Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 517.95

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ УПРУГИХ ОБЪЕКТОВ РАЗНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

А. М. Хлуднев,
К.-Х. Хоффманн, Н. Д. Боткин

Аннотация: Рассматривается вариационная задача со свободной границей, описывающая контакт упругой пластины с тонким упругим препятствием. Область контакта заранее неизвестна и подлежит определению. Задача описывается вариационным неравенством для оператора четвертого порядка. Ограничение на перемещение задано на множестве, размерность которого меньше размерности области решения. Найдены краевые условия, выполняющиеся на множестве возможного контакта, и их точная формулировка. Обоснована смешанная формулировка рассматриваемой задачи и проанализированы предельные случаи, соответствующие возрастанию до бесконечности коэффициентов упругости контактирующих тел.

Ключевые слова: вариационное неравенство, тонкое препятствие, контактная задача.

§ 1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ, $\gamma = (0,1) \times \{0\} \subset \Omega$. Введем в рассмотрение пространства Соболева $H_0^2(\Omega)$ и $H_0^2(\gamma)$ и функционал энергии на $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma)$:

$$\Pi(w,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega w_{,ij}w_{,ij} - \int_\Omega fw + \frac{1}{2}\int_\gamma au_{xx}^2 - \int_\gamma gu, \tag{1}$$

где $w_{,i} = \frac{\partial w}{\partial x_i}$, $i = 1,2$, $(x_1,x_2) \in \Omega$; $u_x = \frac{du}{dx}$, $x = x_1$; $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\gamma)$, $a \in L^\infty(\gamma)$ — заданные функции, $a \geq c_0 > 0$, $c_0 = \text{const}$. По повторяющимся индексам проводится суммирование. Функции, заданные только на γ, будем отождествлять с функциями одной переменной x.

Рассмотрим множество допустимых перемещений

$$K = \left\{(w,u) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma) \mid w - u \geq 0 \text{ на } \gamma\right\}$$

и задачу минимизации

$$\inf_{(w,u)\in K} \Pi(w,u).$$

Очевидно, решение этой задачи существует и удовлетворяет вариационному неравенству

$$(w,u) \in K, \tag{2}$$

Работа выполнена при поддержке Caesar (Bonn) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00209).

$$\int\limits_{\Omega} w_{,ij}(\overline{w}_{,ij} - w_{,ij}) - \int\limits_{\Omega} f(\overline{w} - w) + \int\limits_{\gamma} a u_{xx}(\bar{u}_{xx} - u_{xx}) - \int\limits_{\gamma} g(\bar{u} - u) \geq 0 \quad \forall (\overline{w}, \bar{u}) \in K. \tag{3}$$

Функции $w(x_1, x_2)$, $u(x)$ описывают перемещения точек пластины и тонкого упругого препятствия соответственно. Область Ω отвечает срединной поверхности пластины, а γ — тонкому упругому препятствию.

Ниже будет найдена дифференциальная постановка задачи (2), (3). Прежде всего напомним формулу Грина. Будем предполагать, что кривую γ можно продолжить до замкнутой кривой Σ класса $C^{1,1}$, содержащейся в Ω. При этом область Ω разбивается на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с границами Σ и $\Sigma \cup \Gamma$ соответственно. Внешнюю нормаль к Γ обозначим через $n = (n_1, n_2)$, а нормаль к Σ (направленную в сторону Ω_2) — через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Пусть $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$, $\varphi_\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$. Рассмотрим пространство функций

$$V = \{v \in H^2(\Omega_1) \mid \Delta^2 v \in L^2(\Omega_1)\}$$

и введем обозначение

$$m(v) = v_{,ij}\nu_j\nu_i, \quad t^\nu(v) = v_{,ijk}s_k s_j \nu_i + v_{,ijj}\nu_i, \quad s = (s_1, s_2) = (-\nu_2, \nu_1).$$

Тогда при $u \in V$ можно определить $m(u) \in H^{-1/2}(\Sigma)$, $t^\nu(u) \in H^{-3/2}(\Sigma)$, причем имеет место формула Грина [1, 2]

$$\int\limits_{\Omega_1} \varphi \Delta^2 u = \int\limits_{\Omega_1} \varphi_{,ij} u_{,ij} + \langle t^\nu(u), \varphi \rangle_{3/2,\Sigma} - \langle m(u), \varphi_\nu \rangle_{1/2,\Sigma} \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega_1). \tag{4}$$

Здесь скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{i/2,\Sigma}$ обозначают двойственность между пространствами $H^{i/2}(\Sigma)$ и $H^{-i/2}(\Sigma)$, где $H^{-i/2}(\Sigma)$ — пространство, сопряженное к $H^{i/2}(\Sigma)$, $i = 1, 3$.

Выберем в (3) тестовые функции в виде $(\overline{w}, \bar{u}) = (w + \varphi, u)$, где $\varphi \in H_0^2(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ на γ. Получим

$$\int\limits_{\Omega} w_{,ij}\varphi_{,ij} - \int\limits_{\Omega} f\varphi \geq 0. \tag{5}$$

Заменяя область интегрирования Ω на $\Omega_1 \cup \Omega_2$ и применяя формулу Грина вида (4), из (5) найдем

$$-\langle [m(w)], \varphi_\nu \rangle_{1/2,\Sigma} + \langle [t^\nu(w)], \varphi \rangle_{3/2,\Sigma} \geq 0, \tag{6}$$

где $[v] = v^+ - v^-$, а $v^\pm$ соответствуют значениям v на $\Sigma^\pm$ согласно выбранному направлению нормали ν. При выводе (6) мы используем также равенство

$$\Delta^2 w = f \quad \text{в } \Omega_\gamma,$$

вытекающее из (3) при подстановке тестовых функций вида $(\overline{w}, \bar{u}) = (w \pm \xi, u)$, $\xi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)$. Из неравенства (6) следует, что

$$[m(w)] = 0 \quad \text{в смысле } H^{-1/2}(\Sigma), \tag{7}$$

$$\langle [t^\nu(w)], \varphi \rangle_{3/2,\Sigma} \geq 0 \quad \forall \varphi \in H_0^2(\Omega), \ \varphi \geq 0 \text{ на } \gamma. \tag{8}$$

Подставляя в (3) пробные функции вида $(\overline{w}, \bar{u}) = (w, u + \psi)$, $\psi \in H_0^2(\gamma)$, $\psi \leq 0$ на γ, найдем

$$\int\limits_{\gamma} a u_{xx} \psi_{xx} - \int\limits_{\gamma} g\psi \geq 0.$$

Следовательно,

$$(a u_{xx})_{xx} - g \leq 0 \quad \text{в смысле } H^{-2}(\gamma). \tag{9}$$

Здесь $H^{-2}(\gamma)$ — пространство, сопряженное к $H_0^2(\gamma)$. Пусть далее скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,\gamma}$ обозначают двойственность между $H^{-2}(\gamma)$ и $H_0^2(\gamma)$. Выберем в (3) пробные функции в виде $(\overline{w}, \bar{u}) = (w + \varphi, u + \psi)$, $(\varphi, \psi) \in K$. Получим

$$\int\limits_{\Omega} w_{,ij} \varphi_{,ij} - \int\limits_{\Omega} f\varphi + \int\limits_{\gamma} a u_{xx} \psi_{xx} - \int\limits_{\gamma} g\psi \geq 0.$$

Снова применяя формулу Грина вида (4), предварительно разбив Ω на Ω_1 и Ω_2, будем иметь

$$\langle [t^\nu(w)], \varphi \rangle_{3/2,\Sigma} + \langle (a u_{xx})_{xx} - g, \psi \rangle_{2,\gamma} \geq 0 \quad \forall (\varphi, \psi) \in K. \tag{10}$$

Если последовательно выбрать в (3) тестовые функции вида $(\overline{w}, \bar{u}) = (0, 0)$, $(\overline{w}, \bar{u}) = 2(w, u)$, то получим

$$\int\limits_{\Omega} w_{,ij} w_{,ij} - \int\limits_{\Omega} fw + \int\limits_{\gamma} a u_{xx}^2 - \int\limits_{\gamma} gu = 0,$$

откуда следует равенство

$$\langle [t^\nu(w)], w \rangle_{3/2,\Sigma} + \langle (a u_{xx})_{xx} - g, u \rangle_{2,\gamma} = 0. \tag{11}$$

Заметим, что условия (8), (9) вытекают из (10).

Полученные выше формулы позволяют выписать дифференциальную постановку задачи (2), (3). Именно, требуется найти функции w, u, заданные на Ω_γ и γ соответственно, такие, что

$$\Delta^2 w = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{12}$$

$$w = w_n = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{13}$$

$$w - u \geq 0, \quad [w] = [w_\nu] = 0, \quad [m(w)] = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{14}$$

$$[t^\nu(w)] \geq 0, \quad [t^\nu(w)](w - u) = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{15}$$

$$[t^\nu(w)] = -(a u_{xx})_{xx} + g \quad \text{на } \gamma, \tag{16}$$

$$u = u_x = 0 \quad \text{на } \partial\gamma. \tag{17}$$

Последнее условие из (14) выполнено в смысле (7), первое условие из (15) вместе с условием (16) — в смысле неравенства (10), а второе условие из (15) — в смысле (11). Заметим, что в указанных выше формулах Σ является произвольной замкнутой кривой класса $C^{1,1}$, содержащей γ.

Система краевых условий (13)–(17) является полной, в частности, из (12)–(17) можно вывести вариационное неравенство (2), (3).

Несмотря на то, что решение w вариационной задачи (2), (3) находится в гладкой области Ω, дифференциальная постановка этой задачи формулируется в негладкой области Ω_γ с разрезом γ.

Для задач математической теории трещин также характерны негладкие границы, в частности, в [2] излагается теория трещин с неизвестной областью контакта. Общая теория краевых задач с негладкими границами представлена в [3]. По поводу контактных задач с неизвестными границами можно обратиться к [4, 5].

§ 2. Смешанная формулировка задачи

В этом параграфе будет исследована так называемая смешанная формулировка задачи (2), (3) (или задачи (12)–(17)). Все величины с двумя нижними индексами будут предполагаться симметричными по этим индексам. Пусть $m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$. Обозначим $\nabla\nabla m = m_{ij,ij}$ и определим граничные операторы на Σ:

$$m_\nu = m_{ij}\nu_j\nu_i, \quad T^\nu(m) = m_{ij,k}s_k s_j \nu_i + m_{ij,j}\nu_i.$$

Кроме того, если φ — скалярная функция, заданная в Ω_γ, то полагаем

$$\nabla\nabla\varphi = \{\varphi_{,ij}\}, \quad i, j = 1, 2.$$

Введем в рассмотрение дополнительные функции $m = \{m_{ij}\}$, $m_{ij} = w_{,ij}$, $i, j = 1, 2$, $M = au_{xx} - G$, где G является решением краевой задачи

$$G_{xx} = g \quad \text{на } \gamma, \quad G = 0 \quad \text{на } \partial\gamma,$$

и перепишем задачу (12)–(17) в виде

$$\nabla\nabla m = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{18}$$

$$m = \nabla\nabla w \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{19}$$

$$w = w_n = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{20}$$

$$w - u \geq 0, \quad [w] = [w_\nu] = 0, \quad [m_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{21}$$

$$[T^\nu(m)] \geq 0, \quad [T^\nu(m)](w - u) = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{22}$$

$$[T^\nu(m)] = -M_{xx} \quad \text{на } \gamma, \tag{23}$$

$$(M + G)a^{-1} = u_{xx} \quad \text{на } \gamma, \tag{24}$$

$$u = u_x = 0 \quad \text{на } \partial\gamma. \tag{25}$$

При этом последнее условие из (21) выполнено в смысле

$$\langle [m_\nu], \varphi \rangle_{1/2,\Sigma} = 0 \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Sigma). \tag{26}$$

Первое условие из (22) вместе с (23) выполнено в виде неравенства

$$\langle [T^\nu(m)], \varphi \rangle_{3/2,\Sigma} + \langle M_{xx}, \psi \rangle_{2,\gamma} \geq 0 \quad \forall (\varphi, \psi) \in K, \tag{27}$$

а второе условие из (22) — в смысле следующего равенства:

$$\langle [T^\nu(m)], w \rangle_{3/2,\Sigma} + \langle M_{xx}, u \rangle_{2,\gamma} = 0. \tag{28}$$

Отметим одно важное следствие из (27). Если $\varphi = 0$ на $\Sigma \setminus \gamma$, $\varphi = \psi$ на γ, то из (27) следует

$$\langle [T^\nu(m)], \varphi \rangle_{3/2,00,\gamma} + \langle M_{xx}, \varphi \rangle_{2,\gamma} = 0, \tag{29}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{3/2,00,\gamma}$ обозначает двойственность между $H_{00}^{-3/2}(\gamma)$ и $H_{00}^{3/2}(\gamma)$. Здесь пространство $H_{00}^{3/2}(\gamma)$ определено так:

$$H_{00}^{3/2}(\gamma) = \left\{ v \in H_0^{3/2}(\gamma) \mid \int\limits_\gamma \frac{|\nabla v|^2}{\rho} < \infty \right\},$$

$\rho(x)$ — расстояние от x до $\partial\gamma$. Заметим, что $H_0^2(\gamma) = H_{00}^2(\gamma)$, а вложение $H_{00}^2(\gamma) \subset H_{00}^{3/2}(\gamma)$ плотно и непрерывно, поэтому из (29) вытекает равенство

$$[T^\nu(m)] = -M_{xx} \quad \text{в смысле } H^{-2}(\gamma). \tag{30}$$

Введем так называемое множество допустимых моментов

$$L = \{(\overline{m}, \overline{M}) \mid \overline{m} = \{\overline{m}_{ij}\},\ i,j = 1,2;\ \overline{m},\ \nabla\nabla\overline{m} \in L^2(\Omega_\gamma),\ \overline{M} \in L^2(\gamma);$$
$$[\overline{m}_\nu] = 0,\ [T^\nu(\overline{m})] \geq 0,\ [T^\nu(\overline{m})] = -\overline{M}_{xx} \text{ на } \gamma\},$$

где краевые условия на γ для $\overline{m}$, $\overline{M}$ выполнены в смысле (26)–(27). Здесь следует заметить, что если $\overline{m}$, $\nabla\nabla\overline{m} \in L^2(\Omega_\gamma)$, то скачки $[\overline{m}_\nu]$, $[T^\nu(\overline{m})]$ определены на Σ как элементы $H^{-1/2}(\Sigma)$ и $H^{-3/2}(\Sigma)$ соответственно (см. [1, 4]).

Теперь мы в состоянии привести смешанную формулировку задачи (18)–(25). Умножим (19) на $\overline{m} - m$, а (24) — на $\overline{M} - M$, где $(\overline{m}, \overline{M}) \in L$, проинтегрируем по Ω_γ и γ соответственно и сложим. Получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} m(\overline{m} - m) - \int\limits_{\Omega_\gamma} \nabla\nabla w(\overline{m} - m)$$
$$+ \int\limits_\gamma a^{-1}(M + G)(\overline{M} - M) - \int\limits_\gamma u_{xx}(\overline{M} - M) = 0. \quad (31)$$

Из (28) и определения множества L следует неравенство

$$-\langle [T^\nu(\overline{m})] - [T^\nu(m)], w\rangle_{3/2,\Sigma} - \int\limits_\gamma u_{xx}(\overline{M} - M) \leq 0,$$

поэтому из (31) вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} m(\overline{m} - m) - \int\limits_{\Omega_\gamma} w(\nabla\nabla\overline{m} - \nabla\nabla m) + \int\limits_\gamma a^{-1}(M + G)(\overline{M} - M) \geq 0.$$

Таким образом, приходим к следующей смешанной постановке вариационной задачи (2), (3). *Найти функции* w, $m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, M$, *такие, что*

$$w \in L^2(\Omega_\gamma), \quad (m, M) \in L, \quad (32)$$
$$\nabla\nabla m = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad (33)$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} m(\overline{m} - m) - \int\limits_{\Omega_\gamma} w(\nabla\nabla\overline{m} - \nabla\nabla m)$$
$$+ \int\limits_\gamma a^{-1}(M + G)(\overline{M} - M) \geq 0 \quad \forall (\overline{m}, \overline{M}) \in L. \quad (34)$$

Если задача (32)–(34) решена, то функция u однозначно восстанавливается из (24), (25), (30), причем $u \in H_0^2(\gamma)$. В силу рассуждений, предшествующих (30), легко также видеть, что $u \in H^{\frac{5}{2}-\delta}$ для любого $\delta > 0$.

Существование решения задачи (32)–(34) можно доказать независимо от задачи (2), (3), используя регуляризацию вида

$$\varepsilon w^\varepsilon + \nabla\nabla m^\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega_\gamma,\ \varepsilon > 0, \quad (35)$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} m^\varepsilon(\overline{m} - m^\varepsilon) - \int\limits_{\Omega_\gamma} w^\varepsilon(\nabla\nabla\overline{m} - \nabla\nabla m^\varepsilon)$$
$$+ \int\limits_\gamma a^{-1}(M^\varepsilon + G)(\overline{M} - M^\varepsilon) \geq 0 \quad \forall (\overline{m}, \overline{M}) \in L. \quad (36)$$

Функцию w^ε можно выразить из (35) и подставить в (36), что приведет к вариационному неравенству относительно $(m^\varepsilon, M^\varepsilon)$, имеющему единственное решение из L. Далее можно получить априорные оценки, равномерные по ε, перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (35), (36) и доказать существование решения задачи (32)–(34). Поскольку близкая ситуация возникает в краевых задачах для пластин, содержащих трещины, подробности данных рассуждений опустим (с ними можно ознакомиться в работе [6]).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Смешанная формулировка* (32)–(34), (24), (25), (30) *и вариационная формулировка* (2), (3) *задачи* (12)–(17) *эквивалентны.*

Доказательство. Поскольку смешанная формулировка получена из (12)–(17), достаточно проверить, что решение смешанной задачи обладает необходимой гладкостью и удовлетворяет всем нужным краевым условиям. Из (34) вытекает, что $m_{ij} = w_{,ij}$, $i,j = 1,2$, поэтому $w \in H^2(\Omega_\gamma)$. При этом можно доказать, что выполнены краевые условия (13).

Покажем, например, как можно доказать наличие краевых условий

$$[w] = [w_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma. \tag{37}$$

Найдем для этого решение краевой задачи

$$\Delta^2 \widetilde{w} = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{38}$$

$$\widetilde{w} = \widetilde{w}_n = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{39}$$

$$m(\widetilde{w}) = \varphi, \quad t^\nu(\widetilde{w}) = \psi \quad \text{на } \gamma^\pm, \tag{40}$$

где φ, ψ — произвольные фиксированные функции из $L^2(\gamma)$. Эта задача допускает вариационную формулировку. Именно, требуется найти функцию $\widetilde{w}$ такую, что

$$\widetilde{w} \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma), \tag{41}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \widetilde{w}_{,ij} v_{,ij} - \int\limits_{\Omega_\gamma} fv - \int\limits_\gamma \psi[v] + \int\limits_\gamma \varphi \left[\frac{\partial v}{\partial \nu}\right] = 0 \quad \forall v \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma), \tag{42}$$

где

$$H^2_\Gamma(\Omega_\gamma) = \{v \in H^2(\Omega_\gamma) \mid v = v_n = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Замечаем, что решение задачи (41), (42) обладает свойством

$$[m(\widetilde{w})] = 0 \quad \text{в смысле } H^{-1/2}(\Sigma),$$

$$[t^\nu(\widetilde{w})] = 0 \quad \text{в смысле } H^{-3/2}(\Sigma).$$

Возьмем в (34) тестовые функции вида $(\overline{m}, \overline{M}) = (m \pm \widetilde{m}, M)$, где $\widetilde{m} = \{\widetilde{m}_{ij}\}$, $\widetilde{m}_{ij} = \widetilde{w}_{,ij}$, $i,j = 1,2$. Получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} m\widetilde{m} - \int\limits_{\Omega_\gamma} w\nabla\nabla\widetilde{m} = 0.$$

Отсюда находим

$$\langle T^\nu(\widetilde{m}), [w]\rangle_{3/2,\Sigma} - \left\langle \widetilde{m}_\nu, \left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]\right\rangle_{1/2,\Sigma} = 0.$$

Однако из (41), (42) следует равенство

$$\langle T^\nu(\widetilde{m}), [v]\rangle_{3/2,\Sigma} - \left\langle \widetilde{m}_\nu, \left[\frac{\partial v}{\partial \nu}\right]\right\rangle_{1/2,\Sigma} = \int\limits_\gamma \psi[v] - \int\limits_\gamma \varphi\left[\frac{\partial v}{\partial \nu}\right] \quad \forall v \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma).$$

Значит,

$$\int\limits_\gamma \psi[w] - \int\limits_\gamma \varphi\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right] = 0,$$

и в силу произвольности функций φ, ψ убеждаемся в справедливости краевых условий (37).

Таким образом, остается проверить справедливость краевых условий

$$[T^\nu(m)](w-u) = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{43}$$

$$w - u \geq 0 \text{ на } \gamma. \tag{44}$$

Проверка (43) очевидна. Подставим в неравенство (34) сначала $(\overline{m}, \overline{M}) = 0$, а затем $(\overline{m}, \overline{M}) = 2(m, M)$. С учетом (24) получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} mm - \int\limits_{\Omega_\gamma} w\nabla\nabla m + \int\limits_\gamma u_{xx}M = 0.$$

Отсюда следует (28), что и требуется.

Наконец, убедимся в справедливости неравенства (44). Решим для этого краевую задачу для отыскания функции $\widetilde{w}$ такой, что

$$\Delta^2\widetilde{w} = f \quad \text{в } \Omega_\gamma,$$
$$\widetilde{w} = \widetilde{w}_n = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$
$$m(\widetilde{w}) = 0 \quad \text{на } \gamma^\pm,$$
$$t^\nu(\widetilde{w}) = h \quad \text{на } \gamma^+, \quad t^\nu(\widetilde{w}) = 0 \quad \text{на } \gamma^-,$$

где $h \geq 0$ — произвольная фиксированная функция из пространства $L^2(\gamma)$. Эта задача может быть записана в вариационной форме. Именно, требуется найти функцию $\widetilde{w}$ такую, что

$$\widetilde{w} \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma), \tag{45}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \widetilde{w}_{,ij}\varphi_{,ij} - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\varphi - \int\limits_{\gamma^+} h\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma). \tag{46}$$

Решим еще одну задачу. Найдем функцию $\tilde{u}$ такую, что

$$(a\tilde{u}_{xx})_{xx} = -h \quad \text{на } \gamma, \tag{47}$$

$$\tilde{u} = \tilde{u}_x = 0 \quad \text{на } \partial\gamma. \tag{48}$$

Очевидно, функция $\tilde{u}$ существует, причем $\tilde{u} \in H^2_0(\gamma)$.

Положим теперь $\widetilde{m}_{ij} = \widetilde{w}_{,ij}$, $i, j = 1, 2$. Тогда из (45), (46) следует, что

$$\langle [T^\nu(\widetilde{m})], \varphi\rangle_{3/2,\Sigma} = \int\limits_\gamma h\varphi \quad \forall \varphi \in H^2_0(\Omega). \tag{49}$$

Положив $\widetilde{M} = a\tilde{u}_{xx}$, из (47), (48) найдем

$$\langle \widetilde{M}_{xx}, \psi \rangle_{2,\gamma} = -\int\limits_{\gamma} h\psi \quad \forall \psi \in H_0^2(\gamma). \tag{50}$$

Складывая (49) и (50), будем иметь соотношение

$$\langle [T^\nu(\widetilde{m})], \varphi \rangle_{3/2,\Sigma} + \langle \widetilde{M}_{xx}, \psi \rangle_{2,\gamma} = \int\limits_{\gamma} h(\varphi - \psi). \tag{51}$$

Если $\varphi - \psi \geq 0$ на γ, то правая часть (51) неотрицательна и поэтому $(\widetilde{m}, \widetilde{M}) \in L$. Следовательно, подстановка $(\overline{m}, \overline{M}) = (m, M) + (\widetilde{m}, \widetilde{M})$ в (34) является допустимой, что приводит к неравенству

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} m\widetilde{m} - \int\limits_{\Omega_\gamma} w\nabla\nabla\widetilde{m} + \int\limits_{\gamma} u_{xx}\widetilde{M} \geq 0.$$

Отсюда получаем соотношение

$$\langle [T^\nu(\widetilde{m})], w \rangle_{3/2,\Sigma} + \langle \widetilde{M}_{xx}, u \rangle_{2,\gamma} \geq 0.$$

В силу определения $\widetilde{m}, \widetilde{M}$ это означает, что

$$\int\limits_{\gamma} h(w - u) \geq 0.$$

Поскольку $h \geq 0$ — произвольная функция на γ, получаем $w - u \geq 0$ на γ, что и требовалось. Таким образом, теорема доказана.

§ 3. Предельные случаи

В приложениях задача вида (2), (3) содержит параметры, характеризующие физические и геометрические свойства упругих материалов. В этом параграфе рассмотрим два предельных перехода, которые будут соответствовать переходу пластины и тонкого препятствия от упругого состояния к жесткому.

Сначала рассмотрим случай, когда изгибная жесткость пластины возрастает до бесконечности. Пусть $\varepsilon > 0$ — параметр, который будет стремиться к нулю. Если вместо (1) рассмотрим функционал

$$\Pi_\varepsilon(w, u) = \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\Omega} w_{,ij}w_{,ij} - \int\limits_{\Omega} fw + \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} au_{xx}^2 - \int\limits_{\gamma} gu,$$

то вариационное неравенство (2), (3) для каждого ε примет вид

$$(w^\varepsilon, u^\varepsilon) \in K, \tag{52}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega} w_{,ij}^\varepsilon(\overline{w}_{,ij} - w_{,ij}^\varepsilon) - \int\limits_{\Omega} f(\overline{w} - w^\varepsilon) + \int\limits_{\gamma} au_{xx}^\varepsilon(\bar{u}_{xx} - u_{xx}^\varepsilon) - \int\limits_{\gamma} g(\bar{u} - u^\varepsilon) \geq 0 \quad \forall (\overline{w}, \bar{u}) \in K. \tag{53}$$

Можно выписать дифференциальную постановку вида (12)–(17) для задачи (52), (53). В этом случае параметр ε будет входить как в уравнение равновесия (12), так и в краевые условия (14)–(16). Целью следующих ниже рассуждений будет обоснование предельного перехода в (52), (53) при $\varepsilon \to 0$. Из (53) следует равенство

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega} w^{\varepsilon}_{,ij}w^{\varepsilon}_{,ij} - \int\limits_{\Omega} fw^{\varepsilon} + \int\limits_{\gamma} au^{\varepsilon}_{xx}u^{\varepsilon}_{xx} - \int\limits_{\gamma} gu^{\varepsilon} = 0,$$

из которого получаем равномерную по $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ оценку

$$\frac{1}{\varepsilon}\|w^{\varepsilon}\|^2_{H^2_0(\Omega)} + \|u^{\varepsilon}\|^2_{H^2_0(\gamma)} \le c.$$

Выберем подпоследовательность с прежним обозначением, обладающую следующими свойствами при $\varepsilon \to 0$:

$$u^{\varepsilon} \to u \text{ слабо в } H^2_0(\Omega), \quad w^{\varepsilon} \to 0 \text{ сильно в } H^2_0(\gamma),$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (52), (53). Подставим для этого в неравенство (53) тестовые функции вида $(\overline{w}, \bar{u}) = (0, \bar{u})$, $\bar{u} \le 0$ на γ, $\bar{u} \in H^2_0(\gamma)$. Получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega} fw^{\varepsilon} + \int\limits_{\gamma} au^{\varepsilon}_{xx}\bar{u}_{xx} - \int\limits_{\gamma} g(\bar{u} - u^{\varepsilon}) \ge \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega} w^{\varepsilon}_{,ij}w^{\varepsilon}_{,ij} + \int\limits_{\gamma} au^{\varepsilon}_{xx}u^{\varepsilon}_{xx},$$

переход к нижнему пределу в котором дает вариационное неравенство

$$u \in H^2_0(\gamma), \quad u \le 0 \text{ на } \gamma, \tag{54}$$

$$\int\limits_{\gamma} au_{xx}(\bar{u}_{xx} - u_{xx}) - \int\limits_{\gamma} g(\bar{u} - u) \ge 0 \quad \forall \bar{u} \in H^2_0(\gamma), \quad \bar{u} \le 0 \text{ на } \gamma. \tag{55}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Решение задачи* (52), (53) *при* $\varepsilon \to 0$ *сходится к решению задачи* (54), (55).

Отметим, что предельная задача (54), (55) описывает контакт тонкого упругого препятствия с жесткой (недеформируемой) поверхностью.

Рассмотрим теперь другой случай, соответствующий возрастанию изгибной жесткости тонкого упругого препятствия. Именно, определим при $\varepsilon > 0$ функцию

$$a^{\varepsilon} = \begin{cases} a & \text{на } \gamma^-, \\ \varepsilon^{-1}a & \text{на } \gamma^+, \end{cases}$$

где $\gamma^- = (0, s_0) \times \{0\}$, $\gamma^+ = (s_0, 1) \times \{0\}$, а $s_0 \in [0, 1]$ — заданное число. Вместо (1) рассмотрим функционал энергии следующего вида:

$$\Pi_{\varepsilon}(w, u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} w_{,ij}w_{,ij} - \int\limits_{\Omega} fw + \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} a^{\varepsilon}u^2_{xx} - \int\limits_{\gamma} gu.$$

В этом случае вариационное неравенство (2), (3) приобретает вид

$$(w^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}) \in K, \tag{56}$$

$$\int\limits_{\Omega} w^{\varepsilon}_{,ij}(\overline{w}_{,ij} - w^{\varepsilon}_{,ij}) - \int\limits_{\Omega} f(\overline{w} - w^{\varepsilon})$$
$$+ \int\limits_{\gamma} a^{\varepsilon} u^{\varepsilon}_{xx}(\bar{u}_{xx} - u^{\varepsilon}_{xx}) - \int\limits_{\gamma} g(\bar{u} - u^{\varepsilon}) \geq 0 \quad \forall(\overline{w}, \bar{u}) \in K. \quad (57)$$

Задача (56), (57) может быть записана в дифференциальной форме вида (12)–(17). Параметр ε при этом будет входить в краевое условие (16). Следующие ниже рассуждения показывают, что в (56), (57) можно осуществить переход к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Из (57) следует равенство

$$\int\limits_{\Omega} w^{\varepsilon}_{,ij} w^{\varepsilon}_{,ij} - \int\limits_{\Omega} f w^{\varepsilon} + \int\limits_{\gamma^-} a u^{\varepsilon}_{xx} u^{\varepsilon}_{xx} + \int\limits_{\gamma^+} \frac{a}{\varepsilon} u^{\varepsilon}_{xx} u^{\varepsilon}_{xx} - \int\limits_{\gamma} g u^{\varepsilon} = 0,$$

обеспечивающее равномерную по $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ оценку решения

$$\|u^{\varepsilon}\|^2_{H^2_0(\gamma)} + \|w^{\varepsilon}\|^2_{H^2_0(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|u^{\varepsilon}\|^2_{H^{2,0}(\gamma^+)} \leq c. \quad (58)$$

Здесь

$$H^{2,0}(\gamma^+) = \{v \in H^2(\gamma^+) \mid v = v_x = 0 \text{ на } (\partial\gamma) \cap (\partial\gamma^+)\}.$$

На основе (58) выберем подпоследовательность с прежним обозначением такую, что при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{gathered} u^{\varepsilon} \to u \quad \text{слабо в } H^2_0(\gamma), \\ u^{\varepsilon} \to 0 \quad \text{сильно в } H^{2,0}(\gamma^+), \\ w^{\varepsilon} \to w \quad \text{слабо в } H^2_0(\Omega). \end{gathered} \quad (59)$$

Перейдем теперь к пределу в (56), (57) при $\varepsilon \to 0$. Выберем тестовую функцию $(\overline{w}, \bar{u}) \in K$ так, чтобы $\bar{u} = 0$ на γ^+, и подставим эту функцию в (57). Получим

$$\int\limits_{\Omega} w^{\varepsilon}_{,ij}(\overline{w}_{,ij} - w^{\varepsilon}_{,ij}) - \int\limits_{\Omega} f(\overline{w} - w^{\varepsilon}) + \int\limits_{\gamma^-} a u^{\varepsilon}_{xx}(\bar{u}_{xx} - u^{\varepsilon}_{xx})$$
$$- \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\gamma^+} a u^{\varepsilon}_{xx} u^{\varepsilon}_{xx} - \int\limits_{\gamma^-} g(\bar{u} - u^{\varepsilon}) + \int\limits_{\gamma^+} g u^{\varepsilon} \geq 0.$$

В этом соотношении на основе (59) можно перейти к пределу и получить вариационное неравенство

$$w - u \geq 0 \text{ на } \gamma^-, \quad w \geq 0 \text{ на } \gamma^+, \quad w \in H^2_0(\Omega),\ u \in H^2_0(\gamma^-), \quad (60)$$

$$\int\limits_{\Omega} w_{,ij}(\overline{w}_{,ij} - w_{,ij}) - \int\limits_{\Omega} f(\overline{w} - w) + \int\limits_{\gamma^-} a u_{xx}(\bar{u}_{xx} - u_{xx}) - \int\limits_{\gamma^-} g(\bar{u} - u) \geq 0, \quad (61)$$

справедливое для всех пробных функций $(\overline{w}, \bar{u})$ таких, что

$$\overline{w} - \bar{u} \geq 0 \text{ на } \gamma^-, \quad \overline{w} \geq 0 \text{ на } \gamma^+, \quad \overline{w} \in H^2_0(\Omega), \quad \bar{u} \in H^2_0(\gamma^-). \quad (62)$$

Таким образом, приведенные рассуждения доказывают следующее утверждение.

Теорема 3. *Решение задачи* (56), (57) *при* $\varepsilon \to 0$ *сходится к решению задачи* (60)–(62).

Предельное вариационное неравенство (60)–(62) описывает контакт пластины с тонким препятствием, которое является упругим на γ^- и жестким на γ^+. Отметим, что, в частности, можно взять $\gamma^+ = \gamma$. В этом случае задача (60)–(62) описывает контакт упругой пластины с тонким жестким препятствием (см. [7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991.
2. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
3. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. Boston; London; Melbourne: Pitman, 1985.
4. *Khludnev A. M., Sokolowski J.* Modelling and control in solid mechanics. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1987.
5. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
6. *Хлуднев А. М.* Метод гладких областей в задаче о равновесии пластины с трещиной // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1388–1400.
7. *Schild B.* On the coincidence set in biharmonic variational inequalities with thin obstacles // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. (13). 1986. V. 4, N 4. P. 559–616.

Статья поступила 31 марта 2005 г.

Хлуднев Александр Михайлович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
khlud@hydro.nsc.ru

Hoffmann Karl-Heinz (Хоффманн Карл-Хейнц)
Caesar, Ludwig-Erhard-Allee 2,
53175 Bonn, Germany
hoffmann@caesar.de

Боткин Николай Дмитриевич
Caesar, Ludwig-Erhard-Allee 2,
53175 Bonn, Germany
botkin@caesar.de