Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 517.955

МЕТОД РИМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СО СТАРШЕЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В $\mathbb{R}^n$

А. Н. Миронов

Аннотация: Предложен вариант метода Римана решения задачи Коши для линейного уравнения с переменными коэффициентами со старшей частной производной.

Ключевые слова: метод Римана, задача Коши.

Здесь предлагается вариант метода Римана решения задачи Коши для уравнения со старшей частной производной общего вида

$$L(u) \equiv \sum_{\substack{0\le q_i\le m_i,\\ i=\overline{1,n}}} a_{q_1q_2\dots q_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)u_{x_1^{q_1}x_2^{q_2}\dots x_n^{q_n}} = f(x_1,x_2,\dots,x_n), \quad a_{m_1m_2\dots m_n}\equiv 1, \tag{1}$$

порядок уравнения (1) равен $m = m_1+m_2+\dots+m_n$. Уравнение (1) можно переписать в виде

$$(D+M)u = f(x_1,x_2,\dots,x_n),$$

где $D=\partial^m/\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}\dots\partial x_n^{l_n}$, $l_1+l_2+\dots+l_n=m$, M — линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий лишь производные, получаемые из D отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования.

Метод Римана хорошо известен в теории уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными [1, с. 62–67; 2, с. 250–258; 3, с. 446–457]. Для других частных случаев (1) различные варианты метода Римана предлагались в работах [4–14].

1. Считаем, что коэффициенты (1) удовлетворяют включениям $a_{q_1q_2\dots q_n}\in C^{(q_1,q_2,\dots,q_n)}$, $f\in C$ в замыкании рассматриваемой области E (*областью* всюду будем называть открытое связное множество). Принадлежность классу $C^{(q_1,q_2,\dots,q_n)}(\overline{E})$ означает существование и непрерывность всех производных $\partial^{l_1+l_2+\dots+l_n}/\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}\dots\partial x_n^{l_n}$, $l_i=\overline{0,q_i}$, $i=\overline{1,n}$, на множестве $\overline{E}$. Введем для (1) функцию Римана $R=R(x_1,x_2,\dots,x_n)$ как решение интегрального уравнения

$$R(x_1,x_2,\dots,x_n)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{Q_{k,n}}\int\limits_{\xi_{q_1}}^{x_{q_1}}\int\limits_{\xi_{q_2}}^{x_{q_2}}\cdots\int\limits_{\xi_{q_k}}^{x_{q_k}}F_{q_1q_2\dots q_k}(x_1,x_2,\dots,x_n,\alpha_{q_1},\alpha_{q_2},\dots,\alpha_{q_k})$$
$$\times R(x_1,x_2,\dots,x_{q_1-1},\alpha_{q_1},x_{q_1+1},\dots,x_{q_k-1},\alpha_{q_k},x_{q_k+1},\dots,x_n)\,d\alpha_{q_k}\dots d\alpha_{q_2}d\alpha_{q_1}=1, \tag{2}$$

где вторая сумма берется по множеству всех упорядоченных наборов индексов $Q_{k,n} = \{(q_1, q_2, \dots, q_k) \mid 1 \le q_1 < q_2 < \dots < q_k \le n\}$,

$$F_{q_1 q_2 \dots q_k}(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \dots, \alpha_{q_k}) = \sum_{p_{q_1}=0}^{m_{q_1}-1} \sum_{p_{q_2}=0}^{m_{q_2}-1} \cdots \sum_{p_{q_k}=0}^{m_{q_k}-1} (-1)^{\sum_{i=1}^{k}(m_{q_i}-p_{q_i})}$$
$$\times a_{p_1 p_2 \dots p_n}(x_1, x_2, \dots, x_{q_1-1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1+1}, \dots, x_{q_k-1}, \alpha_{q_k}, x_{q_k+1}, \dots, x_n)$$
$$\times \prod_{j=1}^{k} \frac{(x_{q_j} - \alpha_{q_j})^{m_{q_j}-p_j-1}}{(m_{q_j} - p_j - 1)!},$$

причем если $i \ne q_j$, то $p_i = 0$. Здесь $x_i, \alpha_i \in [\xi_i, \eta_i]$, $i = \overline{1,n}$. Пусть $\Omega = [\xi_1, \eta_1] \times [\xi_2, \eta_2] \times \dots \times [\xi_n, \eta_n] \subset \overline{E}$. Известно, что решение (2) существует и единственно в классе $C(\Omega)$ [11, с. 46]. Как обычно (см., например, [1, с. 63]), считаем R функцией как от переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, так и от параметров $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, т. е. $R = R(x_1, x_2, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Из (2) следует, что $R(x_1, \dots, x_n; x_1, \dots, x_n) \equiv 1$.

Рассмотрим конструкции

$$A_{l_1 l_2 \dots l_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$
$$= \sum_{s_1=0}^{l_1} \sum_{s_2=0}^{l_2} \cdots \sum_{s_n=0}^{l_n} (-1)^{\sum_{i=1}^{n} s_i} (a_{m_1-s_1, m_2-s_2, \dots, m_n-s_n} R)_{x_1^{l_1-s_1} x_2^{l_2-s_2} \dots x_n^{l_n-s_n}}, \quad (3)$$
$$0 \le l_i \le m_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Всего имеется $(m_1+1)(m_2+1)\dots(m_n+1)$ конструкций вида (3) (как и коэффициентов уравнения (1)), причем $A_{m_1 m_2 \dots m_n} = 0$ — сопряженное к (1) уравнение $L^*(R) = 0$, а $A_{00\dots0} \equiv R$.

Из уравнения (2) вытекают тождества

$$A_{l_1 l_2 \dots l_n}(x_1, x_2, \dots, x_{q_1-1}, \xi_{q_1}, x_{q_1+1}, \dots, x_{q_k-1}, \xi_{q_k}, x_{q_k+1}, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \equiv 0 \quad (4)$$

при $l_{q_1} \le m_{q_1-1}, \dots, l_{q_k} \le m_{q_k-1}$, $l_r = m_r$, $r \ne q_i$, $i = \overline{1,k}$. Покажем это. Дифференцируем (2) l_1 раз по x_1, l_2 раз по x_2, и т. д., l_n раз по x_n, после чего полагаем $x_{q_1} = \xi_{q_1}$, $x_{q_2} = \xi_{q_2}, \dots, x_{q_k} = \xi_{q_k}$, где $l_{q_1} \le m_{q_1-1}$, $l_{q_2} \le m_{q_2-1}, \dots, l_{q_k} \le m_{q_k-1}$, а $l_r = m_r$ при $r \ne q_i$, $i = \overline{1,k}$. Тогда

$$v_{x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}} + \sum_{p_1=m_1-l_1}^{m_1-1} \sum_{p_2=m_2-l_2}^{m_2-1} \cdots \sum_{p_n=m_n-l_n}^{m_n-1} (-1)^{\sum_{i=1}^{n} m_i-p_i}$$
$$\times (a_{p_1 p_2 \dots p_n} v)_{x_1^{l_1+p_1-m_1} x_2^{l_2+p_2-m_2} \dots x_n^{l_n+p_n-m_n}} = 0. \quad (5)$$

Ясно, что (5) есть равенство

$$A_{l_1 l_2 \dots l_n}(x_1, x_2, \dots, x_{q_1-1}, \xi_{q_1}, x_{q_1+1}, \dots, x_{q_k-1}, \xi_{q_k}, x_{q_k+1}, \dots, x_n; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$$

(достаточно положить $s_1 = m_1 - p_1$, $s_2 = m_2 - p_2, \dots, s_n = m_n - p_n$).

2. Центральную роль в дальнейшем изложении играет тождество

$$RL(u) \equiv \sum_{\substack{p_i \le m_i, \sum p_i < \sum m_i, \\ 0 \le l_i \le 1, i = \overline{1,n}}} (-1)^{\sum_{i=1}^{n} p_i} (A_{p_1 p_2 \dots p_n} u_{x_1^{m_1-l_1-p_1} x_2^{m_2-l_2-p_2} \dots x_n^{m_n-l_n-p_n}})_{x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}}, \quad (6)$$

где p_i, m_i, l_i — целые неотрицательные числа, справедливое для любой функции класса $C^{(m_1,\dots,m_n)}$. В сумме (6) каждое слагаемое встречается лишь один раз и определяется конструкцией $A_{p_1p_2\dots p_n}$ (точнее, набором $(p_1,p_2,\dots,p_n)$). Формула (6) строится по следующему правилу. Возьмем набор $(p_1,p_2,\dots,p_n)$, затем определим набор $(l_1,l_2,\dots,l_n)$ так, чтобы

$$p_1+l_1\le m_1,\ p_2+l_2\le m_2,\dots,p_n+l_n\le m_n,$$

при этом берутся наибольшие значения $l_1,l_2,\dots,l_n$ (т. е. $l_i=1$, если $p_i<m_i$, $l_i=0$, если $p_i=m_i$). Эти наборы $(p_1,p_2,\dots,p_n)$, $(l_1,l_2,\dots,l_n)$ однозначно определяют слагаемое из (6).

Чтобы доказать тождество (6), достаточно показать, что его правая часть после раскрытия скобок, приведения подобных и добавления и вычитания выражения $Ra_{00\dots0}u$ дает

$$RL(u)+(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i+1}uL^*(R), \tag{7}$$

в результате из (6) получаем тождество, поскольку R является решением сопряженного уравнения (см. (4) при $l_i=m_i$, $i=\overline{1,n}$). Для этого рассмотрим те слагаемые (6), в которых встречается коэффициент $a_{r_1r_2\dots r_n}$. Если мы покажем, что из $a_{r_1r_2\dots r_n}$ после приведения подобных в (6) получим

$$Ra_{r_1r_2\dots r_n}u_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}}+(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(2m_i-r_i)+1}(a_{r_1r_2\dots r_n}R)_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}}u, \tag{8}$$

то докажем требуемое — все слагаемые вида (8) и приведут к

$$RL(u)+(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i+1}uL^*(R).$$

Коэффициент $a_{r_1r_2\dots r_n}$ встречается в конструкциях $A_{p_1p_2\dots p_n}$, в которых

$$m_1-p_1\le r_1,\ m_2-p_2\le r_2,\dots,m_n-p_n\le r_n.$$

В каждой такой конструкции $a_{r_1r_2\dots r_n}$ встречается только один раз. Ввиду (3)

$$s_1=m_1-r_1,\ s_2=m_2-r_2,\dots,s_n=m_n-r_n,$$

следовательно, в соответствующей конструкции $A_{p_1p_2\dots p_n}$ коэффициент $a_{r_1r_2\dots r_n}$ присутствует в слагаемом

$$(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i)}(a_{r_1r_2\dots r_n}R)_{x_1^{p_1+r_1-m_1}x_2^{p_2+r_2-m_2}\dots x_n^{p_n+r_n-m_n}}. \tag{9}$$

Все такие слагаемые одного знака (поскольку m_i, r_i — фиксированные величины). Таким образом, суммируя все слагаемые (9) в правой части (6), получаем

$$\sum_{\substack{m_i-r_i\le p_i,\\ 0\le l_i\le 1,i=\overline{1,n}}}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i+p_i)}\big((a_{r_1r_2\dots r_n}R)_{x_1^{p_1+r_1-m_1}x_2^{p_2+r_2-m_2}\dots x_n^{p_n+r_n-m_n}}$$
$$\times u_{x_1^{m_1-l_1-p_1}x_2^{m_2-l_2-p_2}\dots x_n^{m_n-l_n-p_n}}\big)_{x_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}}. \tag{10}$$

Отметим, что сумма порядков всех производных по x_i в каждом из слагаемых суммы (10) дает r_i.

Для доказательства того, что из (10) вытекает (8), используем следующее утверждение.

Теорема 1. *Имеет место тождество*

$$\sum_{\substack{m_i-r_i\le p_i,\\ 0\le l_i\le 1, i=\overline{1,n}}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i+p_i)} \big(v_{x_1^{p_1+r_1-m_1} x_2^{p_2+r_2-m_2}\dots x_n^{p_n+r_n-m_n}}$$
$$\times\, u_{x_1^{m_1-l_1-p_1} x_2^{m_2-l_2-p_2}\dots x_n^{m_n-l_n-p_n}}\big)_{x_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}}$$
$$= vu_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}} + (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(2m_i-r_i)+1} uv_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}}, \qquad (11)$$

где сумма в левой части строится по тому же правилу, что и сумма (6), n, r_i, m_i *— фиксированные целые неотрицательные числа,* u, v *— функции класса* $C^{(r_1,r_2,\dots,r_n)}$.

Доказательство проведем методом математической индукции. Базис индукции: при

$$m_1 = 1,\dots,m_n = 1, \quad r_1 = 1,\ r_2 = 0,\dots,r_n = 0$$

формула (11) представляет собой очевидное равенство $(vu)_{x_1} = v_{x_1}u + vu_{x_1}$.

Пусть при фиксированных m_i, r_i, $i = \overline{1,n}$, тождество (11) выполняется. Добавим еще одно дифференцирование по переменной x_n, т. е. от набора $(r_1, r_2,\dots,r_{n-1},r_n)$ перейдем к набору $(r_1,r_2,\dots,r_{n-1},r_n+1)$. Имеем

$$S = \sum_{\substack{m_i-r_i\le p_i, i=\overline{1,n-1},\\ m_n-r_n\le p_n+1, 0\le l_j\le 1}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i+p_i)-1} \big(v_{x_1^{p_1+r_1-m_1}\dots x_{n-1}^{p_{n-1}+r_{n-1}-m_{n-1}} x_n^{p_n+r_n-m_n+1}}$$
$$\times\, u_{x_1^{m_1-l_1-p_1}\dots x_{n-1}^{m_{n-1}-l_{n-1}-p_{n-1}} x_n^{m_n-l_n-p_n}}\big)_{x_1^{l_1}\dots x_{n-1}^{l_{n-1}} x_n^{l_n}}$$
$$= (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i)-1} \sum_{\substack{m_i-r_i\le p_i,\\ i=\overline{1,n}, 0\le l_j\le 1}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i} \big((v_{x_n})_{x_1^{p_1+r_1-m_1} x_2^{p_2+r_2-m_2}\dots x_n^{p_n+r_n-m_n}}$$
$$\times\, u_{x_1^{m_1-l_1-p_1} x_2^{m_2-l_2-p_2}\dots x_n^{m_n-l_n-p_n}}\big)_{x_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}}$$
$$+ (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i)-1} \sum_{\substack{m_i-r_i\le p_i, i=\overline{1,n-1},\\ m_n-r_n-1=p_n, 0\le l_j\le 1}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n-1}p_i+m_n-r_n-1}$$
$$\times\, \big(v_{x_1^{p_1+r_1-m_1} x_2^{p_2+r_2-m_2}\dots x_{n-1}^{p_{n-1}+r_{n-1}-m_{n-1}}}$$
$$\times\, u_{x_1^{m_1-l_1-p_1} x_2^{m_2-l_2-p_2}\dots x_{n-1}^{m_{n-1}-l_{n-1}-p_{n-1}} x_n^{r_n}}\big)_{x_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_{n-1}^{l_{n-1}} x_n}. \qquad (12)$$

В правой части (12) первая сумма содержит внутри скобок все производные v по x_n, а вторая не содержит внутри скобок производных v по x_n. Применяя предположение индукции к первой сумме, получаем

$$-v_{x_n}u_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_{n-1}^{r_{n-1}}x_n^{r_n}} - (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(2m_i-r_i)+1} uv_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_{n-1}^{r_{n-1}}x_n^{r_n+1}}. \qquad (13)$$

Вторая сумма дает (также используем предположение индукции)

$$(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(m_i-r_i)-1} \sum_{\substack{m_i-r_i\le p_i, i=\overline{1,n-1},\\ m_n-r_n-1=p_n, 0\le l_j\le 1}} (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n-1}p_i+m_n-r_n-1}$$
$$\times \big(v_{x_1^{p_1+r_1-m_1}x_2^{p_2+r_2-m_2}\dots x_{n-1}^{p_{n-1}+r_{n-1}-m_{n-1}}}$$
$$\times u_{x_1^{m_1-l_1-p_1}x_2^{m_2-l_2-p_2}\dots x_{n-1}^{m_{n-1}-l_{n-1}-p_{n-1}}x_n^{r_n}}\big)_{x_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_{n-1}^{l_{n-1}}x_n}$$
$$= \big(vu_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_{n-1}^{r_{n-1}}x_n^{r_n}} + (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(2m_i-r_i)+1} u_{x_n^{r_n}}v_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_{n-1}^{r_{n-1}}}\big)_{x_n}$$
$$+ (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}r_i}\big(v_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_{n-1}^{r_{n-1}}}u_{x_n^{r_n}}\big)_{x_n} = v_{x_n}u_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_{n-1}^{r_{n-1}}x_n^{r_n}} + vu_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_{n-1}^{r_{n-1}}x_n^{r_n+1}}. \tag{14}$$

Складывая (13) и (14), получаем, что (12) принимает вид

$$S = vu_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_{n-1}^{r_{n-1}}x_n^{r_n+1}} + (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(2m_i-r_i)+2m_n-(r_n+1)+1} uv_{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n+1}}.$$

Теорема доказана.

Чтобы убедиться в том, что (10) дает (8), достаточно положить в (11) $v \equiv a_{r_1r_2\dots r_n}R$. Следовательно, формула (6) справедлива.

3. Общая схема дальнейших рассуждений аналогична приведенной в [11, с. 79–88]. В ориентированном системой координат $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим поверхность S класса C^{m-1}, заданную уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = x_1(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}),\\ x_2 = x_2(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n = x_n(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}), \end{cases} \qquad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \mu_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \mu_1}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial x_1}{\partial \mu_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \mu_{n-1}} \end{pmatrix} = n-1,$$

$(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}) \in G$, где G — область пространства $\mathbb{R}^{n-1}$. Считаем, что S в каждой своей точке имеет касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей. Выберем точку $P\big(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\big)$ так, чтобы плоскости $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$ вырезали из поверхности S ограниченный участок S^0. Обозначим через D^0 конечную область пространства $\mathbb{R}^n$, ограниченную плоскостями $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \dots$, $x_n = x_n^0$ и поверхностью S^0. Считаем ориентацию области D^0 положительной.

Регулярным в области D^0 решением уравнения (1) назовем решение, непрерывное в D^0 вместе со всеми входящими в это уравнение производными.

Задача Коши. *Найти регулярное в области D^0 решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \mathbf{l}^k}\right|_{S^0} = \psi_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{15}$$

$\psi_k \in C^{m-k}(\overline{S^0})$, *а* $\vec{\mathbf{l}}$ — *заданное на S некасательное к этой поверхности поле направлений.*

Проведем через точку $M(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in D^0$ плоскости $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \dots$, $x_n = \xi_n$. Получим область $D \subset D^0$, граница которой образована указанными плоскостями и частью поверхности S^0, которую обозначим через S^1. Ясно, что для решения задачи Коши достаточно найти значение решения уравнения (1) в точке M. Это достигается путем интегрирования тождества (6) по области D с использованием общей формулы Стокса [15, с. 246]

$$\int\limits_D \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k = \int\limits_{\partial D} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} A_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_k, \quad (16)$$

где ∂D — граница D.

Рассмотрим совокупность ориентированных многообразий, обозначаемых символами S^1, D и ∂D с индексами, являющимися комбинациями из $1, 2, \ldots, n-1$ различных цифр $1, 2, \ldots, n$ (каждая из которых соответствует номеру переменной). При этом S^1- и D-многообразия с индексами являются пересечениями соответственно S^1 и D с соответствующими плоскостями, а ∂D-многообразия с индексами — краями соответствующих D-многообразий [11, с. 80]. Например, S^1_{12} — множество точек поверхности S^1, лежащих в плоскостях $x_1 = \xi_1$ и $x_2 = \xi_2$. Ясно, что геометрически S^1-многообразия содержатся в ∂D-многообразиях с теми же индексами, а D-многообразия — в ∂D-многообразиях с теми же индексами без последнего. Например, S^1_2 — часть ∂D_2, D_{312} — часть ∂D_{31}. Ориентации ∂D-многообразий считаем согласованными с ориентациями соответствующих D-многообразий. В результате будут определены все введенные ориентированные многообразия. Два из рассмотренных D-многообразий или S^1-многообразий геометрически совпадают, если их индексы образованы одним и тем же неупорядоченным набором переменных. При этом если индексы одного из них получаются четной перестановкой индексов другого, то ориентации этих многообразий совпадают, а в случае нечетной перестановки ориентации противоположны.

Пусть поле направлений $\vec{\mathbf{l}}$ задано вектором

$$\vec{\mathbf{l}}(\mathbf{l}_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \ldots, \mathbf{l}_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})), \quad \vec{\mathbf{l}} \in C^{m-1}(G),$$

причем $|\vec{\mathbf{l}}| \equiv 1$. Введем систему координат, связанную с поверхностью S:

$$x_i = x_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}) + \mathbf{l}_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})\mu_n, \quad i = \overline{1, n}, \ \mu_n \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Поле направлений $\vec{\mathbf{l}}$ по условию не касательно к S, следовательно, существует обратное преобразование координат $\mu_i = \mu_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ класса C^{m-1} в окрестности поверхности S [16, с. 495].

Введем обозначения: $Q = \{1, 2, \ldots, n\}$, $Q_n^{k,r} = \{(q_1, q_2, \ldots, q_n) \mid \{q_j \mid 1 \leq j \leq n\} = \{1, 2, \ldots, n\}, q_1 < \cdots < q_k, q_{k+r} < \cdots < q_n\}$, $r = 1, 2$,

$$B_{q_1} = \sum_{\substack{0 \leq l_{q_i} \leq 1, \\ i=\overline{2,n}, l_{q_1}=1, \\ p_r \leq m_r, r=\overline{1,n}}} \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^{n} p_i}}{\sum_{i=1}^{n} l_{q_i}} \left(A_{p_1 \ldots p_n} u_{x_{q_1}^{m_{q_1}-p_{q_1}-1} x_{q_2}^{m_{q_2}-p_{q_2}-l_{q_2}} \ldots x_{q_n}^{m_{q_n}-p_{q_n}-l_{q_n}}}\right)_{x_{q_2}^{l_{q_2}} \ldots x_{q_n}^{l_{q_n}}}, \ldots,$$

$$
\begin{aligned}
B_{q_1\dots q_k} = &\sum_{\substack{0\le l_{q_i}\le 1,\\ i=\overline{k+1,n},\\ l_{q_j}=1, j=\overline{1,k},\\ p_r\le m_r, r=\overline{1,n}}} \frac{(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}}{\prod\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=j}^{n} l_{q_i}} \\
&\times \left(A_{p_1\dots p_n} u_{x_{q_1}^{m_{q_1}-p_{q_1}-1} x_{q_2}^{m_{q_2}-p_{q_2}-1}\dots x_{q_k}^{m_{q_k}-p_{q_k}-1}\dots x_{q_n}^{m_{q_n}-p_{q_n}-l_{q_n}}}\right)_{x_{q_{k+1}}^{l_{q_{k+1}}}\dots x_{q_n}^{l_{q_n}}}.
\end{aligned}
$$

Конструкции $B_{q_1\dots q_k}$, получающиеся перестановкой индексов, совпадают.

Запишем правую часть тождества (6) в дивергентной форме

$$
RL(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial x_i}. \tag{18}
$$

Пусть u — регулярное решение уравнения (1). Тогда, интегрируя (18) по области D и применяя общую формулу Стокса (16) при $k = n$, получим

$$
\int\limits_{D} Rf\,dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int\limits_{\partial D} \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} B_{q_1} dx_{q_2}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}.
$$

Заменим интеграл по множеству ∂D суммой интегралов по его составляющим:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\partial D} \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} B_{q_1} dx_{q_2}\wedge\dots\wedge dx_{q_n} &= \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} \int\limits_{D_{q_1}} B_{q_1} dx_{q_2}\wedge\dots\wedge dx_{q_n} \\
&+ \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} \int\limits_{S^1} B_{q_1} dx_{q_2}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Учтем, что входящие в B_{q_1} слагаемые, соответствующие $l_{q_2} = l_{q_3} = \dots = l_{q_n} = 0$, тождественно равны нулю на D_{q_1} в силу (4). Поэтому B_{q_1} на D_{q_1} можно снова записать в дивергентном виде

$$
B_{q_1} = \sum_{i\in Q\setminus\{q_1\}} \frac{\partial B_{q_1 i}}{\partial x_i}. \tag{20}
$$

Подставив (20) в первую сумму правой части (19), применяем формулу Стокса:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} \int\limits_{D_{q_1}} B_{q_1} dx_{q_2}\wedge\dots\wedge dx_{q_n} \\
&= 2! \sum_{Q_n^{2,1}} \sigma(q_1,\dots,q_n) \int\limits_{D_{q_1 q_2}} B_{q_1 q_2} dx_{q_3}\wedge\dots\wedge dx_{q_n} \\
&+ \sum_{Q_n^{1,2}} \sigma(q_1,\dots,q_n) \int\limits_{S^1_{q_1}} B_{q_1 q_2} dx_{q_3}\wedge\dots\wedge dx_{q_n},
\end{aligned} \tag{21}
$$

где $\sigma(q_1,\dots,q_n)$ — знак перестановки $\binom{1\dots n}{q_1\dots q_n}$. При получении (21) мы перешли от интеграла по множеству D_{q_1} к интегралу по его границе ∂D_{q_1}, разбив затем множество ∂D_{q_1} на составляющие. При этом учли, что D_{ij} и D_{ji} совпадают как множества, но имеют противоположные ориентации, т. е. в процессе вычислений появляются одинаковые интегралы (их количество равно 2) по одной области с точностью до ориентации. Нетрудно заметить, что с учетом знаков эти члены оказываются равными, поэтому мы оставляем интеграл с коэффициентом 2! по D-многообразию с упорядоченным набором индексов. Знак перед ним можно записать в виде $\sigma(q_1,\dots,q_n)$.

Будем продолжать этот процесс, т. е. заменять интегралы по областям $\partial D_{q_1\dots q_p}$ суммами интегралов по их составляющим, а затем представлять подынтегральные выражения интегралов по областям $D_{q_1\dots q_p q_{p+1}}$ в дивергентном виде (что возможно в силу тождеств (4)). При этом, как указано выше, будут появляться одинаковые интегралы. Например, при фиксированном множестве $\{q_i\,|\,1\le i\le k\}$ будет $k!$ интегралов от одного выражения по областям $D_{h_1\dots h_k}$, где $(h_1,\dots,h_k)$ — всевозможные перестановки $(q_1,\dots,q_k)$. С учетом знаков все эти $k!$ интегралов равны между собой.

Итак, слагаемые в $B_{q_1q_2}$ при $l_{q_3}=l_{q_4}=\dots=l_{q_n}=0$ тождественно равны нулю на $D_{q_1q_2}$ в силу (4), поэтому $B_{q_1q_2}$ на $D_{q_1q_2}$ можно записать в дивергентном виде:

$$B_{q_1q_2}=\sum_{i\in Q\setminus\{q_1,q_2\}}\frac{\partial B_{q_1q_2i}}{\partial x_i}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}I_2=2!\sum_{Q_n^{2,1}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int\limits_{D_{q_1q_2}}B_{q_1q_2}dx_{q_3}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}\\ =3!\sum_{Q_n^{3,1}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int\limits_{D_{q_1q_2q_3}}B_{q_1q_2q_3}dx_{q_4}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}\\ +2!\sum_{Q_n^{2,2}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int\limits_{S^1_{q_1q_2}}B_{q_1q_2q_3}dx_{q_4}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}.\end{aligned}$$

Дальнейший ход преобразований ясен из предыдущего. Для завершения процесса получения окончательной формулы надо выяснить, каким будет последний шаг. Ясно, что последним шагом надо взять одномерные интегралы. Очевидно,

$$\begin{aligned}I_{n-2}=(n-1)!\sum_{Q_n^{n-1,1}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int\limits_{D_{q_1\cdots q_{n-1}}}B_{q_1\dots q_{n-1}}dx_{q_n}\\ +(n-2)!\sum_{Q_n^{n-2,2}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int\limits_{S^1_{q_1\cdots q_{n-2}}}B_{q_1\dots q_{n-1}}dx_{q_n},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{n-1}=(n-1)!\sum_{Q_n^{n-1,1}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int\limits_{D_{q_1\cdots q_{n-1}}}\frac{\partial B_{q_1\dots q_n}}{\partial x_{q_n}}dx_{q_n}\\ =(n-1)!nB_{1\dots n}(M)-(n-1)!\sum_{Q_n^{n-1,1}}B_{1\dots n}\big(S^1_{q_1q_2\dots q_{n-1}}\big)\\ =\sum_{\substack{p_i<m_i,\\ i=\overline{1,n}}}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^n p_i}\big(A_{p_1p_2\dots p_n}u_{x_1^{m_1-p_1-1}x_2^{m_2-p_2-1}\dots x_n^{m_n-p_n-1}}\big)(M)\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{Q_n^{n-1,1}}\sum_{\substack{p_i<m_i,\\ i=\overline{1,n}}}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\big(A_{p_1p_2\dots p_n}u_{x_1^{m_1-p_1-1}x_2^{m_2-p_2-1}\dots x_n^{m_n-p_n-1}}\big)\big(S^1_{q_1q_2\dots q_{n-1}}\big)$$

$$= u_{x_1^{m_1-1}x_2^{m_2-1}\dots x_n^{m_n-1}}(M)$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{Q_n^{n-1,1}}\sum_{\substack{p_i<m_i,\\ i=\overline{1,n}}}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\big(A_{p_1p_2\dots p_n}u_{x_1^{m_1-p_1-1}x_2^{m_2-p_2-1}\dots x_n^{m_n-p_n-1}}\big)\big(S^1_{q_1q_2\dots q_{n-1}}\big).$$

Здесь снова учтены тождества (4) при $x_1=\xi_1,\dots,x_n=\xi_n$.

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} &u_{x_1^{m_1-1}x_2^{m_2-1}\dots x_n^{m_n-1}}(M)\\ &=\frac{1}{n}\sum_{Q_n^{n-1,1}}\sum_{\substack{p_i<m_i,\\ i=\overline{1,n}}}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\big(A_{p_1p_2\dots p_n}u_{x_1^{m_1-p_1-1}x_2^{m_2-p_2-1}\dots x_n^{m_n-p_n-1}}\big)\big(S^1_{q_1q_2\dots q_{n-1}}\big)\\ &\qquad-\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{Q_n^{k,2}}\sigma(q_1,q_2,\dots,q_n)k!\int\limits_{S^1_{q_1q_2\dots q_k}}B_{q_1q_2\dots q_kq_{k+1}}dx_{q_{k+2}}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}\\ &\qquad\qquad+\int\limits_D Rf\,dx_1dx_2\dots dx_n. \end{aligned}\tag{22}$$

Формулу (22) можно переписать в виде

$$u_{x_1^{m_1-1}x_2^{m_2-1}\dots x_n^{m_n-1}}(M)=\Phi(M),\tag{23}$$

где правая часть (22) $\Phi(M)$ содержит значения u и ее производных на S. Эти значения могут быть определены по данным Коши (15). Действительно, частные производные решения u на поверхности S по $x_1,\dots,x_n$ находятся дифференцированием $u=U(\mu_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\mu_n(x_1,\dots,x_n))$ как сложной функции.

Пусть для определенности

$$\begin{aligned} &S^1_{23\dots n}=\big(x_1^1,\xi_2,\dots,\xi_n\big),\ S^1_{13\dots n}=\big(\xi_1,x_2^1,\xi_3,\dots,\xi_n\big),\\ &\qquad\dots,S^1_{12\dots n-1}=\big(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1},x_n^1\big),\quad x_i^1<\xi_i,\ i=\overline{1,n}. \end{aligned}$$

Дополним область D до области $H=\big\{x_i^1<x_i<\xi_i,\ i=\overline{1,n}\big\}$. Доопределим функцию $u(x_1,\dots,x_n)$, положив $u(x_1,\dots,x_n)\equiv 0$ в $\overline{H}\setminus\overline{D}$. Считая теперь точку M переменной точкой области H, проинтегрируем (23) (m_1-1) раз по первой переменной в пределах от x_1^1 до ξ_1, (m_2-1) раз по второй переменной от x_2^1 до ξ_2 и т. д. Воспользовавшись известными из (15) значениями функции u и ее производных на S, получим решение задачи Коши.

Из приведенных рассуждений следует

Теорема 2. *Пусть S^0 — поверхность класса C^{m-1},*

$$a_{q_1q_2\dots q_n}\in C^{(q_1,q_2,\dots,q_n)}(\overline{D^0}),\quad f\in C(\overline{D^0}),\quad \psi_k\in C^{m-k}(\overline{S^0}).$$

Тогда если решение задачи Коши для уравнения (1) с граничными условиями (15) существует, то оно единственно и его можно вычислить, используя формулу (23).

Рассмотрим применение предложенной схемы построения решения задачи Коши на примере уравнения

$$L(u) \equiv u_{xxy} + a_{20}u_{xx} + a_{11}u_{xy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u = f.$$

Тождество (6) принимает вид

$$RL(u) \equiv (Ru_x)_{xy} - (A_{10}u)_{xy} - (A_{01}u_x)_x + (A_{11}u)_x + (A_{20}u)_y, \tag{24}$$

$$A_{10} = R_x - a_{11}R, \quad A_{01} = R_y - a_{20}R, \quad A_{11} = R_{xy} - (a_{20}R)_x - (a_{11}R)_y + a_{10}R,$$
$$A_{20} = R_{xx} - (a_{11}R)_x + a_{01}R,$$

где R зависит от (x, y, ξ, η), а коэффициенты уравнения — от (x, y). Запишем (24) в дивергентной форме

$$RL(u) \equiv \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y}, \tag{25}$$

$$B_1 = \frac{1}{2}(Ru_x)_y - \frac{1}{2}(A_{10}u)_y - A_{01}u_x + A_{11}u, \quad B_2 = \frac{1}{2}(Ru_x)_x - \frac{1}{2}(A_{10}u)_x + A_{20}u.$$

В нашем случае D^0 — треугольная область плоскости (x, y), ограниченная характеристиками $x = x_0$, $y = y_0$ и отрезком кривой S: $y = \sigma(x)$, точка M имеет координаты (ξ, η). Для определенности полагаем $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $\sigma'(x) < 0$, $y_1 = \sigma(\xi)$, $\eta = \sigma(x_1)$.

Интегрируем (25) по области D:

$$\iint\limits_D Rf\,dxdy = \int\limits_{x_1}^{\xi} B_2|_{y=\eta}dx + \int\limits_{y_1}^{\eta} B_1|_{x=\xi}dy + \int\limits_{S^1} B_1dy - B_2\,dx.$$

Учитывая тождества (4), после очевидных преобразований получим частный случай формулы (22):

$$u_x(\xi,\eta) = \frac{1}{2}Ru_x(x_1,\eta,\xi,\eta) + \frac{1}{2}Ru_x(\xi,y_1,\xi,\eta) - \frac{1}{2}A_{10}u(x_1,\eta,\xi,\eta)$$
$$- \frac{1}{2}A_{10}u(\xi,y_1,\xi,\eta) - \int\limits_{S^1} B_1dy - B_2\,dx + \iint\limits_D Rf\,dxdy.$$

Другие примеры применения изложенного метода для уравнений в двумерном и трехмерном пространствах имеются в [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
3. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
4. *Фаге М. К.* Задача Коши для уравнения Бианки // Мат. сб. 1958. Т. 45, № 3. С. 281–322.
5. *Солдатов А. П., Шхануков М. Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552.
6. *Жегалов В. И., Севастьянов В. А.* Задача Гурса в четырехмерном пространстве // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 10. С. 1429–1430.
7. *Севастьянов В. А.* Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка // Изв. вузов. Математика. 1997. № 5. С. 69–73.
8. *Севастьянов В. А.* Об одном случае задачи Коши // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 12. С. 1706–1707.

9. *Жегалов В. И., Уткина Е. А.* Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. 1999. № 10. С. 73–76.

10. *Жегалов В. И., Уткина Е. А.* Задача Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной // Изв. вузов. Математика. 2001. № 11. С. 77–81.

11. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казанск. мат. об-во, 2001.

12. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* О задачах Коши для двух уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика. 2002. № 5. С. 23–30.

13. *Жегалов В. И., Уткина Е. А.* Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка с тремя независимыми переменными // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 1. С. 93–97.

14. *Миронов А. Н.* О методе Римана решения задачи Коши // Изв. вузов. Математика. 2005. № 2. С. 34–44.

15. *Зорич В. А.* Математический анализ. М.: Наука, 1984. Т. 2.

16. *Зорич В. А.* Математический анализ. М.: Наука, 1981. Т. 1.

Статья поступила 17 июня 2004 г., окончательный вариант — 17 апреля 2005 г.

Миронов Алексей Николаевич
Елабужский гос. педагогический университет,
ул. Казанская, 89, г. Елабуга 423600, Республика Татарстан
lbmironova@yandex.ru