k-1}\delta^k_\sigma\omega, f_n^2\omega\bigr)_x \sigma^2\,dx + 2\|df_n \wedge *\omega\|^2. \tag{8}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
\|f_n d^k\omega\|^2 &= \int_X \bigl(d^k\omega, f_n^2 d^k\omega\bigr)_x \sigma^2\,dx = \int_X \bigl(d^k\omega, d^k f_n^2\omega\bigr)_x \sigma^2\,dx \\
&- \int_X (f_n d^k\omega, 2\cdot df_n \wedge \omega)_x \sigma^2\,dx \le \int_X \bigl(\delta^{k+1}_\sigma d^k\omega, f_n^2\omega\bigr)_x \sigma^2\,dx + \frac{1}{2}\|f_n d^k\omega\|^2 + 2\|df_n \wedge \omega\|^2.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\|f_n d^k\omega\|^2 \le \int_X \bigl(\delta^{k+1}_\sigma d^k\omega, f_n^2\omega\bigr)_x \sigma^2\,dx + 2\|df_n \wedge \omega\|^2. \tag{9}$$

Из (8) и (9) вытекает, что

$$\|f_n d^k\omega\|^2 + \bigl\|f_n\delta^k_\sigma\omega\bigr\|^2 \le 2\bigl(\Delta^k_{\sigma,\max}\omega, f_n^2\omega\bigr) + 4\|df_n \wedge \omega\|^2 + 4\|df_n \wedge *\omega\|^2. \tag{10}$$

Легко видеть, что

$$\bigl(\Delta^k_{\sigma,\max}\omega, f_n^2\omega\bigr) \to \bigl(\Delta^k_{\sigma,\max}\omega, \omega\bigr), \quad \|df_n \wedge *\omega\| \to 0, \quad \|df_n \wedge \omega\| \to 0$$

при $n \to \infty$.

В силу теоремы Беппо Леви $\|f_n d^k\omega\|^2 \to \|d^k\omega\|^2$ и $\left\|f_n \delta^k_\sigma\omega\right\|^2 \to \|\delta^k_\sigma\omega\|^2$ при $n \to \infty$. Переходя в (10) к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\|d^k\omega\|^2 + \left\|\delta^k_\sigma\omega\right\|^2 \le 2\bigl(\Delta^k_{\sigma,\max}\omega, \omega\bigr).$$

Следовательно, $d^k\omega \in L_2^{k+1}(X,\sigma)$, $\delta^k_\sigma\omega \in L_2^{k-1}(X,\sigma)$.

Пусть $\alpha, \beta \in \operatorname{Dom}\Delta^k_{\sigma,\max}$. Имеем

$$\begin{aligned}\bigl(\Delta^k_{\sigma,\max}\alpha, \beta\bigr) &= \lim_{n\to\infty}\bigl(\Delta^k_{\sigma,\max}\alpha, f_n\beta\bigr) = \lim_{n\to\infty}\bigl(d^{k-1}\delta^k_\sigma\alpha + \delta^{k+1}_\sigma d^k\alpha, f_n\beta\bigr)\\ &= \lim_{n\to\infty}\bigl(\bigl(\delta^k_\sigma\alpha, \delta^k_\sigma f_n\beta\bigr) + (d^k\alpha, d^k f_n\beta)\bigr) = \bigl(\delta^k_\sigma\alpha, \delta^k_\sigma\beta\bigr) + (d^k\alpha, d^k\beta).\end{aligned}$$

Аналогично

$$\bigl(\alpha, \Delta^k_{\sigma,\max}\beta\bigr) = \bigl(\delta^k_\sigma\alpha, \delta^k_\sigma\beta\bigr) + (d^k\alpha, d^k\beta).$$

Тем самым оператор $\Delta^k_{\sigma,\max}$ симметричен. Так как при этом сопряженный оператор к $\Delta^k_{\sigma,\max}$ есть оператор $\Delta^k_{\sigma,\min}$ и $\Delta^k_{\sigma,\min} \subset \Delta^k_{\sigma,\max}$, то $\Delta^k_{\sigma,\max} = \Delta^k_{\sigma,\min}$. Лемма доказана.

Следствие 2. *Оператор $\Delta^k_{\sigma,\min}$ самосопряжен.*

Это следствие в случае $\sigma \equiv 1$ установлено в [6].

Пусть G — замкнутое подпространство банахова пространства $\operatorname{Dom} D^k_{\sigma,\max}$, содержащее $\mathscr{D}^k(X)$. Обозначим символом

$$D^k_G : L^k_2(X,\sigma) \to L^{k-1}_2(X,\sigma) \oplus L^{k+1}_2(X,\sigma)$$

оператор, определенный следующими условиями:

$$\operatorname{Dom} D^k_G = G, \quad D^k_G(\omega) = D^k_{\sigma,\max}(\omega)$$

для произвольной формы $\omega \in G$, а символом

$$G\Delta : L^k_2(X,\sigma) \to L^k_2(X,\sigma)$$

— оператор $\bigl(D^k_G\bigr)^* D^k_G$. По теореме фон Неймана [3, гл. V, теорема 3.24] оператор $G\Delta$ является самосопряженным расширением оператора $\Delta^k_{\sigma,\min}$.

Лемма 12. *Пусть G_1 и G_2 — замкнутые подпространства пространства $\operatorname{Dom} D^k_{\sigma,\max}$, $\mathscr{D}^k(X) \subset G_1 \subset G_2$ и спектр оператора $G_2\Delta$ дискретен. Тогда спектр оператора $G_1\Delta$ дискретен.*

Доказательство. По лемме 7 оператор вложения $G_2 \subset L^k_2(X,\sigma)$ компактен. Следовательно, оператор вложения $G_1 \subset L^k_2(X,\sigma)$ компактен. По лемме 7 спектр оператора $G_1\Delta$ дискретен. Лемма доказана.

Обозначим символом $W^k(X,\sigma)$ банахово пространство $\operatorname{Dom}\bigl(d^k_{\max} : L^k_2(X,\sigma) \to L^{k+1}_2(X,\sigma)\bigr)$. Подпространство Γ пространства $W^k(X,\sigma)$ будем называть *d-подпространством*, если оно замкнуто в $W^k(X,\sigma)$ и содержит $\mathscr{D}^k(X)$. Для произвольного d-подпространства $\Gamma \subset W^k(X,\sigma)$ обозначим через $d^k_\Gamma : L^k_2(X,\sigma) \to L^{k+1}_2(X,\sigma)$ оператор, определенный следующими условиями: $\operatorname{Dom} d^k_\Gamma = \Gamma$, $d^k_\Gamma\omega = d^k\omega$ для любой формы $\omega \in \Gamma$.

Последовательность d-подпространств $\Gamma = (\Gamma^k \subset W^k(X,\sigma))_{k\in\mathbb{Z}}$ будем называть *правильной последовательностью*, если $d^k(\Gamma^k) \subset \Gamma^{k+1}$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$.

Для любой правильной последовательности $\Gamma = (\Gamma^k \subset W^k(X,\sigma))_{k\in\mathbb{Z}}$ операторы $d^k_\Gamma : L^k_2(X,\sigma) \to L^{k+1}_2(X,\sigma)$ образуют гильбертов комплекс. Обозначим через $\Delta^k_\Gamma : L^k_2(X,\sigma) \to L^k_2(X,\sigma)$ оператор $\big(d^k_\Gamma\big)^* d^k_\Gamma + d^{k-1}_\Gamma\big(d^{k-1}_\Gamma\big)^*$. Так как $d^k_\Gamma d^{k-1}_\Gamma = 0$, то $\operatorname{Ker} d^k_\Gamma + \operatorname{Ker}(d^{k-1}_\Gamma)^* = L^k_2(X,\sigma)$. По лемме 6

$$\Delta^k_\Gamma = \big(\big(d^{k-1}_\Gamma\big)^* \times d^k_\Gamma\big)^* \big((d^{k-1}_\Gamma)^* \times d^k_\Gamma\big) = G\Delta,$$

где $G^k = \operatorname{Dom}\big(d^{k-1}_\Gamma\big)^* \cap \operatorname{Dom} d^k_\Gamma$.

Лемма 7 и теорема 1 приводят к следующему критерию дискретности спектров операторов $G\Delta$ и Δ^k_Γ.

Лемма 13. *Для произвольного замкнутого подпространства G пространства $W^k(X,\sigma)$, содержащего $D^k(X)$, спектр оператора $G\Delta$ дискретен тогда и только тогда, когда оператор вложения $G \subset L^k_2(X,\sigma)$ компактен. Для произвольной правильной последовательности $\Gamma = (\Gamma^k \subset W^k(X,\sigma))_{k\in\mathbb{Z}}$ спектр оператора Δ^k_Γ дискретен тогда и только тогда, когда операторы d^{k-1}_Γ и d^k_Γ компактно разрешимы и $\dim\big(\operatorname{Ker} d^k_\Gamma/\operatorname{Im} d^{k-1}_\Gamma\big) < \infty$.*

Теорема 3. *Пусть $h : X \to X'$ — диффеоморфизм римановых многообразий, σ и σ' — весовые функции на X и X' соответственно. Предположим, что функции $|dh|$, $|dh^{-1}|$, $\sigma \circ h^{-1}/\sigma'$ и $\sigma' \circ h/\sigma$ ограничены. Тогда для любой правильной последовательности $\Gamma = (\Gamma^k \subset W^k(X',\sigma'))_{k\in\mathbb{Z}}$ последовательность $h^*(\Gamma) = (h^*(\Gamma^k) \subset W^k(X,\sigma))_{k\in\mathbb{Z}}$ правильная и спектры операторов Δ^k_Γ и $\Delta^k_{h^*(\Gamma)}$ дискретны одновременно.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы диффеоморфизм h индуцирует топологические изоморфизмы $h^* : L^k_2(X',\sigma') \to L^k_2(X,\sigma)$ и $h^* : W^k(X',\sigma') \to W^k(X,\sigma)$. Так как при этом $h^*(\mathscr{D}^k(X') = \mathscr{D}^k(X)$, для любой правильной последовательности $\Gamma = (\Gamma^k \subset W^k(X',\sigma'))_{k\in\mathbb{Z}}$ последовательность $h^*(\Gamma)$ правильная. Условия дискретности, указанные в лемме 13, выполняются для операторов Δ^k_Γ и $\Delta^k_{h^*(\Gamma)}$ одновременно. Теорема доказана.

Пусть риманово m-мерное многообразие X представлено в виде объединения двух замкнутых множеств X_- и X_+, причем X_- и X_+ — гладкие m-мерные подмногообразия, а $Y = X_- \cap X_+$ — гладкое $(m-1)$-мерное подмногообразие многообразия X, лежащее в $\operatorname{int} X$. Обозначим через i^* оператор ограничения форм с X на X_+, а через j^* оператор продолжения форм нулем с X_- на X. Пусть σ — весовая функция на X и $\Gamma = (\Gamma^k \subset W^k(X,\sigma))_{k\in\mathbb{Z}}$ — правильная последовательность d-подпространств. Положим

$$\Gamma^k_+ = i^*(\Gamma^k), \quad \Gamma^k_- = \{\omega \in W^k(X_-,\sigma) : j^*\omega \in \Gamma^k\}.$$

Последовательность $\Gamma_- = (\Gamma^k_- \subset W^k(X_-,\sigma))_{k\in\mathbb{Z}}$ является правильной, а последовательность $\Gamma_+ = (\Gamma^k \subset W^k(X_+,\sigma))_{k\in\mathbb{Z}}$ правильна, если каждое подпространство Γ^k_+ замкнуто в $W^k(X_+,\sigma)$.

Теорема 4. *Пусть $\Gamma = (\Gamma^k \subset W^k(X_+,\sigma))_{k\in\mathbb{Z}}$ — правильная последовательность d-подпространств, $j \in \mathbb{Z}_+$. Предположим, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$ существует такой непрерывный линейный оператор $\Pi^k : L^k_2(X_+,\sigma) \to L^k_2(X,\sigma)$, что $i^*\Pi^k\omega = \omega$ для любой формы $\omega \in L^k_2(X_+,\sigma)$, $\Pi^k(W^k(X_+,\sigma)) \subset W^k(X,\sigma)$, $\Pi^k(\Gamma^k_+) \subset \Gamma^k$. Тогда Γ_+ — правильная последовательность d-подпространств и спектр оператора Δ^j_Γ дискретен тогда и только тогда, когда дискретны спектры операторов $\Delta^j_{\Gamma_+}$ и $\Delta^j_{\Gamma_-}$.*

Доказательство. Поскольку операторы $\Pi^k : L_2^k(X_+, \sigma) \to L_2^k(X, \sigma)$ непрерывны и $\Pi^k(W^k(X_+, \sigma)) \subset W^k(X, \sigma)$, операторы $\Pi^k : W^k(X_+, \sigma) \to W^k(X, \sigma)$ непрерывны (см. доказательство аналогичного утверждения в лемме 9). Так как $i^*\Pi^k\omega = \omega$ для любой формы $\omega \in L_2^k(X_+, \sigma)$ и $\Pi^k(\Gamma_+^k) \subset \Gamma^k$, то $\Gamma_+^k = (\Pi^k)^{-1}(\Gamma^k)$. Следовательно, подпространство Γ_+^k замкнуто в $W^k(X_+, \sigma)$ и поэтому Γ_+ — правильная последовательность d-подпространств.

Рассмотрим гильбертовы комплексы

$$A = \big(L_2^k(X_-, \sigma), d_{\Gamma_-}^k\big)_{k\in\mathbb{Z}}, \quad B = \big(L_2^k(X, \sigma), d_{\Gamma}^k\big)_{k\in\mathbb{Z}}, \quad C = \big(L_2^k(X_+, \sigma), d_{\Gamma_+}^k\big)_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Последовательность гильбертовых комплексов

$$0 \to A \xrightarrow{j^*} B \xrightarrow{i^*} C \to 0$$

точна. Для этих комплексов операторы L_A^k, L_B^k, L_C^k совпадают с $\Delta_{\Gamma_-}^k$, Δ_{Γ}^k, $\Delta_{\Gamma_+}^k$ соответственно. По теореме 2 спектр оператора L_B^j дискретен тогда и только тогда, когда дискретны спектры операторов L_A^j и L_C^j. Теорема доказана.

Пусть многообразие $Y = X_+ \cap X_-$ обладает замкнутой окрестностью U в X, для которой существует диффеоморфизм $\varphi : [-1, 1] \times Y \to U$, удовлетворяющий следующим условиям: $\varphi(0, y) = y$, $\varphi(t, y) \in X_-$ при $t \le 0$, $\varphi(t, y) \in X_+$ при $t \ge 0$ для любого $y \in Y$. Такой диффеоморфизм φ называют *воротником подмногообразия* Y в X. Будем называть воротник φ *равномерным*, если функции $|d\varphi|$ и $|d\varphi^{-1}|$ ограничены. Будем говорить, что воротник φ *согласован с весовой функцией* σ, заданной на X, если существует такая весовая функция σ_Y на Y, что

$$\frac{1}{c}\sigma_Y(y) \le \sigma(\varphi(t, y)) \le c\sigma_Y(y)$$

для некоторой константы c и любых $t \in [-1, 1]$, $y \in Y$.

Если многообразие Y компактно, то любой его воротник является равномерным воротником, согласованным с произвольной весовой функцией на X.

Лемма 14. *Пусть $Y = X_+ \cap X_-$ обладает равномерным воротником в X, согласованным с весовой функцией σ. Тогда для каждого $k \in \mathbb{Z}$ существует такой непрерывный линейный оператор $\Pi^k : L_2^k(X_+, \sigma) \to L_2^k(X, \sigma)$, переводящий $W^k(X_+, \sigma)$ в $W^k(X, \sigma)$, что $i^*\Pi^k\omega = \omega$ для любой формы $\omega \in L_2^k(X_+, \sigma)$.*

Доказательство. Используя воротник $\varphi : [-1, 1] \times Y \to U$, согласованный с весовой функцией σ, легко построить гладкую функцию $\lambda : X \to [0, 1]$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\lambda(\varphi(t, y)) = \begin{cases} 0 & \text{при } |t| \ge 2/3, \\ 1 & \text{при } |t| \le 1/3, \end{cases} \tag{11}$$

$\lambda \equiv 0$ на $X \setminus U$, функция $|d\lambda|$ ограничена.

Рассмотрим отображение $\psi : X_+ \cup U \to X_+$, заданное условиями: $\psi(x) = x$ при $x \in X_+$, $\psi(\varphi(t, y)) = \varphi(-t, y)$ при $t \in [-1, 0]$.

Для произвольной формы $\omega \in L_2^j(X_+, \sigma)$ положим $\Pi^k\omega \equiv 0$ на $X_- \setminus U$, $\Pi^k\omega = \psi^*(\lambda\omega)$ на $U \setminus X_-$, $\Pi^k\omega = \omega$ на X_+. Тогда $\Pi^k\omega \in L_2^k(X, \sigma)$, оператор $\Pi^k : L_2^k(X_+, \sigma) \to L_2^k(X, \sigma)$ непрерывен и $\Pi^k\omega \in W^k(X, \sigma)$, если $\omega \in W^k(X_+, \sigma)$. Эти утверждения доказаны в [8, лемма 1 и доказательство леммы 4]. Равенство $i^*\Pi^k\omega = \omega$ следует непосредственно из определения формы $\Pi^k\omega$. Лемма доказана.

Семейством носителей в X называется произвольное множество Θ замкнутых в X множеств, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $F_1, F_2 \in \Theta \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \Theta$,

2) $F_1 \in \Theta$, $F_1 \subset F_2$, F_2 замкнуто в $X \Rightarrow F_2 \in \Theta$.

Для семейства носителей Θ на X и произвольного множества $Z \subset X$ символом $\Theta|_Z$ будем обозначать семейство $\{F \in \Theta : F \subset Z\}$.

Для семейства носителей Θ на X обозначим через $W^k_\Theta(X,\sigma)$ замыкание в $W^k(X,\sigma)$ подпространства, образованного всеми формами из $W^k(X,\sigma)$, носители которых содержатся в Θ. Для произвольного семейства носителей Θ на X последовательность $\big(W^k_\Theta(X,\sigma)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ — правильная последовательность d-подпространств.

Будем говорить, что равномерный воротник $\varphi : [-1,1] \times Y \to U \subset X$ и семейство носителей Θ на X *согласованы*, если $\psi^{-1}(F) \in \Theta$ для любого $F \in \Theta|_{X_+}$, где $\psi : X_+ \cup U \to X_+$ — отображение, заданное условиями: $\psi(x) = x$ при $x \in X_+$, $\psi(\varphi(t,y)) = \varphi(-t,y)$ при $t \le 0$ и $y \in Y$.

Теорема 5. *Пусть подмногообразие $Y = X_+ \cap X_-$ обладает равномерным воротником φ, согласованным с весом σ и семейством носителей Θ на X, $\Gamma^k = W^k_\Theta(X,\sigma)$. Тогда $\Gamma^k_+ = W^k_{\Theta|_{X_+}}(X_+,\sigma)$ и для произвольного $j \in \mathbb{Z}$ спектр оператора Δ^j_Γ на X дискретен тогда и только тогда, когда дискретны спектры операторов $\Delta^j_{\Gamma_+}$ на X_+ и $\Delta^j_{\Gamma_-}$ на X_-.*

Доказательство. Пусть $\Pi^k : L^k_2(X_+,\sigma) \to L^k_2(X,\sigma)$ — операторы продолжения форм, указанные в лемме 14. Из условия согласованности воротника φ с семейством носителей Θ следует, что операторы Π^k переводят формы с носителями в $\Theta|_{X_+}$ в формы с носителями в Θ. В силу непрерывности операторов $\Pi^k : W^k(X_+,\sigma) \to W^k(X,\sigma)$ получаем отсюда, что $\Pi^k(W^k_{\Theta|_{X_+}}(X_+,\sigma)) \subset \Gamma^k$. Так как $i^*\Pi^k\omega = \omega$ для форм $\omega \in L^k_2(X_+,\sigma)$, то $W^k_{\Theta|_{X_+}}(X_+,\sigma) \subset i^*(\Gamma^k) = \Gamma^k_+$. Обратное включение следует из непрерывности оператора $i^* : W^k(X,\sigma) \to W^k(X_+,\sigma)$. Следовательно, $\Gamma^k_+ = W^k_{\Theta|_{X_+}}(X_+,\sigma)$ и $\Pi^k\big(\Gamma^k_+\big) \subset \Gamma^k$. Осталось воспользоваться теоремой 4. Теорема доказана.

Каждое из следующих четырех семейств носителей на X согласовано с любым воротником многообразия $Y = X_+ \cap X_-$: ζ — семейство всех замкнутых в X множеств, c — семейство всех компактных подмножеств многообразия X, $\zeta_0 = \zeta|_{\operatorname{int} X}$, $c_0 = c|_{\operatorname{int} X}$.

Лемма 15. *Если Θ — одно из семейств носителей ζ, c, ζ_0, c_0, $\Gamma^k = W^k_\Theta(X,\sigma)$, подмногообразие $Y = X_+ \cap X_-$ обладает равномерным воротником φ, согласованным с весом σ на X, то $\Gamma^k_- = W^k_{\Theta|_{X\setminus X_+}}(X_-,\sigma)$.*

Доказательство. Очевидно, что $W^k_{\Theta|_{X\setminus X_+}}(X_-,\sigma) \subset \Gamma^k_-$. Докажем обратное включение. Предположим сначала, что $\Theta = \zeta$. Пусть $\omega \in \Gamma^k_-$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, $\widetilde{\omega} = j^*\omega$ — форма, совпадающая с ω на X_- и равная 0 на $X_+ \setminus Y$.

Рассмотрим какое-либо открытое локально конечное покрытие $V = (V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ многообразия X относительно компактными множествами V_i. Пусть $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ существует такой диффеоморфизм $h_i : X \to X$, что носитель формы $h^*(f_i\widetilde{\omega})$ содержится в $V_i \cap (X \setminus X_+)$ и $\|h^*_i(f_i\widetilde{\omega}) - f_i\widetilde{\omega}\|_{W^k(X,\sigma)} \le 2^{-i}\varepsilon$. Положим $\omega' = \sum\limits_i h^*_i(f_i\widetilde{\omega})$. Суммирование по i имеет смысл, поскольку носители форм $h^*_i(f_i\widetilde{\omega})$

образуют локально конечное в X семейство множеств. Так как

$$\widetilde{\omega}-\omega'=\sum_i(f_i\widetilde{\omega}-h_i^*(f_i\widetilde{\omega}))$$

и ряд $\sum\limits_i(f_i\widetilde{\omega}-h_i^*(f_i\widetilde{\omega}))$ сходится в $W^k(X,\sigma)$, то $\widetilde{\omega}-\omega'\in W^k(X,\sigma)$. Следовательно, $\omega'\in W^k(X,\sigma)$. Кроме того, $\|\widetilde{\omega}-\omega'\|_{W^k(X,\sigma)}\le\varepsilon$ и носитель формы ω' содержится в $X\setminus X_+$. Установлено, что в пространстве Γ_-^k формы с носителями в $X\setminus X_+$ образуют плотное подмножество. Поэтому $\Gamma_-^k=W^k_{\zeta|_{X\setminus X_+}}(X_-,\sigma)$.

Рассмотрим теперь случай $\Theta=c$. Пусть $\omega\in\Gamma_-^k$, $\widetilde{\omega}=j^*\omega$, $\varepsilon>0$ произвольно. Так как $\widetilde{\omega}\in W_c^k(X,\sigma)$, то существует такая форма $\alpha\in W^k(X,\sigma)$ с компактным носителем, что $\|\widetilde{\omega}-\alpha\|_{W^k(X,\sigma)}<\varepsilon$. Пусть $\Pi^k:W^k(X_+,\sigma)\to W^k(X,\sigma)$ — оператор продолжения форм, указанный в лемме 14, C — норма этого оператора и i^* — оператор ограничения форм с X на X_+. Ввиду того, что $i^*\widetilde{\omega}=0$, имеем

$$\|i^*\alpha\|_{W^k(X,\sigma)}\le\varepsilon,\quad \|\Pi^k i^*\alpha\|_{W^k(X,\sigma)}\le C\varepsilon.$$

Пусть $\beta=\alpha-\Pi^k i^*\alpha$. Тогда $\|\widetilde{\omega}-\beta\|_{W^k(X,\sigma)}\le(1+C)\varepsilon$ и форма β имеет компактный носитель, лежащий в X_-.

Существует такой диффеоморфизм $h:X\to X$, что носитель формы $h^*\beta$ содержится в $X\setminus X_+$ и $\|\beta-h^*(\beta)\|_{W^k(X,\sigma)}\le\varepsilon$. Тогда

$$\|\widetilde{\omega}-h^*(\beta)\|_{W^k(X,\sigma)}\le(2+C)\varepsilon.$$

Установлено, что формы с компактными носителями образуют плотное в Γ_-^k множество. Тем самым $\Gamma_-^k=W^k_{c|_{X\setminus X_+}}(X_-,\sigma)$.

Случаи $\Theta=\zeta_0$ и $\Theta=c_0$ рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть подмногообразие $Y=X_+\cap X_-$ обладает равномерным воротником φ, согласованным с весом σ на X, Θ — одно из семейств носителей ζ, c, ζ_0, c_0 на X, $\Gamma^k=W^k_{\Theta|_{X_+}}(X_+,\sigma)$, $\Gamma_0^k=W^k_{\Theta|_{X_+\setminus Y}}(X_+,\sigma)$. Тогда для каждого $j\in\mathbb{Z}$ спектры операторов Δ^j_Γ и $\Delta^j_{\Gamma_0}$ на X_+ дискретны одновременно.*

Доказательство. Предположим, что спектр оператора Δ^j_Γ дискретен. Рассмотрим многообразия

$$X'=X_+,\quad X'_+=\varphi([0,1/2]\times Y),\quad X'_-=X'\setminus\varphi([0,1/2]\times Y),$$
$$Y'=X'_+\cap X'_-=\varphi(\{1/2\}\times Y).$$

Подмногообразие Y' имеет в X' равномерный воротник, согласованный с весом σ и семейством носителей $\Theta|_{X_+}$. Пусть $(\Gamma')^k=W^k_{\Theta|_{X'}}(X',\sigma)$. По теореме 5, примененной к разложению $X'=X'_+\cup X'_-$, оператор $\Delta^j_{\Gamma'_-}$ на X'_- имеет дискретный спектр. По лемме 15 $(\Gamma')^k_-=W^k_{\Theta|_{X'_-\setminus Y'}}(X'_-,\sigma)$. Используя теорему 3, заключаем, что спектры операторов $\Delta^j_{\Gamma'_-}$ на X'_- и $\Delta^j_{\Gamma_0}$ на X_+ дискретны одновременно. Поэтому спектр оператора $\Delta^j_{\Gamma_0}$ дискретен, если дискретен спектр оператора Δ^j_Γ.

Предположим теперь, что дискретен спектр оператора $\Delta^j_{\Gamma_0}$. Рассмотрим многообразия $X''=X_+$, $X''_+=X'_-$, $X''_-=X'_+$. Пусть $(\Gamma'')^k=W^k_{\Theta|_{X_+\setminus Y}}(X_+,\sigma)$. Предыдущее рассуждение, примененное к разложению $X''=X''_+\cup X''_-$ и правильной последовательности d-подпространств Γ'', доказывает, что спектр оператора Δ^j_Γ дискретен, если дискретен спектр оператора $\Delta^j_{\Gamma_0}$. Лемма доказана.

Из теоремы 5, лемм 15 и 16 вытекает

Следствие 3. *Пусть Y обладает равномерным воротником, согласованным с весом σ на X, $\Theta = \{\zeta,\ c,\ \zeta_0,\ c_0\}$, $\Gamma^k = W^k_\Theta(X,\sigma)$, $\Gamma^k_0 = W^k_\Theta(X_-,\sigma)$, $\Gamma^k_1 = W^k_\Theta(X_+,\sigma)$. Тогда спектр оператора Δ^k_Γ на X дискретен в том и только в том случае, когда спектры операторов $\Delta^k_{\Gamma_0}$ на X_0 и $\Delta^k_{\Gamma_1}$ на X_+ дискретны.*

Лемма 17. *Пусть X — полное многообразие без края, $\varphi : [-1,1]\times Y \to U \subset X$ — равномерный воротник подмногообразия $Y = X_- \cap X_+$, согласованный с весом σ на X, $U_+ = \varphi([0,1]\times Y)$, $\Gamma^k = W^k_{c_0}(X_+,\sigma)$, $\Gamma^k_1 = W^k_{c_0}(U_+,\sigma)$, $F\Delta^k_{\sigma,\min}$ — расширение по Фридрихсу оператора $\Delta^k_{\sigma,\min} : L^k_2(X_+,\sigma) \to L^k_2(X_+,\sigma)$. Тогда спектр оператора Δ^k_Γ дискретен в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*

(1) *спектр оператора $F\Delta^k_{\sigma,\min}$ дискретен,*

(2) *операторы*

$$d^{k-1}_{\Gamma_1} : L^{k-1}_2(U_+,\sigma) \to L^k_2(U_+,\sigma), \quad d^k_{\Gamma_1} : L^k_2(U_+,\sigma) \to L^{k+1}_2(U_+,\sigma)$$

компактно разрешимы и $\dim\bigl(\operatorname{Ker} d^k_{\Gamma_1} / \operatorname{Im} d^{k-1}_{\Gamma_1}\bigr) < \infty$.

Доказательство. По лемме 7 работы [2] $F\Delta^k_{\sigma,\min} = \bigl(D^k_{\sigma,\min}\bigr)^* \circ D^k_{\sigma,\min}$, где $D^k_{\sigma,\min}$ — замыкание оператора $\delta^k_\sigma \times d^k : L^k_2(X_+,\sigma) \to L^{k-1}_2(X_+,\sigma) \times L^{k+1}_2(X_+,\sigma)$, заданного на $\mathscr{D}^k(X_+)$.

Предположим, что спектр оператора Δ^k_Γ дискретен. Так как $\operatorname{Dom}\bigl(D^k_{\sigma,\min}\bigr) = \operatorname{Dom}(d^{k-1}_\Gamma)^* \cap \operatorname{Dom}(d^k_\Gamma)$, по лемме 12 спектр оператора $F\Delta^k_{\sigma,\min}$ дискретен.

Пусть $X' = X_+$, $X'_- = \varphi([0,1/2]\times Y)$, $X'_+ = X_+ \setminus \varphi([0,1/2]\times Y)$, $Y' = \varphi(\{1/2\}\times Y)$. Тогда $X' = X'_+ \cup X'_-$, $Y' = X'_+ \cap X'_-$, Y' обладает в X' равномерным воротником, согласованным с весом σ.

По теореме 5 спектр оператора $\Delta^k_{\Gamma_-} : L^k_2(X'_-,\sigma) \to L^k_2(X'_-,\sigma)$ дискретен. По лемме 15 $\Gamma^k_- = W^k_{c_0}(X'_-,\sigma)$. По теореме 1 выполнено условие (2).

Предположим теперь, что выполнены условия (1) и (2).

Пусть $G^k = \operatorname{Dom}\bigl(\bigl(d^{k-1}_\Gamma\bigr)^* \times d^k_\Gamma\bigr)$, $G^k_1 = \operatorname{Dom}\bigl(\bigl(d^{k-1}_{\Gamma_1}\bigr)^* \times d^k_{\Gamma_1}\bigr)$. По теореме 1 компактны операторы вложения $\operatorname{Dom}\bigl(D^k_{\sigma,\min}\bigr) \subset L^k_2(X_+,\sigma)$ и $G^k_1 \subset L^k_2(U_+,\sigma)$. Докажем, что компактен оператор вложения $G^k \subset L^k_2(X_+,\sigma)$. Пусть $\{\omega_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ — произвольная ограниченная последовательность в G^k. Наличие равномерного воротника φ у подмногообразия Y позволяет построить гладкую функцию $a : X_+ \to [0,1]$, удовлетворяющую следующим условиям: $a(x) \equiv 1$ на $\varphi([0,1/3]\times Y)$, $a(x) \equiv 0$ на $X \setminus \varphi([0,2/3]\times Y)$, функция $|da|$ ограничена на X_+. Используя формулы (6) и (7), легко проверить, что $\{a\omega_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ — ограниченная последовательность в G^k_1. Установим, что $\{(1-a)\omega_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ — ограниченная последовательность в $\operatorname{Dom}\bigl(D^k_{\sigma,\min}\bigr)$. Пусть $f_n : X \to [0,1]$ — последовательность гладких функций такая же, как в доказательстве леммы 11. Каждая форма $\{f_n\cdot(1-a)\omega_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ принадлежит G^k и имеет компактный носитель. По лемме 10 $f_n\cdot(1-a)\omega_\nu \in \operatorname{Dom}\bigl(D^k_{\sigma,\min}\bigr)$. Так как для каждого ν последовательность $\{f_n\cdot(1-a)\omega_\nu\}_{n\in\mathbb{Z}}$ сходится при $n\to\infty$ к $(1-a)\omega_\nu$ в пространстве G^k, то $(1-a)\omega_\nu \in \operatorname{Dom}\bigl(D^k_{\sigma,\min}\bigr)$. Вложение $\operatorname{Dom}(D^k_{\sigma,\min}) \subset G^k$ изометрично, значит, последовательность $\{(1-a)\omega_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ ограничена в $\operatorname{Dom}\bigl(D^k_{\sigma,\min}\bigr)$. Так как операторы вложения $\operatorname{Dom}\bigl(D^k_{\sigma,\min}\bigr) \subset L^k_2(X_+,\sigma)$ и $G^k_1 \subset L^k_2(U_+,\sigma)$ компактны, существуют сходящиеся в $L^k_2(X_+,\sigma)$ подпоследовательности $\{a\omega_{\nu_i}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{(1-a)\omega_{\nu_i}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ последовательностей $\{a\omega_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ и $\{(1-a)\omega_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ соответственно. Установлено, что оператор вложения $G^k \subset L^k_2(X_+,\sigma)$ компактен. По теореме 1 спектр оператора Δ^k_Γ дискретен. Лемма доказана.

Из следствия теоремы 5 и леммы 17 вытекает следующий результат.

Теорема 6. *Пусть X — полное риманово многообразие (без края), $X = X_+ \cup X_-$ и выполнены следующие условия:*

(1) *подмногообразие $Y = X_+ \cap X_-$ имеет равномерный воротник $\varphi : [-1,1] \times Y \to U \subset X$, согласованный с весом σ на X,*

(2) *операторы d_Γ^{k-1} и d_Γ^k компактно разрешимы,*

(3) $\dim\bigl(\operatorname{Ker} d_\Gamma^k / \operatorname{Im} d_\Gamma^{k-1}\bigr) < \infty$, где $\Gamma^k = W_{c_0}^k(U,\sigma)$.

Тогда спектр оператора $F\Delta_{\sigma,\min}^k : L_2^k(X,\sigma) \to L_2^k(X,\sigma)$ дискретен в том и только в том случае, когда дискретны спектры операторов

$$F\Delta_{\sigma,\min}^k : L_2^k(X_+,\sigma) \to L_2^k(X_+,\sigma), \quad F\Delta_{\sigma,\min}^k : L_2^k(X_-,\sigma) \to L_2^k(X_-,\sigma).$$

Если подмногообразие Y компактно, то условия (1)–(3) теоремы 6 выполнены автоматически [9, 10]. Поэтому в случае полного многообразия X и компактного разреза Y спектр оператора $F\Delta_{\sigma,\min}^k$ на X дискретен тогда и только тогда, когда дискретны спектры операторов $F\Delta_{\sigma,\min}^k$ на X_+ и X_-. Этот последний результат можно рассматривать как вариант принципа расщепления из [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963.
2. *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 573–590.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
4. *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Гомологические аспекты теории банаховых комплексов // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 893–904.
5. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Об одном свойстве операторов регуляризации де Рама // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 2. С. 104–111.
6. *Gaffney M. P.* The harmonic operator for exterior differential forms // Proc. Nat. Acad. Sci. 1951. V. 37. P. 48–50.
7. *Шварц Л.* Комплексные многообразия. Эллиптические уравнения. М.: Мир, 1964.
8. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Интегральное представление интеграла дифференциальной формы // Функциональный анализ и математическая физика. Новосибирск: Наука, 1985. С. 53–87.
9. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О нормальной и компактной разрешимости линейных операторов // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 49–59.
10. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* L_p-когомологии римановых многообразий // Исследования по геометрии и математическому анализу. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1987. Т. 7. С. 101–116. (Тр. ИМ СО АН СССР).
11. *Eichhorn J.* Spektraltheorie offener Riemannscher Mannigfaltigkeiten mit einer rotationssymmetrischen Metrik // Math. Nachr. 1983. Bd 144. S. 23–51.

Статья поступила 20 октября 2005 г.

Кузьминов Владимир Иванович, Шведов Игорь Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
shvedov@math.nsc.ru