Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 519.716

ОБ α–СУПЕРПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ k–ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

А. Л. Шабунин

Аннотация: Отмечена связь между операциями α-пополнения и замыкания систем функций k-значной логики. Для $k = 3, 4$ построены α-базисы, состоящие из двух бинарных операций. Доказано, что полная система T функций четырехзначной логики, содержащей все подстановки множества $E_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ и операцию сложения по модулю 4, не является α-полной, но ее α-пополнение $[T]_\alpha$ будет уже α-полной системой.

Ключевые слова: многозначная логика, полные системы функций, ограниченная суперпозиция.

В работе [1] введены понятия α-формулы, α-суперпозиции и α-полноты множества функций k-значной логики. Напомним необходимые определения.

Пусть P_k — множество всех функций k-значной логики, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $P_k(n)$ — множество всех n-местных функций из P_k.

Пусть $F \subseteq P_k$ — непустое множество функций и X — счетное множество переменных. Индукцией определим понятие *α-терма над F от множества переменных X*:

1) переменная x из X есть α-терм;

2) если символ f обозначает n-местную функцию из F, Φ есть α-терм и $x_2, \dots, x_n \in X$, то $f(\Phi, x_2, \dots, x_n)$ есть α-терм.

При построении α-термов используется ограниченная суперпозиция: α-терм Φ может подставляться в $f(x_1, \dots, x_n)$ только вместо первого аргумента. Если α-терм не является переменной, то он называется *α-формулой*.

Для α-терма Φ запись $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ будет означать, что все переменные, встречающиеся в Φ, принадлежат множеству $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$. Для α-формулы Φ запись $\Phi[f_1, \dots, f_m]$ означает, что Φ построена из функций $f_1, \dots, f_m$.

Обычным образом определяется значение $\Phi(a_1, \dots, a_n)$ α-терма $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ при заданных значениях переменных $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$, где $a_1, \dots, a_n \in E_k$. Функция $f \in P_k(n)$ *представима* (*реализуема*) α-формулой $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ над F, если для любого набора $a_1, \dots, a_n \in E_k$, задающего значения переменных $x_1, \dots, x_n$, имеет место равенство

$$f(a_1, \dots, a_n) = \Phi(a_1, \dots, a_n).$$

В этом случае пишем $f(x_1, \dots, x_n) = \Phi(x_1, \dots, x_n)$ или, короче, $f = \Phi$. Если при этом $f = \Phi[f_1, \dots, f_m]$, то говорят, что f есть *α-суперпозиция* функций $f_1, \dots, f_m$ из F.

При обычной суперпозиции функции, полученные из исходных, могут использоваться для получения новых функций наравне с исходными функциями. В случае α-суперпозиции работать можно только с исходными функциями, т. е.

© 2007 Шабунин А. Л.

надо из исходных функциональных символов и предметных переменных строить терм, а затем смотреть, какая функция ему соответствует. Особенностью операции α-суперпозиции (по сравнению с операцией суперпозиции) является то, что последовательное выполнение двух α-суперпозиций функций из F может уже не быть α-суперпозицией функций из F. Поясним это на примере. Пусть $F = \{f, g\}$, где f и g — функции двух и одной переменных соответственно. Функция $\varphi(x) = f(x, x)$ является α-суперпозицией функций из F, а функция $\psi(x) = \varphi(g(x)) = f(g(x), g(x))$ не является α-суперпозицией функций из F: функция $g(x)$ подставляется не только вместо первого аргумента функции f, но и вместо ее второго аргумента. В то же время функция ψ является α-суперпозицией функций из множества $F_1 = \{f, g, \varphi\}$.

Множество всех функций из P_k, реализуемых (представимых) α-формулами над F, называется *α-пополнением* множества F и обозначается через $[F]_\alpha$. Если $[F]_\alpha = P_k$, то F называется *α-полной системой*; α-полная система функций F называется *α-базисом* P_k, если $F\backslash\{f\}$ уже не является α-полной при любой $f \in F$. Множество F называется *α-замкнутым*, если $F = [F]_\alpha$.

В [1] показано, что при $k \geq 7$ α-полной является любая система функций из P_k, содержащая все подстановки из симметрической группы S_k подстановок множества E_k и любую одну квазигрупповую функцию. В [2] приведены условия α-полноты систем функций k-значной логики, состоящих из функций, у которых все одноместные подфункции, полученные произвольной фиксацией всех переменных, кроме первой, являются подстановками; для $k \geq 5$ построены α-полные системы из двух бинарных операций с правым сокращением; для $k = 2$ доказано отсутствие конечных α-полных систем; для $k \geq 3$ установлено, что в P_k отсутствуют α-полные системы, состоящие из одной функции. Из последних двух результатов вытекает, что понятие α-полноты сильнее понятия полноты системы функций, так как в P_k при любом $k \geq 2$ есть полные системы, состоящие из одной функции (функция Шеффера для $k = 2$ и функция Вебба для $k \geq 3$). Другими словами, всякая α-полная система функций является полной системой, но существуют полные системы функций, не являющиеся α-полными.

В настоящей статье устанавливается связь между операциями α-пополнения и замыкания систем функций. Для $k = 4$ построен α-базис, состоящий из двух бинарных операций на E_4. Доказано, что полная система T функций четырехзначной логики, содержащей все подстановки множества E_4 и операцию сложения по модулю 4, не является α-полной, но ее α-пополнение $[T]_\alpha$ будет уже α-полной системой. Для $k = 3$ также построен α-базис, состоящий из двух бинарных операций на E_3.

§ 1. α-Пополнение и замыкание систем функций

Пусть $F \subseteq P_k$. Множество всех функций из P_k, которые можно реализовать формулами над F, называется замыканием множества F и обозначается через $[F]$ (см. [3]). Каждая α-формула Φ над F является формулой над F. Поэтому верно включение $[F]_\alpha \subseteq [F]$. Оператор α-пополнения $[\ ]_\alpha$ обладает следующими легко проверяемыми свойствами (F, F_1, F_2 — произвольные множества функций из P_k):

1) $F \subseteq [F]_\alpha$;

2) если $F_1 \subseteq F_2$, то $[F_1]_\alpha \subseteq [F_2]_\alpha$;

3) $[F]_\alpha = \bigcup\{[G]_\alpha \mid G \subseteq F,\ G \text{ конечно}\}$.

Что касается равенства $[[F]_\alpha]_\alpha = [F]_\alpha$, то оно в общем случае не выполняется: для $k = 4$ и множества $F = S_4 \cup \{+\}$, где $+$ — операция сложения по модулю 4, ниже доказывается, что $[F]_\alpha \neq P_4$, но $[[F]_\alpha]_\alpha = P_4$. Следовательно, оператор α-пополнения не является абстрактным оператором замыкания на множестве P_k (см. [4, с. 9]).

Положим $[F]^0_\alpha = F$ и $[F]^{n+1}_\alpha = [[F]^n_\alpha]_\alpha$ $(n = 0, 1, \dots)$.

Операция α-суперпозиции является частным видом операции суперпозиции. Отсюда получаем $[F]^n_\alpha \subseteq [F]$ при любом $n \geq 0$ и

$$\bigcup_{n\geq 0} [F]^n_\alpha \subseteq [F]. \tag{1}$$

В работе А. И. Мальцева [5] рассматриваются алгебраические операции ζ, τ, Δ, ∇ и $*$ над функциями из P_k, определяемые тождествами:

$$\begin{aligned}
(\zeta f)(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1),\\
(\tau f)(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n),\\
(\Delta f)(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &= f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),\\
(\nabla f)(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &= f(x_2, \dots, x_{n+1}),\\
(f * g)(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}) &= f(g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}),
\end{aligned}$$

где f, g — произвольные n-местная и m-местная функции из P_k. Для одноместной функции f полагают $\zeta f = \tau f = \Delta f = f$.

Выражения, стоящие в правых частях этих тождеств, являются α-формулами над множествами $\{f\}$ и $\{f, g\}$. Поэтому

$$(\zeta f), (\tau f), (\Delta f), (\nabla f) \in [\{f\}]_\alpha, \quad (f * g) \in [\{f, g\}]_\alpha. \tag{2}$$

В дальнейшем вместо выражений вида $[\{f_1, \dots, f_m\}]_\alpha$ и $[\{f_1, \dots, f_m\}]$ будем писать $[f_1, \dots, f_m]_\alpha$ и $[f_1, \dots, f_m]$ соответственно. Заметим, что если $f \in F$, $g \in [F]_\alpha$, то $f * g \in [F]_\alpha$. В то же время для $g * f$ имеем в общем случае только соотношение $g * f \in [[F]_\alpha]_\alpha$.

Как показано в [5], если функция $f \in P_k$ является суперпозицией функций $f_1, \dots, f_m$, то f можно получить из $f_1, \dots, f_m$ путем последовательного выполнения операций ζ, τ, Δ, ∇ и $*$. Отсюда и из (2) вытекает, что

$$f \in [f_1, \dots, f_m]^n_\alpha \tag{3}$$

при некотором $n \geq 0$. Поясним сказанное на примере. Пусть $\varphi(x) = f(g_1(x), g_2(x), g_3(x))$. Имеет место тождество

$$\varphi(x) = (\Delta(\Delta((\zeta((\zeta(((\zeta f) * g_3)) * g_2)) * g_1)))(x).$$

Пусть $F = \{f, g_1, g_2, g_3\}$. Функция φ не является α-суперпозицией функций из F. Положим $h_1 = (\zeta f)$, $h_2 = (h_1 * g_3)$, $h_3 = (\zeta h_2)$, $h_4 = (h_3 * g_2)$, $h_5 = (\zeta h_4)$, $h_6 = (h_5 * g_1)$, $h_7 = (\Delta h_6)$, $h_8 = (\Delta h_7)$. Легко видеть, что $h_i \in [F]^i_\alpha$ $(i = 1, \dots, 8)$. Имеем

$$\begin{aligned}
h_8(x) &= (\Delta h_7)(x) = h_7(x, x) = (\Delta h_6)(x, x) = h_6(x, x, x)\\
&= (h_5 * g_1)(x, x, x) = h_5(g_1(x), x, x) = (\zeta h_4)(g_1(x), x, x)\\
&= h_4(x, x, g_1(x)) = (h_3 * g_2)(x, x, g_1(x)) = h_3(g_2(x), x, g_1(x))\\
&= (\zeta h_2)(g_2(x), x, g_1(x)) = h_2(x, g_1(x), g_2(x))
\end{aligned}$$

$$= (h_1 * g_3)(x, g_1(x), g_2(x)) = h_1(g_3(x), g_1(x), g_2(x))$$
$$= (\zeta f)(g_3(x), g_1(x), g_2(x)) = f(g_1(x), g_2(x), g_3(x)) = \varphi(x).$$

Таким образом, $\varphi \in [F]^8_\alpha$.

Ввиду (3) получаем

$$[F] \subseteq \bigcup_{n\geq 0} [F]^n_\alpha. \tag{4}$$

В силу (1) и (4) справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. $[F] = \bigcup\limits_{n\geq 0} [F]^n_\alpha$.

Пусть $F_0 = F$ и $F_n = [F]^n_\alpha$ при $n \geq 1$. Имеем

$$F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_n \subseteq \dots \subseteq [F] \tag{5}$$

и

$$\bigcup_{n\geq 0} F_n = [F]. \tag{6}$$

Если при некотором n выполняется равенство $F_n = F_{n+1}$, то $F_{n+1} = [F_n]_\alpha = [F_{n+1}]_\alpha = F_{n+2}$ и цепь (5) стабилизируется: $F_n = F_{n+1} = F_{n+2} = \dots$. Отсюда и из (5), (6) получаем равенство

$$F_n = [F]. \tag{7}$$

Наименьшее n такое, что верно (7), назовем *α-глубиной* множества F в $[F]$. Если такого n не существует, то считаем, что α-глубина множества F в $[F]$ бесконечна. Если α-глубина F конечна и равна n, то имеем цепь строгих включений $F = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n = [F]$.

Если множество F замкнуто, т. е. $F = [F]$, то в силу включений $F \subseteq [F]_\alpha \subseteq [F]$ имеем равенства $F = [F]_\alpha = [F]$ и поэтому F α-замкнуто. Обратно, если F α-замкнуто, то $F_0 = F = [F]_\alpha = F_1$, откуда получаем $F_1 = F_2$, $F_2 = F_3, \dots$ и $[F] = \bigcup\limits_{n\geq 0} F_n = F$, т. е. F замкнуто. Таким образом, верно следующее утверждение.

Предложение 2. *Множество F α-замкнуто тогда и только тогда, когда F замкнуто.*

§ 2. Группы G_F и $L_n(F)$

Приведем необходимые для дальнейшего определения и обозначения. Будем опираться на работу [2].

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество натуральных чисел. Полную полугруппу преобразований множества E_k, симметрическую и знакопеременную группы подстановок на E_k обозначим через $\mathscr{F}_k$, S_k и A_k соответственно. Пусть $\mathscr{F}^m_k$ — m-я декартова степень полугруппы $\mathscr{F}_k$. Всюду далее будем предполагать, что элементы $g = (g_1, \dots, g_m)$ полугруппы $\mathscr{F}^m_k$ действуют на элементы $\alpha = (a_1, \dots, a_m)$ из E^m_k «покоординатно»:

$$\alpha g = (a_1 g_1, \dots, a_m g_m).$$

Будем использовать следующее обозначение: $\overline{m,n} = \{m, m+1, \dots, n\}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$ и $m < n$.

Пусть $G_1, \ldots, G_m$ — множества и $G = G_1 \times \cdots \times G_m$ — их декартово произведение. Для каждого $i \in \overline{1,m}$ обозначим через π_i отображение проектирования G на сомножитель G_i: если $g \in G$, $g = (g_1, \ldots, g_m)$, то $g\pi_i = g_i$.

Для произвольной группы $(G, \cdot)$ запись $H \leq G$ означает, что H — подгруппа группы G. Пишем $H \trianglelefteq G$, если H — нормальная подгруппа (нормальный делитель) группы G. Через $\langle B \rangle$ обозначаем подгруппу группы G, порождаемую множеством B. Для $g, h \in G$ полагаем $[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh$, $g^h = h^{-1}gh$. Здесь $[g,h]$ — коммутатор элементов g и h, g^h — результат трансформирования элемента g элементом h.

Пусть G — подпрямое произведение групп $G_1, \ldots, G_m$. В этом случае пишем $G \leq_s G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$. Для каждого i, $i \in \overline{1,m}$, через $G^{(i)}$ обозначаем следующую подгруппу группы G:

$$G^{(i)} = \{g \in G \mid \forall r \in \overline{1,m} \setminus \{i\}\ (g\pi_r = e_r)\},$$

где e_r — единица группы G_r. Ясно, что $G^{(i)} \trianglelefteq G$ и $|G^{(i)} \cap G^{(j)}| = 1$ при $i \neq j$. Группа G содержит внутреннее прямое произведение $G^{(1)}G^{(2)} \ldots G^{(m)}$. Пусть $D_i = G^{(i)}\pi_i$. Легко видеть, что

$$D_i \cong G^{(i)}, \quad D_i \trianglelefteq G_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{8}$$

$$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_m \leq G. \tag{9}$$

Подстановки $g, h \in S_k$ умножаем согласно равенству $(gh)(x) = h(g(x))$ $(x \in E_k)$.

Для каждого n зафиксируем на E_k^n линейный порядок $<$. При $n = 1$ этот порядок совпадает с естественным порядком на E_k: $0 < 1 < \cdots < k-1$. Если элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m = k^n)$ множества E_k^n упорядочены так, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$, то элементы множества E_k^{n+1} выписываем в следующем порядке:

$$\alpha_1 0 < \alpha_2 0 < \cdots < \alpha_m 0 < \alpha_1 1 < \alpha_2 1 < \cdots < \alpha_m 1 < \\ \cdots < \alpha_1(k-1) < \alpha_2(k-1) < \cdots < \alpha_m(k-1).$$

Другими словами, если $\alpha, \beta \in E_k^n$, $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$, то $\alpha < \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha_j < \beta_j$ при некотором j и $\alpha_r = \beta_r$ при всех $r \in \overline{j+1,n}$. При указанном линейном порядке любое отображение f множества E_k^n в произвольное множество Y однозначно определяется своим табличным заданием, т. е. строкой $\bar{f} \in Y^m$ $(m = k^n)$,

$$\bar{f} = (f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_m)).$$

Пусть $F = \{f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \mid i \in \overline{1,L}\}$ — конечная непустая система функций из P_k. Множество $[F]_\alpha$ замкнуто относительно операции добавления и удаления фиктивных переменных. Поэтому можно считать, что $F \subseteq P_k(N)$, $N = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_L\}$.

Пусть M_n — множество n-местных функций из P_k, реализуемых α-формулами над F, в которые входят лишь переменные из множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из M_n может быть представлена в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_{j_t}(f_{j_{t-1}}(\ldots f_{j_2}(f_{j_1}(x_{i_0}, \ldots, x_{i_{N-1}}), \\ x_{i_N}, \ldots, x_{i_{2N-2}}) \ldots), x_{i_{(N-1)(t-1)+1}}, \ldots, x_{i_{(N-1)t}}), \tag{10}$$

где $j_s \in \overline{1,L}$, $i_r \in \overline{1,n}$, $t \in \mathbb{N}$. Ясно, что $[F]_\alpha = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$.

Для произвольных $m \in \mathbb{N}$, функции $f \in P_k(m)$ и вектора $\alpha = (a_1, \dots, a_{m-1}) \in E_k^{m-1}$ через $f^{(a_1,\dots,a_{m-1})}$ или просто $f^{(\alpha)}$ обозначим одноместную подфункцию $f(x, a_1, \dots, a_{m-1})$. Так как $f^{(\alpha)} \in \mathscr{F}_k$, а элементы из $\mathscr{F}_k$ действуют на элементы из E_k справа, то $f(x_1, \dots, x_m) = x_1 f^{(x_2,\dots,x_m)}$. Представление (10) можно переписать в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_{i_0} f_{j_1}^{(x_{i_1},\dots,x_{i_{N-1}})} \dots f_{j_t}^{(x_{i_{(t-1)(N-1)+1}},\dots,x_{i_{t(N-1)}})}. \tag{11}$$

Пусть $\xi_j^{(i_1,\dots,i_{N-1})}(x_1, \dots, x_n) = f_j^{(x_{i_1},\dots,x_{i_{N-1}})}$ для $j \in \overline{1, L}$, $i_1, \dots, i_{N-1} \in \overline{1, n}$,

$$\delta_{i_0}(x_1, \dots, x_n) = x_{i_0} \quad (i_0 \in \overline{1, n}).$$

Для $\alpha \in E_k^n$, $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, через $(\alpha)_{i_1,\dots,i_{N-1}}$ обозначим вектор $(a_{i_1}, \dots, a_{i_{N-1}}) \in E_k^{N-1}$. Тогда

$$\xi_j^{(i_1,\dots,i_{N-1})}(\alpha) = f_j^{((\alpha)_{i_1,\dots,i_{N-1}})} \in \mathscr{F}_k, \quad \delta_{i_0}(\alpha) = (\alpha)_{i_0} \in E_k.$$

Имеем $\xi_j^{(i_1,\dots,i_{N-1})} : E_k^n \to \mathscr{F}_k$, $\delta_{i_0} : E_k^n \to E_k$. Из (11) получаем

$$\begin{aligned} f(\alpha) = (\alpha)_{i_0} f_{j_1}^{((\alpha)_{i_1,\dots,i_{N-1}})} &\dots f_{j_t}^{((\alpha)_{i_{(t-1)(N-1)+1},\dots,i_{t(N-1)}})} \\ &= \delta_{i_0}(\alpha) \xi_{j_1}^{(i_1,\dots,i_{N-1})}(\alpha) \dots \xi_{j_t}^{(i_{(t-1)(N-1)+1},\dots,i_{t(N-1)})}(\alpha). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что для табличного задания $\bar{f}$ функции f имеет место равенство

$$\bar{f} = \bar{x}_{i_0} \bar{\xi}_{j_1}^{(i_1,\dots,i_{N-1})} \dots \bar{\xi}_{j_t}^{(i_{(t-1)(N-1)+1},\dots,i_{t(N-1)})}, \tag{12}$$

где t, $i_0, i_1, \dots, i_{t(N-1)}, j_1, \dots, j_t$ те же, что и в (10), $\bar{x}_{i_0}$ — табличное задание функции $\delta_{i_0}(x_1, \dots, x_n)$, $\bar{\xi}_j^{(\nu_1,\dots,\nu_{N-1})}$ — табличное задание отображения $\xi_j^{(\nu_1,\dots,\nu_{N-1})}(x_1, \dots, x_n)$, $\nu_1, \dots, \nu_{N-1} \in \overline{1, n}$. Ясно, что $\bar{x}_{i_0} \in E_k^m$, $\bar{\xi}_j^{(\nu_1,\dots,\nu_{N-1})} \in \mathscr{F}_k^m$, где $m = k^n$. Таким образом, любая функция $f \in M_n$ имеет табличное задание вида (12), и, наоборот, функция с табличным заданием (12) принадлежит M_n. Множество $\{\bar{f} \mid f \in M_n\}$ обозначим через $\overline{M}_n$.

Пусть $L_n(F)$ — подполугруппа полугруппы $\mathscr{F}_k^{k^n}$, порожденная элементами $\bar{\xi}_j^{(\nu_1,\dots,\nu_{N-1})}$, $j \in \overline{1, L}$, $\nu_1, \dots, \nu_{N-1} \in \overline{1, n}$. Вместо $L_n(F)$ будем писать просто L_n, если ясно, о каком множестве F идет речь. Множество $\overline{M}_n$ является объединением орбит полугруппы L_n, содержащих табличные задания $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in E_k^{k^n}$:

$$\overline{M}_n = \bigcup_{i=1}^{n} \{\bar{x}_i \bar{\xi} \mid \bar{\xi} \in L_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{x}_i L_n.$$

Очевидно, что система F α-полна тогда и только тогда, когда множество $\overline{M}_n$ совпадает со всем множеством $E_k^{k^n}$ при любом n. В частности, $[F]_\alpha = P_k$, если L_n транзитивна на $E_k^{k^n}$ при любом n.

Через $P_k^{[1]}$ обозначим совокупность всех функций f из P_k со свойством: для любого α одноместная подфункция $f^{(\alpha)}$ является подстановкой из группы S_k.

Если $F \subseteq P_k^{[1]}$, то каждое отображение $\xi_j^{(\nu_1,\dots,\nu_{N-1})}$ принимает значения не во всей полугруппе $\mathscr{F}_k$, а лишь в S_k, и L_n — подгруппа в $S_k^{k^n}$. В этом случае для α-полноты системы F достаточно, чтобы группа L_n была транзитивна на $E_k^{k^n}$ при всех n. Далее предполагаем, что $F \subseteq P_k^{[1]}$. Через G_F обозначим подгруппу группы $S_k^{k^{N-1}}$, порожденную наборами $\bigl(f_j^{(\alpha_1)}, f_j^{(\alpha_2)}, \dots, f_j^{(\alpha_{k^{N-1}})}\bigr)$, $j = 1, 2, \dots, L$, а через $G_F^{(\alpha)}$, $\alpha \in E_k^{N-1}$, — подгруппу из S_k, порожденную подстановками $f_1^{(\alpha)}, f_2^{(\alpha)}, \dots, f_L^{(\alpha)}$. Отметим, что G_F — подпрямое произведение групп $G_F^{(\alpha)}$, $\alpha \in E_k^{N-1}$. Кроме того, $G_F \le L_{N-1}$, а при $N = 2$ группы G_F и L_{N-1} порождаются одними и теми же элементами и поэтому справедливы равенства $G_F = L_{N-1} = L_1$.

Пусть $n \ge N-1$. Положим $L_{n,i} = L_n \pi_i$ $(i = 1, \dots, k^n)$. Тогда $L_{n,i} \le S_k$ и $L_n \le_s L_{n,1} \times L_{n,2} \times \dots \times L_{n,k^n}$. Нетрудно проверить, что для каждого i, $1 \le i \le k^n$, найдутся наборы $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,s_i} \in E_k^{N-1}$ $(s_i \ge 1)$ такие, что $L_{n,i} = \bigl\langle G_F^{(\alpha_{i,1})}, \dots, G_F^{(\alpha_{i,s_i})} \bigr\rangle$. Иными словами, каждая группа $L_{n,i}$ порождается элементами $f_1^{(\alpha_{i,1})}, \dots, f_L^{(\alpha_{i,1})}, \dots, f_1^{(\alpha_{i,s_i})}, \dots, f_L^{(\alpha_{i,s_i})}$. В частности,

$$G_F^{(\alpha)} \le L_{n,i} \tag{13}$$

при некотором $\alpha \in E_k^{N-1}$.

Пусть $L_n^{(i)} = \{g \in L_n \mid \forall j \in \overline{1,k^n} \setminus \{i\}\ (g\pi_i = e)\}$, $D_i = L_n^{(i)} \pi_i$, $1 \le i \le k^n$. Тогда

$$D_i \cong L_n^{(i)}, \quad D_i \trianglelefteq L_{n,i} \quad (i = 1, 2, \dots, k^n), \tag{14}$$

$$D_1 \times D_2 \times \dots \times D_{k^n} \le L_n. \tag{15}$$

Для $N = 2$ отметим связь между группами L_n и L_{n+1}. Пусть B_n и B_{n+1} — множества порождающих элементов групп L_n и L_{n+1} соответственно, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{k^n}$ — все элементы множества E_k^n, $\tilde\alpha_1 < \tilde\alpha_2 < \dots < \tilde\alpha_{k^{n+1}}$ — все элементы множества E_k^{n+1}. Для любого i $(i = 1, \dots, k^n)$ выполняются равенства

$$\tilde\alpha_i = \alpha_i 0,\ \tilde\alpha_{k^n+i} = \alpha_i 1,\ \tilde\alpha_{2\cdot k^n+i} = \alpha_i 2, \dots, \tilde\alpha_{(k-1)\cdot k^n+i} = \alpha_i (k-1).$$

Множество B_n состоит из элементов $\bar\xi_{j,n}^{(i)} = \bigl(f_j^{((\alpha_1)_i)}, \dots, f_j^{((\alpha_{k^n})_i)}\bigr)$, где $j \in \overline{1,L}$, $i \in \overline{1,n}$, а множество B_{n+1} — из элементов $\bar\xi_{j,n+1}^{(i)} = \bigl(f_j^{((\tilde\alpha_1)_i)}, \dots, f_j^{((\tilde\alpha_{k^{n+1}})_i)}\bigr)$, где $j \in \overline{1,L}$, $i \in \overline{1,n+1}$. Отсюда

1) при $i \le n$

$$\bar\xi_{j,n+1}^{(i)} = (\underbrace{\bar\xi_{j,n}^{(i)}, \dots \bar\xi_{j,n}^{(i)}}_{k});$$

2) при $i = n+1$ получаем «новые» векторы:

$$\bar\xi_{j,n+1}^{(n+1)} = (\underbrace{f_j^{(0)}, \dots, f_j^{(0)}}_{k^n}, \underbrace{f_j^{(1)}, \dots, f_j^{(1)}}_{k^n}, \dots, \underbrace{f_j^{(k-1)}, \dots, f_j^{(k-1)}}_{k^n}).$$

Поэтому верны следующие утверждения:

3) если $g \in L_n$, то

$$(\underbrace{g, \dots, g}_{k}) \in L_{n+1}; \tag{16}$$

4) если $(g_0, g_1, \dots, g_{k-1}) \in L_1$, то

$$(\underbrace{g_0, \dots, g_0}_{k^n}, \underbrace{g_1, \dots, g_1}_{k^n}, \dots, \underbrace{g_{k-1}, \dots, g_{k-1}}_{k^n}) \in L_{n+1}. \tag{17}$$

§ 3. α-Базис для $k = 4$

Фиксируем обозначения некоторых подстановок из S_4, записывая их в виде произведения независимых циклов: e — тождественная подстановка, $a = (01)(23)$, $b = (02)(13)$, $c = (03)(12)$, $\sigma = (0123)$, $\tau = (01)$, $\rho = (02)$, $\pi = (03)$, $\alpha = (012)$, $\beta = (013)$, $\gamma = (123)$. Группа S_4 имеет всего две собственные нормальные подгруппы: K_4 и A_4, где $K_4 = \{e, a, b, c\}$ — абелева подгруппа, называемая *группой Клейна* или *четверной группой*.

Пусть $F = \{f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\}$, где бинарные операции f_1 и f_2 заданы таблицами Кэли:

f_1	0	1	2	3
0	1	1	1	0
1	2	2	0	2
2	3	3	2	3
3	0	0	3	1

f_2	0	1	2	3
0	1	0	1	1
1	0	2	2	2
2	2	3	3	3
3	3	1	0	0

(18)

Бинарные операции f_1 и f_2 являются операциями с правым сокращением: $f_i(x, z) = f_i(y, z) \implies x = y$ $(i = 1, 2)$ для любых $x, y, z \in E_4$.

Все правые трансляции группоидов (E_4, f_1) и (E_4, f_2) являются подстановками множества E_4. Обозначим через $R_0^{(i)}$, $R_1^{(i)}$, $R_2^{(i)}$, $R_3^{(i)}$ все правые трансляции группоида (E_4, f_i) $(i = 1, 2)$. Имеем $R_0^{(1)} = R_1^{(1)} = \sigma$, $R_2^{(1)} = \tau$, $R_3^{(1)} = \gamma$, $R_0^{(2)} = \tau$, $R_1^{(2)} = \gamma$, $R_2^{(2)} = R_3^{(2)} = \sigma$. Отметим равенство $\gamma = \sigma\tau$.

Группа G_F порождается элементами

$$g_1 = \left(f_1^{(0)}, f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, f_1^{(3)}\right) = (\sigma, \sigma, \tau, \gamma), \quad g_2 = \left(f_2^{(0)}, f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, f_2^{(3)}\right) = (\tau, \gamma, \sigma, \sigma).$$

Для групп $G_F^{(i)}$, $i \in E_4$, имеем

$$G_F^{(0)} = \langle \sigma, \tau \rangle = S_4, \quad G_F^{(1)} = \langle \sigma, \gamma \rangle = \langle \sigma, \sigma\tau \rangle = S_4,$$

$$G_F^{(2)} = \langle \tau, \sigma \rangle = S_4, \quad G_F^{(3)} = \langle \gamma, \sigma \rangle = \langle \sigma\tau, \sigma \rangle = S_4.$$

Таким образом, $G_F \le_s S_4 \times S_4 \times S_4 \times S_4$, т. е. G_F — подпрямое произведение четырех экземпляров группы S_4. Так как $N = 2$, то группа L_1 порождается теми же элементами, что и группа G_F. Поэтому $L_1 = \langle g_1, g_2 \rangle = G_F \le_s S_4^4$.

Лемма 1. $K_4 \times A_4 \times K_4 \times A_4 \le L_1(F)$.

Доказательство. Из равенств $G_F^{(\alpha)} = S_4$, $\alpha \in E_4$, и (13) получаем $L_{1,i} = S_4$ $(i \in \overline{1,4})$. Пусть $D_i = L_1^{(i)}\pi_i$, $i = 1, \dots, 4$. Ввиду соотношений (14) и (15) имеем

$$D_i \trianglelefteq S_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{19}$$

$$D_1 \times D_2 \times D_3 \times D_4 \le L_1. \tag{20}$$

Так как $g_1^4 = (e, e, e, \gamma) \in L_1$, $g_2^4 = (e, \gamma, e, e) \in L_1$, то $\gamma \in D_2$ и $\gamma \in D_4$. Отсюда и из (19) следует, что

$$A_4 \le D_2 \quad \text{и} \quad A_4 \le D_4. \tag{21}$$

Напомним, что все неединичные нормальные подгруппы группы S_4 исчерпываются списком K_4, A_4, S_4. Из (21) получаем, в частности, соотношения (e, b, e, e)

$\in L_1$, $(e,e,e,b) \in L_1$. Далее, $g_1^6 = (b,b,e,e) \in L_1$, $g_2^6 = (e,e,b,b) \in L_1$. Учитывая равенство $b^2 = e$, из последних соотношений получаем $(b,e,e,e) \in L_1$, $(e,e,b,e) \in L_1$, откуда

$$K_4 \le D_1 \quad \text{и} \quad K_4 \le D_3. \tag{22}$$

Из (20)–(22) следует, что

$$K_4 \times A_4 \times K_4 \times A_4 \le L_1.$$

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. $K_4^{4^n} \le L_n(F)$ *при всех* $n \ge 1$.

Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 1$ утверждение леммы следует из леммы 1. Пусть утверждение верно для n, покажем, что оно верно для $n+1$. По предположению индукции

$$K_4^{4^n} \le L_n. \tag{23}$$

Обозначим через $e_{i,h}$ $(i = 1, \dots, 4^n, h \in S_4)$ вектор из $S_4^{4^n}$, у которого i-я компонента равна h, а остальные компоненты равны e. Через p_h $(h \in S_4)$ обозначим вектор $p_h = (\underbrace{h, \dots, h}_{4^n})$.

Из равенств $G_F^{(\alpha)} = S_4$, $\alpha \in E_4$, и (13) получаем $L_{n+1,i} = S_4$ $(i \in \overline{1, 4^{n+1}})$. Пусть $D_i = L_{n+1}^{(i)} \pi_i$ $(i = 1, \dots, 4^{n+1})$. Ввиду соотношений (14) и (15) имеем

$$D_i \trianglelefteq S_4 \quad (i = 1, 2, \dots, 4^{n+1}), \tag{24}$$

$$D_1 \times D_2 \times \dots \times D_{4^{n+1}} \le L_{n+1}. \tag{25}$$

Пусть

$$\bar g_1 = (\underbrace{\sigma, \dots, \sigma}_{4^n}, \underbrace{\sigma, \dots, \sigma}_{4^n}, \underbrace{\tau, \dots, \tau}_{4^n}, \underbrace{\gamma, \dots, \gamma}_{4^n}) = (p_\sigma, p_\sigma, p_\tau, p_\gamma),$$

$$\bar g_2 = (\underbrace{\tau, \dots, \tau}_{4^n}, \underbrace{\gamma, \dots, \gamma}_{4^n}, \underbrace{\sigma, \dots, \sigma}_{4^n}, \underbrace{\sigma, \dots, \sigma}_{4^n}) = (p_\tau, p_\gamma, p_\sigma, p_\sigma).$$

Ввиду (17) $\bar g_1, \bar g_2 \in L_{n+1}$. Имеем

$$\bar g_1^4 = (p_e, p_e, p_e, p_\gamma) = (\underbrace{e, \dots, e}_{4^n}, \underbrace{e, \dots, e}_{4^n}, \underbrace{e, \dots, e}_{4^n}, \underbrace{\gamma, \dots, \gamma}_{4^n}) \in L_{n+1},$$

$$\bar g_2^4 = (p_e, p_\gamma, p_e, p_e) = (\underbrace{e, \dots, e}_{4^n}, \underbrace{\gamma, \dots, \gamma}_{4^n}, \underbrace{e, \dots, e}_{4^n}, \underbrace{e, \dots, e}_{4^n}) \in L_{n+1}.$$

Далее,

$$[\sigma, \tau] = \alpha, \ [\sigma, \gamma] = \alpha, \ [\tau, \sigma] = \alpha^2, \ [\gamma, \sigma] = \alpha^2, \ [\bar g_1, \bar g_2] = (p_\alpha, p_\alpha, p_{\alpha^2}, p_{\alpha^2}) \in L_{n+1}.$$

В силу (23) вектор

$$e_{i,a} = (e, \dots, e, \underset{i}{a}, e, \dots, e),$$

где $a = (01)(23) \in K_4$, принадлежит L_n. Ввиду (16)

$$\bar e_{i,a} = (e_{i,a}, e_{i,a}, e_{i,a}, e_{i,a}) \in L_{n+1}.$$

Имеем

$$a^\gamma = \gamma^{-1} a \gamma = b, \quad b \in K_4, \quad [\bar e_{i,a}, \bar g_1^4] = (p_e, p_e, p_e, e_{i,c}) \in L_{n+1},$$

$$[\bar{e}_{i,a}, \bar{g}_2^4] = (p_e, e_{i,c}, p_e, p_e) \in L_{n+1}.$$

Отсюда $c \in D_j$ при $j = 4^n + i$ и $j = 3 \cdot 4^n + i$ $(i = 1, \ldots, 4^n)$. Ввиду (24) при этих j имеем соотношение

$$K_4 \le D_j. \tag{26}$$

Запишем

$$\bar{e}_{i,a}^{[\bar{g}_1, \bar{g}_2]} = (e_{i,c}, e_{i,c}, e_{i,b}, e_{i,b}) \in L_{n+1}.$$

Ввиду (16) и (23) векторы $\bar{e}_{i,b} = (e_{i,b}, e_{i,b}, e_{i,b}, e_{i,b})$ и $\bar{e}_{i,c} = (e_{i,c}, e_{i,c}, e_{i,c}, e_{i,c})$ принадлежат L_{n+1}. Умножая их на вектор $(e_{i,c}, e_{i,c}, e_{i,b}, e_{i,b})$, получим

$$(e_{i,a}, e_{i,a}, p_e, p_e) \in L_{n+1}, \quad (p_e, p_e, e_{i,a}, e_{i,a}) \in L_{n+1}.$$

В силу (26) имеем

$$(p_e, e_{i,a}, p_e, p_e) \in L_{n+1}, \quad (p_e, p_e, p_e, e_{i,a}) \in L_{n+1}.$$

Поэтому

$$(e_{i,a}, p_e, p_e, p_e) \in L_{n+1}, \quad (p_e, p_e, e_{i,a}, p_e) \in L_{n+1}$$

и, следовательно,

$$K_4 \le D_j \tag{27}$$

при $j = i$ и $j = 2 \cdot 4^n + i$ $(i = 1, \ldots, 4^n)$. Из (25)–(27) вытекает, что $K_4^{4^{n+1}} \le L_{n+1}$. Лемма 2 доказана. $\square$

Группа K_4 транзитивна на E_4. Согласно лемме 2 группа L_n транзитивна на $E_4^{4^n}$ при любом $n \ge 1$. Поэтому верно следующее предложение.

Теорема 1. *Система функций $F = \{f_1, f_2\}$, где f_1 и f_2 заданы таблицами* (18), *α-полна.*

Поскольку при любом k в P_k нет α-полных систем, состоящих из одной функции [2, теорема 3], то система $F = \{f_1, f_2\}$ является α-базисом.

Рассмотрим теперь систему функций $T = \{+\} \cup S_4$, где $+$ — операция сложения по модулю 4, определенная на E_4.

Группа $L_1(T)$ порождается в данном случае наборами $(e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3)$, (h, h, h, h), где $h \in S_4$. Легко видеть, что $G_T^{(\alpha)} = S_4$ при любом $\alpha \in E_4$.

Лемма 3. $K_4 \times K_4 \times K_4 \times K_4 \le L_1(T)$.

Доказательство. Из равенств $G_F^{(\alpha)} = S_4$, $\alpha \in E_4$, и (13) получаем $L_{1,i} = S_4$ $(i \in \overline{1,4})$. Пусть $D_i = L_1^{(i)}\pi_i$, $i \in \overline{1,4}$. Ввиду соотношений (14) и (15) имеем

$$D_i \trianglelefteq S_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{28}$$

$$D_1 \times D_2 \times D_3 \times D_4 \le L_1. \tag{29}$$

Пусть $e_{i,h}$ $(i \in \overline{1,4})$, $h \in S_4$ — вектор из S_4^4, у которого i-я компонента равна h, а остальные компоненты равны e. Через p_h $(h \in S_4)$ обозначим вектор $p_h = (h, h, h, h)$. Пусть $g_1 = (e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3)$. Имеем

$$g_1 = (e, a\rho, b, c\rho), \quad p_\rho = (\rho, \rho, \rho, \rho), \quad g_1^2 = (e, b, e, b),$$

$$g_2 = g_1 \cdot p_\rho = (\rho, a, (13), c), \quad p_\beta = (\beta, \beta, \beta, \beta),$$

$$[\rho, \beta] = [(02), (013)] = (02) \cdot (02)^{(013)} = (02) \cdot (12) = (012) = \alpha,$$

$$[a, \beta] = a \cdot a^\beta = a \cdot b = c,$$

$$[(13), \beta] = (13) \cdot (13)^{(013)} = (13) \cdot (30) = (310) = \beta^2,$$
$$[c, \beta] = c \cdot c^{\beta} = c \cdot a = b,$$
$$g_3 = [g_2, p_\beta] = g_2^{-1} p_\beta^{-1} g_2 p_\beta = (\alpha, c, \beta^2, b), \quad g_3^3 = (e, c, e, b),$$
$$g_3^3 \cdot g_1^2 = (e, a, e, e) = e_{2,a}, \quad a \in D_2, \quad K_4 \leq D_2,$$
$$e_{2,b} = (e, b, e, e) \in L_1,$$
$$e_{2,b} \cdot g_1^2 = (e, e, e, b) = e_{4,b}, \quad b \in D_4, \quad K_4 \leq D_4,$$
$$g_1^3 = (e, \sigma^3, \sigma^2, \sigma) = (e, c\rho, b, a\rho), \quad p_c = (c, c, c, c),$$
$$g_4 = p_c \cdot g_1^3 = (c, \rho, a, (13)), \quad g_5 = [g_4, p_\beta] = (b, \alpha, c, \beta^2),$$
$$g_5^3 = (b, e, c, e), \quad g_6 = g_5^3 \cdot e_{2,c} \cdot e_{4,c} = (b, c, c, c) \in L_1,$$
$$g_6 \cdot p_c = (a, e, e, e) = e_{1,a}, \quad a \in D_1, \quad K_4 \leq D_1,$$
$$e_{1,b} = (b, e, e, e) \in L_1,$$
$$e_{1,b} \cdot g_5^3 = (e, e, c, e) \in L_1, \quad c \in D_3, \quad K_4 \leq D_3.$$

Таким образом, $K_4 \leq D_i$ при любом $i \in \overline{1,4}$. Лемма 3 доказана. $\square$

Из леммы 3 следует, что все одноместные функции из P_4 входят в $[T]_\alpha$, т. е. $P_4(1) \subseteq [T]_\alpha$.

Покажем, что для двуместных функций это уже не так.

Группа $L_2(T)$ порождается элементами

$$\bar{g}_1 = (g_1, g_1, g_1, g_1) = (e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3),$$

$$\begin{aligned}\bar{g}_2 = (p_e, p_\sigma, p_{\sigma^2}, p_{\sigma^3}) &= (e, e, e, e, \sigma, \sigma, \sigma, \sigma, \sigma^2, \sigma^2, \sigma^2, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^3, \sigma^3, \sigma^3)\\ = (p_e, p_\sigma, p_b, p_{\sigma^3}) &= (e, e, e, e, \sigma, \sigma, \sigma, \sigma, b, b, b, b, \sigma^3, \sigma^3, \sigma^3, \sigma^3),\end{aligned}$$

$$\bar{p}_h = (p_h, p_h, p_h, p_h) = (\underbrace{h, h, h, h, h, h, h, h, h, h, h, h, h, h, h, h}_{16}),$$

где $h \in S_4$, $g_1 = (e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3)$, $p_h = (h, h, h, h)$.

Имеем $\overline{M}_2 = \bar{x}_1 L_2 \cup \bar{x}_2 L_2$. Здесь

$\bar{x}_1 = (0,1,2,3,0,1,2,3,0,1,2,3,0,1,2,3)$, $\bar{x}_2 = (0,0,0,0,1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3)$.

Пусть $\bar{0} = (\underbrace{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}_{16})$. Тогда $\bar{x}_1 = \bar{0}\bar{g}_1$, $\bar{x}_2 = \bar{0}\bar{g}_2$. Поэтому $\overline{M}_2 = \bar{0}L_2$.

Исследуем группу $L_2 = L_2(T)$. Пусть H — подгруппа группы S_4^4, имеющая вид $H = \{(r_1, r_2, r_1, r_2) \mid (r_1, r_2) \in K_4 \times K_4\}$.

Лемма 4. *Если $s = (s_1, \ldots, s_{16}) \in L_2$, то существует элемент $(r_1, r_2, r_1, r_2) \in H$ такой, что*

$$(s_1, s_2, s_3, s_4) \cdot (r_1, r_2, r_1, r_2) = (s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}).$$

Доказательство. Группа L_2 конечна. Поэтому любой ее элемент $\bar{g}$ представим в виде произведения элементов $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, $\bar{p}_h$ ($h \in S_4$). В этом произведении элементы $\bar{g}_2$ передвинем направо в конец произведения, начиная с самого правого $\bar{g}_2$ и используя следующие равенства:

$$\bar{g}_2 \cdot \bar{g}_1 = \bar{g}_1 \bar{g}_2 [\bar{g}_2, \bar{g}_1] = \bar{g}_1 \cdot (\bar{g}_1)^{-1} \bar{g}_2 \bar{g}_1 = \bar{g}_1 \cdot (\bar{g}_2)^{\bar{g}_1},$$

$$\bar{g}_2 \cdot \bar{p}_h = \bar{p}_h \cdot (\bar{g}_2)^{\bar{p}_h}, \quad (\bar{g}_2)^{\overline{w}} \cdot \bar{g}_1 = \bar{g}_1 \cdot (\bar{g}_2)^{\overline{w} \cdot \bar{g}_1}, \quad (\bar{g}_2)^{\overline{w}} \cdot \bar{p}_h = \bar{p}_h \cdot (\bar{g}_2)^{\overline{w} \cdot \bar{p}_h},$$

где $\overline{w} \in L_2$, $\overline{w}$ — произведение элементов вида $\bar{g}_1$ и $\bar{p}_h$. Ясно, что $\overline{w}$ имеет вид

$$\overline{w} = (w, w, w, w), \tag{30}$$

где $w \in L_1$. Таким образом, $\bar{g} = \bar{u} \cdot \bar{v}$, где $\bar{u}$ — произведение элементов вида $\bar{g}_1$ и $\bar{p}_h$, а $\bar{v}$ — произведение элементов вида $(\bar{g}_2)^{\overline{w}}$, где $\overline{w}$ вида (30). Элемент $\bar{u}$ имеет вид $\bar{u} = (u, u, u, u)$ $(u \in L_1)$.

Пусть $\overline{H}$ — подгруппа в L_2, порожденная элементами вида

$$\bar{g}_2^{(w,w,w,w)}, \tag{31}$$

где $w \in L_1$. Если $\bar{g}_2^{(w,w,w,w)} = (v_1, \ldots, v_{16})$, $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$, то $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = e$, $v_9 = b^{w_1}$, $v_{10} = b^{w_2}$, $v_{11} = b^{w_3}$, $v_{12} = b^{w_4}$. Так как K_4 — нормальная подгруппа в S_4, то $v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12} \in K_4$. Рассмотрим подгруппу Q группы K_4^4, порожденную элементами

$$(v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}) = (b, b, b, b)^{(w_1, w_2, w_3, w_4)}, \tag{32}$$

где $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in L_1$. Элемент w равен произведению элементов вида

$$g_1 = (e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3), \quad p_\sigma = (\sigma, \sigma, \sigma, \sigma), \quad p_\tau = (\tau, \tau, \tau, \tau).$$

Далее,

$$\sigma = a\rho, \quad \sigma^2 = b, \quad \sigma^3 = c\rho, \quad g_1 = (e, a\rho, b, c\rho) = (e, a, b, c) \cdot (e, \rho, e, \rho),$$

$$p_\sigma = (a\rho, a\rho, a\rho, a\rho) = (a, a, a, a) \cdot (\rho, \rho, \rho, \rho).$$

Выпишем нормализаторы элементов $a, b, c \in K_4$ группы S_4:

$$N(a) = K_4 \cup \{\tau, (23), (0213), (0312)\}, \quad N(b) = K_4 \cup \{\rho, (13), (0123), (0321)\},$$

$$N(c) = K_4 \cup \{(03), (12), (0132), (0231)\}.$$

Имеем

$$a^\tau = a, \quad b^\tau = c, \quad c^\tau = b, \quad a^\rho = c, \quad b^\rho = b, \quad c^\rho = a.$$

Трансформирование элементами g_1, p_σ и p_τ наборов из K_4^4 совпадает с трансформированием этих наборов элементами $p = (e, \rho, e, \rho)$, $p_\rho = (\rho, \rho, \rho, \rho)$ и p_τ соответственно:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^{g_1} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^p = \big(x_1, x_2^\rho, x_3, x_4^\rho\big),$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^{p_\sigma} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{p_\rho} = \big(x_1^\rho, x_2^\rho, x_3^\rho, x_4^\rho\big).$$

Поэтому вместо произвольных наборов $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in L_1$ в (32) можно рассматривать лишь наборы из подгруппы R группы S_4^4, порожденной элементами

$$p = (e, \rho, e, \rho), \quad p_\rho = (\rho, \rho, \rho, \rho), \quad p_\tau = (\tau, \tau, \tau, \tau).$$

Очевидно, что если $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in R$, то $(w_1, w_2) = (w_3, w_4)$ и (w_1, w_2) является произведением наборов (e, ρ), (ρ, ρ), (τ, τ). Пусть W — подгруппа группы S_4^2, порожденная элементами (e, ρ), (ρ, ρ), (τ, τ). Ясно, что $|W| = |R|$. Подстановки e, ρ и τ оставляют элемент $3 \in E_4$ неподвижным. Поэтому их можно рассматривать как подстановки из S_3. Нетрудно проверить, что группа W содержит 36 элементов и изоморфна группе $S_3 \times S_3$. Отсюда $|W| = |R| = 36$. Легко убедиться, что имеется ровно 9 элементов вида $(b, b)^{(w_1, w_2)}$, где $(w_1, w_2) \in W$.

Это элементы (a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c). Вместе они порождают подгруппу $K_4 \times K_4$. Итак, произвольный элемент $\bar{g} \in L_2$ представим в виде $\bar{g} = \bar{u} \cdot \bar{v}$, где $\bar{u}$ имеет вид $\bar{u} = (u,u,u,u)$ $(u \in L_1)$, а $\bar{v}$ — вид $\bar{v} = (p_e, v, r, w)$, здесь $p_e = (e,e,e,e)$, $r = (r_1, r_2, r_1, r_2)$, $(r_1, r_2) \in K_4^2$, $v, w \in S_4^4$. Пусть $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$. Тогда

$$\bar{g} = (u, u \cdot v, u \cdot r, u \cdot w),$$

$$u \cdot r = (u_1 \cdot r_1, u_2 \cdot r_2, u_3 \cdot r_1, u_4 \cdot r_2) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \cdot (r_1, r_2, r_1, r_2).$$

Лемма 4 доказана. $\square$

Покажем, что $P_4(2) \not\subseteq [T]_\alpha$. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2)$ из $P_4(2)$, табличное задание которой имеет вид $\bar{f} = (0000000010000000)$. Пусть существует элемент $\bar{s} \in L_2$, $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_{16})$, такой, что $\bar{f} = \bar{0}\bar{s}$. В силу леммы 4

$$(s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}) = (s_1, s_2, s_3, s_4)(r_1, r_2, r_1, r_2)$$

для некоторого набора $(r_1, r_2) \in K_4 \times K_4$. Имеем

$$(0000)(s_1, s_2, s_3, s_4) = (0000),$$

$$\begin{aligned}(0000)(s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}) &= (0000)(s_1, s_2, s_3, s_4)(r_1, r_2, r_1, r_2) \\ &= (0000)(r_1, r_2, r_1, r_2) = (x, y, x, y),\end{aligned}$$

где $x = r_1(0)$, $y = r_2(0)$. При любых $(r_1, r_2) \in K_4 \times K_4$ набор (x, y, x, y) отличен от набора $(1, 0, 0, 0)$. Следовательно, $f \notin [T]_\alpha$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Система функций $T = \{+\} \cup S_4$ не является α-полной.*

Пусть $F = \{*\} \cup S_4$, где $*$ — произвольная квазигрупповая операция на E_4. В [6, теорема 6] доказано, что

1) если квазигруппа $(E_4, *)$ изотопна элементарной 2-группе $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$, то система функций F не является α-полной;

2) если квазигруппа $(E_4, *)$ не изотопна элементарной 2-группе $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$, то она изотопна циклической группе $\mathbb{Z}_4$ и система функций F α-полна тогда и только тогда, когда α-полна система функций $T = S_4 \cup \{+\}$, где $+$ — операция сложения по модулю 4.

Отсюда и из теоремы 2 получаем

Следствие. *Для любой квазигрупповой операции $*$ на E_4 система функций $F = \{*\} \cup S_4$ не является α-полной.*

Операция сложения по модулю 4, определенная на множестве E_4, является существенной функцией, принимающей все значения из E_4. Все одноместные функции из P_4 порождаются функциями из множества T. По теореме Слупецкого система T полна. Система T является примером полной, но не α-полной системы функций.

Пусть $\varphi = (12)$, $\psi = (23)$ — подстановки из S_4. Определим функции

$$f_1(x,y) = \varphi(y) + x, \quad f_2(x,y) = \psi(y) + x.$$

Выражения, стоящие в правых частях этих равенств, являются α-формулами над T. Поэтому $f_1, f_2 \in [T]_\alpha$. Так как

$$f_1(x,y) = x + \varphi(y), \quad f_2(x,y) = x + \psi(y),$$

то таблицы Кэли для функций f_1 и f_2 получаются из таблицы Кэли для операции сложения по модулю 4 перестановкой соответствующих столбцов. Пусть $T_1 = T \cup \{f_1, f_2\}$. Покажем, что система T_1 α-полна.

Для системы T_1 имеем $N = 2$. Группа L_1 совпадает с группой G_{T_1} и порождается элементами $(e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3)$, $(e, \sigma^2, \sigma, \sigma^3)$, $(e, \sigma, \sigma^3, \sigma^2)$, (h, h, h, h), где $h \in S_4$.

Лемма 5. $A_4 \times A_4 \times A_4 \times A_4 \leq L_1(T_1)$.

Доказательство. Пусть $D_i = L_1^{(i)}\pi_i$, $i \in \overline{1,4}$. Имеем $G_{T_1}^{(\alpha)} = S_4$ $(\alpha \in E_4)$. Отсюда и из (13) следует, что $L_{1,i} = S_4$ $(i = \overline{1,4})$. Ввиду соотношений (14) и (15) имеем $D_i \trianglelefteq S_4$ $(i = 1,2,3,4)$, $D_1 \times D_2 \times D_3 \times D_4 \leq L_1$.

Пусть векторы $e_{i,h}$, p_h такие же, как при доказательстве леммы 3. Пусть

$$g = (e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3), \quad g_1 = p_\varphi(e, \sigma^2, \sigma, \sigma^3)p_\varphi, \quad g_2 = p_\psi(e, \sigma, \sigma^3, \sigma^2)p_\psi.$$

Имеем

$$g = (e, a\rho, b, c\rho), \quad g_1 = (e, a, b\tau, c\tau), \quad g_2 = (e, a\pi, b\pi, c),$$

$$g_3 = gg_1 = (e, (13), \tau, \beta) \in L_1, \quad g_3^2 = (e, e, e, \beta^2), \quad \beta^2 \in D_4, \quad A_4 \leq D_4,$$

$$g_4 = gg_2 = (e, \beta^2, \pi, (13)), \quad g_4^2 = (e, \beta, e, e), \quad \beta \in D_2, \quad A_4 \leq D_2,$$

$$g_5 = g_2 g_1 = (e, (12), \alpha, \tau) \in L_1, \quad g_5^2 = (e, e, \alpha^2, e), \quad \alpha^2 \in D_3, \quad A_4 \leq D_3,$$

$$g\rho = (\rho, a, b\rho, c), \quad g_1\tau = (\tau, a\tau, b, c), \quad g_6 = g_1\tau \cdot g\rho = (\alpha, \tau, \rho, e) \in L_1,$$

$$g_6^2 = (\alpha^2, e, e, e), \quad \alpha^2 \in D_1, \quad A_4 \leq D_1.$$

Таким образом, $A_4 \leq D_i$ при любом $i \in \overline{1,4}$. Лемма 5 доказана. $\square$

Лемма 6. $K_4^{4^n} \leq L_n(T_1)$ *при всех* $n \geq 1$.

Доказательство. Утверждение леммы докажем индукцией по n.

При $n = 1$ утверждение следует из леммы 5.

Пусть утверждение верно для n, покажем, что оно верно для $n+1$. По предположению индукции

$$K_4^{4^n} \leq L_n. \tag{33}$$

Из равенств $G_F^{(\alpha)} = S_4$, $\alpha \in E_4$, и (13) получаем

$$L_{n+1,i} = S_4 \quad (i \in \overline{1, 4^{n+1}}).$$

Пусть $D_i = L_{n+1}^{(i)}\pi_i$, $i = 1, \ldots, 4^{n+1}$. Ввиду соотношений (14) и (15) имеем

$$D_i \trianglelefteq S_4 \quad (i = 1, 2, \ldots, 4^{n+1}), \tag{34}$$

$$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_{4^{n+1}} \leq L_{n+1}. \tag{35}$$

Пусть векторы $e_{i,h}$ $(i = 1, \ldots, 4^n, h \in S_4)$ и p_h $(h \in S_4)$ такие же, как при доказательстве леммы 2.

В силу (33) $e_{i,a} = (e, \ldots, e, \underset{i}{a}, e, \ldots, e) \in L_n$. Ввиду (16)

$$\bar{e}_{i,a} = (e_{i,a}, e_{i,a}, e_{i,a}, e_{i,a}) \in L_{n+1}.$$

По лемме 5 и (17) векторы

$$q_1 = (p_\alpha, p_e, p_e, p_e), \; q_2 = (p_e, p_\alpha, p_e, p_e), \; q_3 = (p_e, p_e, p_\alpha, p_e), \; q_4 = (p_e, p_e, p_e, p_\alpha)$$

принадлежат L_{n+1}. Имеем

$$\bar{e}_{i,a}^{q_1} = (e_{i,c}, e_{i,a}, e_{i,a}, e_{i,a}) \in L_{n+1}, \quad \bar{e}_{i,a} \cdot \bar{e}_{i,a}^{q_1} = (e_{i,b}, p_e, p_e, p_e) \in L_{n+1}.$$

Отсюда и из (34) следует, что $b \in D_i$, $K_4 \leq D_i$ при $i = 1, \ldots, 4^n$. Аналогично

$$\bar{e}_{i,a}^{q_2} = (e_{i,a}, e_{i,c}, e_{i,a}, e_{i,a}) \in L_{n+1},$$

$$\bar{e}_{i,a} \cdot \bar{e}_{i,a}^{q_2} = (p_e, e_{i,b}, p_e, p_e) \in L_{n+1}, \quad b \in D_j, \; K_4 \leq D_j$$

при $j = 4^n + i$ $(i = 1, \ldots, 4^n)$. Вычисляя элементы $\bar{e}_{i,a} \cdot \bar{e}_{i,a}^{q_3}$ и $\bar{e}_{i,a} \cdot \bar{e}_{i,a}^{q_4}$, получаем $b \in D_j$, $K_4 \leq D_j$ для всех остальных $j \leq 4^{n+1}$. Отсюда и из (35) имеем $K_4^{4^{n+1}} \leq L_{n+1}$. Лемма 6 доказана. $\square$

В силу леммы 6 группа $L_n(T_1)$ транзитивна на $E_4^{4^n}$ при любом $n \geq 1$. Поэтому верна

Теорема 3. *Система функций T_1 α-полна.*

Отсюда и из включения $T_1 \subseteq [T]_\alpha$ получаем $P_4 = [T_1]_\alpha \subseteq [[T]_\alpha]_\alpha$ и окончательно $[[T]_\alpha]_\alpha = P_4$. Таким образом, имеем строгие включения $T \subset [T]_\alpha \subset [[T]_\alpha]_\alpha$, и α-глубина множества T в P_4 равна двум.

§ 4. α-Базис для $k = 3$

Фиксируем обозначения подстановок из S_3, записывая их в виде произведения независимых циклов: e — тождественная подстановка, $a = (01)$, $b = (02)$, $c = (12)$, $\alpha = (012)$, $\alpha^2 = (021)$.

Пусть $F = \{f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\}$, где бинарные операции f_1 и f_2 заданы таблицами Кэли:

$$
\begin{array}{c|ccc}
f_1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline
0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 2 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 2
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|ccc}
f_2 & 0 & 1 & 2 \\ \hline
0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 0 & 0
\end{array}
\tag{36}
$$

Одноместные подфункции $f_i^{(0)}$, $f_i^{(1)}$, $f_i^{(2)}$ $(i = 1, 2)$ являются подстановками. Группа $L_1(F)$ порождается элементами $g_1 = \bigl(f_1^{(0)}, f_1^{(1)}, f_1^{(2)}\bigr) = (\alpha, \alpha, a)$, $g_2 = \bigl(f_2^{(0)}, f_2^{(1)}, f_2^{(2)}\bigr) = (a, \alpha, \alpha)$. Легко видеть, что

$$G_F^{(0)} = S_3, \quad G_F^{(1)} = A_3, \quad G_F^{(2)} = S_3, \quad L_1 = G_F = \langle g_1, g_2 \rangle \le_s S_3 \times A_3 \times S_3.$$

Лемма 7. $L_1(F) = S_3 \times A_3 \times S_3$.

Доказательство. Из равенств $G_F^{(0)} = G_F^{(2)} = S_3$, $G_F^{(1)} = A_3$ и (13) получаем $L_{1,1} = L_{1,3} = S_3$ и $L_{1,2} = A_3$. Пусть $D_i = L_1^{(i)}\pi_i$ $(i \in \overline{1,3})$. Ввиду соотношений (14) и (15) имеем

$$D_1 \trianglelefteq S_3, \quad D_2 \trianglelefteq A_3, \quad D_3 \trianglelefteq S_3, \tag{37}$$

$$D_1 \times D_2 \times D_3 \le L_1. \tag{38}$$

Так как $g_1^3 = (e, e, a) \in L_1$, $g_2^3 = (a, e, e) \in L_1$, то $a \in D_1$ и $a \in D_3$. Отсюда и из (37) следует, что

$$D_1 = S_3 \quad \text{и} \quad D_3 = S_3. \tag{39}$$

Из (39) получаем $u = (\alpha^2, e, e) \in L_1$, $v = (e, e, a) \in L_1$. Далее,

$$ug_1v = (\alpha^2, e, e)(\alpha, \alpha, a)(e, e, a) = (e, \alpha, e) \in L_1.$$

Отсюда $\alpha \in D_2$, $D_2 = A_3$. Поэтому

$$D_1 \times D_2 \times D_3 = S_3 \times A_3 \times S_3, \quad L_1 = S_3 \times A_3 \times S_3.$$

Лемма 7 доказана. $\square$

Утверждения (16) и (17) для $k = 3$ принимают вид

$$g \in L_n \implies (g, g, g) \in L_{n+1}, \tag{40}$$

$$(g_0, g_1, g_2) \in L_1 \implies (\underbrace{g_0, \dots, g_0}_{3^n}, \underbrace{g_1, \dots, g_1}_{3^n}, \underbrace{g_2, \dots, g_2}_{3^n}) \in L_{n+1}. \tag{41}$$

Лемма 8. *$A_3^{3^n} \leq L_n$ при всех $n \geq 1$.*

Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 1$ утверждение леммы следует из леммы 7.

Пусть утверждение верно для n, покажем, что оно верно для $n+1$. По предположению индукции

$$A_3^{3^n} \leq L_n. \tag{42}$$

Обозначим через $e_{i,h}$ $(i = 1, \dots, 3^n, h \in S_3)$ вектор из $S_3^{3^n}$, у которого i-я компонента равна h, а остальные компоненты равны e. Через p_h $(h \in S_3)$ обозначим вектор

$$p_h = (\underbrace{h, \dots, h}_{3^n}).$$

Пусть $D_i = L_{n+1}^{(i)}\pi_i$, $i = 1, \dots, 3^{n+1}$. Имеем $G_F^{(\alpha)} = A_3$ или $G_F^{(\alpha)} = S_3$ при любом $\alpha \in E_3$. Отсюда и из (13) получаем $L_{n+1,i} = A_3$ или $L_{n+1,i} = S_3$ при любом $i \in \overline{1, 3^{n+1}}$. Ввиду соотношений (14) и (15)

$$D_i \trianglelefteq S_3 \quad \text{или} \quad D_i \trianglelefteq A_3 \ (i = 1, 2, \dots, 3^{n+1}), \tag{43}$$

$$D_1 \times D_2 \times \dots \times D_{3^{n+1}} \leq L_{n+1}. \tag{44}$$

Из (42) следует, что $e_{i,\alpha} = (e, \dots, e, \underset{i}{\alpha}, e, \dots, e) \in L_n$ при любом $i \in \overline{1, 3^n}$. Ввиду (40) $u_{i,\alpha} = (e_{i,\alpha}, e_{i,\alpha}, e_{i,\alpha}) \in L_{n+1}$. Имеем

$$(a, e, a) \in L_1 \implies w_1 = (p_a, p_e, p_a) \in L_{n+1}, \quad u_{i,\alpha}^{w_1} = (e_{i,\alpha^2}, e_{i,\alpha}, e_{i,\alpha^2}),$$

$$u_{i,\alpha} \cdot u_{i,\alpha}^{w_1} = (p_e, e_{i,\alpha^2}, p_e) \in L_{n+1}, \quad \alpha^2 \in D_{3^n+i}, \quad A_3 \leq D_{3^n+i},$$

$$v_{i,\alpha} = u_{i,\alpha} \cdot (p_e, e_{i,\alpha^2}, p_e) = (e_{i,\alpha}, p_e, e_{i,\alpha}),$$

$$(a, e, e) \in L_1 \implies w_2 = (p_a, p_e, p_e) \in L_{n+1}, \quad v_{i,\alpha}^{w_2} = (e_{i,\alpha^2}, p_e, e_{i,\alpha}),$$

$$w_{i,\alpha} = v_{i,\alpha} \cdot v_{i,\alpha}^{w_2} = (p_e, p_e, e_{i,\alpha^2}), \quad \alpha^2 \in D_{2\cdot 3^n+i}, \quad A_3 \leq D_{2\cdot 3^n+i},$$

$$w_{i,\alpha} \cdot v_{i,\alpha} = (e_{i,\alpha}, p_e, p_e), \quad \alpha \in D_i, \quad A_3 \leq D_i.$$

Отсюда $A_3^{3^{n+1}} \leq D_1 \times D_2 \times \dots \times D_{3^{n+1}} \leq L_{n+1}$. Лемма 8 доказана. $\square$

Группа A_3 транзитивна на множестве E_3. Согласно лемме 8 группа L_n транзитивна на $E_3^{3^n}$ при любом $n \geq 1$. Поэтому верна

Теорема 4. *Система функций $F = \{f_1, f_2\}$, где f_1 и f_2 заданы таблицами (36), α-полна.*

Поскольку при любом k в P_k нет α-полных систем, состоящих из одной функции [2, теорема 3], то система $F = \{f_1, f_2\}$ является α-базисом.

Из теорем 1 и 4 и результатов работ [1, 2] следует, что при любом $k \geq 3$ существуют конечные α-полные системы. Если $F \subseteq P_k$ — произвольная полная система функций, а $F' \subseteq P_k$ — конечная α-полная система и $k \geq 3$, то ввиду (3) имеем $F' \subseteq [F]_\alpha^m$ при некотором $m \geq 0$. Далее, $P_k = [F']_\alpha \subseteq [F]_\alpha^{m+1}$, откуда $[F]_\alpha^{m+1} = P_k$. Поэтому верно

Предложение 3. *Если $k \geq 3$ и $F \subseteq P_k$ — полная система функций, то существует $n \geq 0$ такое, что $[F]_\alpha^n = P_k$.*

Следствие. *При $k \geq 3$ любая полная система функций $F \subseteq P_k$ имеет в P_k конечную α-глубину.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глухов М. М.* Об α-замкнутых классах и α-полных системах функций k-значной логики // Дискретная математика. 1989. Т. 1, № 1. С. 16–21.

2. *Чернышов А. Л.* Условия α-полноты систем функций многозначной логики // Дискретная математика. 1992. Т. 4, № 4. С. 117–130.

3. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.

4. *Смирнов Д. М.* Многообразия алгебр. Новосибирск: Наука, 1992.

5. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 2. С. 5–24.

6. *Шабунин А. Л., Шабунин Л. В.* Об α-полноте некоторых систем четырехзначной логики // Вестн. Чувашск. ун-та. Чебоксары. 2004. № 2. С. 3–8.

Статья поступила 30 сентября 2005 г.

Шабунин Алексей Леонидович
Чувашский гос. университет, математический факультет,
Московский пр., 15, Чебоксары 428015
`a_shabunin@rambler.ru`