Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 514.772.22

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ В ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА И СПЕКТРАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА УИЛЛМОРА

Д. А. Бердинский, И. А. Тайманов

Аннотация: Изучается обобщение функционала Уиллмора для поверхностей в трехмерной группе Гейзенберга. Конструкция этого функционала основана на спектральной теории оператора Дирака, возникающего из представления Вейерштрасса для поверхностей в этой группе. С помощью поверхностей вращения показано, что этот функционал соответствует функционалу Уиллмора для поверхностей в евклидовом пространстве во многих геометрических отношениях. Рассмотрена связь этих функционалов с изопериметрической задачей.

Ключевые слова: группа Гейзенберга, поверхность вращения, изопериметрическая задача, функционал Уиллмора.

§ 1. Введение

Мы изучаем спектральное обобщение функционала Уиллмора для поверхностей в трехмерной группе Гейзенберга Nil с левоинвариантной метрикой и четырехмерной группой изометрий, т. е. наделенной одной из геометрий Тёрстона.

Представление Вейерштрасса для поверхностей в Nil рассмотрено нами в [1], где, следуя спектральному подходу, принятому в [2, 3], мы предложили следующее обобщение функционала Уиллмора:

$$E(M) = \int\limits_M UV \frac{idz \wedge d\bar{z}}{2},$$

где U и V — потенциалы оператора Дирака, полученного из представления Вейерштрасса. В случае поверхностей в $\mathbb{R}^3$ такой подход дает четверть функционала Уиллмора $\mathscr{W} = \int H^2\, d\mu$. Тем не менее для поверхностей в Nil функционал E не пропорционален известному обобщению функционала Уиллмора вида $\int (H^2 + \widehat{K}) d\mu$, где $\widehat{K}$ — секционная кривизна объемлющего пространства вдоль касательной плоскости к поверхности.

Здесь мы покажем, что для поверхностей в пространстве Nil функционал $E(M)$ аналогичен функционалу Уиллмора для поверхностей в $\mathbb{R}^3$ во многих отношениях. В частности, будет доказано, что $E > 0$ для замкнутых поверхностей

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 06–01–00094a) и интеграционного проекта 1.1 Сибирского отделения Российской академии наук. Второй автор поддержан также программой фундаментальных базовых исследований Министерства образования и науки Казахстана (проект F03969–4).

вращения и для сфер вращения минимум достигается в точности на сферах постоянной средней кривизны (см. теорему 2 и ее следствия). Кроме того, эти сферы являются критическими точками функционала E (см. теорему 3).

Более того, мы указываем связь функционалов E и $\mathscr{W}$ с изопериметрической задачей: в частности, оба функционала E и $\frac{1}{4}\mathscr{W}$ принимают одно и то же значение, равное π, на сферах постоянной средней кривизны в Nil и $\mathbb{R}^3$ соответственно (см. теорему 1). В случае $\mathbb{R}^3$ такие сферы суть изопериметрические поверхности и имеет место гипотеза, что то же верно и для Nil. В § 3 мы также покажем, как получить некоторые результаты из [4, 5] с помощью представления Вейерштрасса. Связь между теорией функционала Уиллмора и изопериметрической задачей и некоторые открытые вопросы рассматриваются в § 5, а также в п. 6.2, где обсуждается случай поверхностей в пространстве $S^2 \times \mathbb{R}$. Уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала E выведено в п. 6.1.

§ 2. Представление Вейерштрасса для поверхностей в группе Гейзенберга

Группа Гейзенберга Nil состоит из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

и умножение в ней задается обычным умножением матриц. Группа Nil является нильпотентной группой Ли, и мы полагаем, что она наделена левоинвариантной метрикой вида

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - x dy)^2.$$

Алгебра Ли имеет три образующие $e_1 = e_x$, $e_2 = e_y$, $e_3 = e_z$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0.$$

Скалярное произведение в алгебре Ли, заданное левоинвариантной метрикой, будем обозначать через

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{3} u^i v^i, \quad u = \sum u^i e_i, \ v = \sum v^k e_k.$$

Как гладкое многообразие пространство Nil диффеоморфно $\mathbb{R}^3$, и на нем возможно ввести цилиндрические координаты следующим образом:

$$x = \rho \cos\phi, \quad y = \rho \sin\phi, \quad z = \frac{\rho^2}{2} \cos\phi \sin\phi + h.$$

Для этого $z = h$ на оси z проведем геодезическую длины ρ перпендикулярно оси z. Направление геодезической задается величиной ϕ, углом между геодезической и осью x. Конечная точка этой геодезической имеет координаты (ρ, ϕ, h).

В цилиндрических координатах метрика принимает следующий вид:

$$ds^2 = d\rho^2 - \rho^2 \, dh d\phi + \frac{1}{4}\rho^2 (4 + \rho^2) \, d\phi^2 + dh^2. \tag{1}$$

Заметим, что вращения вокруг оси z, заданные преобразованиями $\phi \to \phi + \theta$, являются изометриями.

Из формулы для метрики в цилиндрических координатах легко видеть, что Nil имеет четырехмерную группу изометрий, порожденную левыми сдвигами $g \to hg$, $h \in \mathrm{Nil}$, и поворотами вокруг оси z.

Приведем основные факты о представлении Вейерштрасса для поверхностей в трехмерных группах Ли из [1].

Представление Вейерштрасса для поверхности $f : M \to G$ определяет ее в терминах решения нелинейного уравнения

$$\mathscr{D}_{\mathrm{Nil}}\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar\partial & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\right]\psi = 0, \tag{2}$$

где z — конформный параметр на поверхности,

$$Z_1 = \frac{i}{2}\big(\bar\psi_2^2 + \psi_1^2\big), \quad Z_2 = \frac{1}{2}\big(\bar\psi_2^2 - \psi_1^2\big), \quad Z_3 = \psi_1\bar\psi_2$$

и

$$f^{-1}f_z = \sum_{k=1}^{3} Z_k e_k$$

— линейное разложение $f^{-1}f_z : M \to T_1\,\mathrm{Nil}$ по образующим e_1, e_2, e_3 алгебры Ли.

Нелинейность скрыта в потенциалах U и V. Для группы $G = \mathrm{Nil}$ имеем

$$U_{\mathrm{Nil}} = V_{\mathrm{nil}} = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2),$$

где H — средняя кривизна

Индуцированная метрика равна

$$ds^2 = \big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big)^2 dz d\bar z,$$

а дифференциал Хопфа $A = \langle \nabla_{f_z} f_z, n\rangle (dz)^2$ принимает вид

$$A = (\bar\psi_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar\psi_2) + i\psi_1^2\bar\psi_2^2.$$

Пусть n — вектор нормали к поверхности, перенесенный левым сдвигом в $T_1\,\mathrm{Nil}$. Он равен

$$n = e^{-\alpha}[i(\psi_1\psi_2 - \bar\psi_1\bar\psi_2)e_1 - (\psi_1\psi_2 + \bar\psi_1\bar\psi_2)e_2 + (|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)e_3)]. \tag{3}$$

Деривационные уравнения выражают производные ψ по z и $\bar z$ и состоят из системы (2) и уравнений

$$\partial\psi_1 = \alpha_z\psi_1 + Ae^{-\alpha}\psi_2 - \frac{i}{2}\psi_1^2\bar\psi_2, \quad \bar\partial\psi_2 = -\overline{A}e^{-\alpha}\psi_1 + \alpha_{\bar z}\psi_2 - \frac{i}{2}\bar\psi_1\psi_2^2.$$

Деривационные уравнения получаются прямыми вычислениями, и одно из первых следствий таково:

• *поверхность* (в Nil) *имеет постоянную среднюю кривизну тогда и только тогда, когда квадратичный дифференциал*

$$\widetilde{A}dz^2 = \left(A + \frac{{Z_3}^2}{2H + i}\right) dz^2 \tag{4}$$

голоморфен[1)].

Для поверхностей в $\mathbb{R}^3$ ясно, что дифференциал Хопфа голоморфен, если и только если поверхность имеет постоянную среднюю кривизну. Мы обобщили этот факт для поверхностей в группе Nil, но не смогли это сделать для поверхностей в $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$. Недавно Фернандес и Мира показали, что существуют примеры некомпактных поверхностей в $SL_2(\mathbb{R})$, не имеющих постоянной средней кривизны, для которых дифференциал $\widetilde{A}\,dz^2$ голоморфен. Тем не менее все компактные поверхности, для которых $\widetilde{A}\,dz^2$ голоморфен, имеют постоянную среднюю кривизну (этот результат и схожие с ним для поверхностей в других трехмерных геометриях с четырехмерной группой изометрий см. в [7]).

Для компактных поверхностей без края в группе Nil (и также в $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$) мы ввели функционал (спинорной) энергии (см. [1]) следующим образом:

$$E(M) = \int\limits_M UV \frac{idz \wedge d\bar{z}}{2}.$$

Для представления Вейерштрасса поверхностей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ потенциалы U и V вещественны и совпадают и, кроме того, функционал энергии равен $E(M) = \frac{1}{4}\mathscr{W}$, где $\mathscr{W}$ — функционал Уиллмора [2]. Точка зрения, основанная на спектральной теории оператора Дирака $\mathscr{D}$, возникающего из представления Вейерштрасса, и продемонстрированная в [2, 3], дает основания полагать, что спектральные свойства оператора $\mathscr{D}$ должны иметь существенный геометрический смысл. Поэтому мы рассматриваем функционал E как спектральное обобщение функционала Уиллмора. Хотя произведение UV и комплекснозначно, в [1] показано, что интеграл по компактной поверхности без края равен

$$E(M) = \frac{1}{4}\int\limits_M \left(H^2 + \frac{\widehat{K}}{4} - \frac{1}{16}\right) d\mu, \tag{5}$$

где $\widehat{K}$ — секционная кривизна касательной плоскости поверхности в Nil и $d\mu = e^{2\alpha}\,dx \wedge dy$ — индуцированная мера на M.

§ 3. Сферы постоянной средней кривизны в группе Гейзенберга

3.1. Основные тождества для поверхностей, на которых $\widetilde{A} = 0$. Сформулируем несколько простых тождеств, полученных из деривационных уравнений и проверяемых прямыми вычислениями:

$$\frac{\partial n_3}{\partial z} = \left(-H + \frac{i}{2}\right) Z_3 - 2e^{-2\alpha} A \overline{Z}_3, \tag{6}$$

[1)] В [6] показано, что для поверхностей постоянной средней кривизны в $S^2 \times \mathbb{R}$ и $H^2 \times \mathbb{R}$ некоторые обобщения дифференциала голоморфны. Это же утверждение анонсировано в [4] для поверхностей в Nil и других трехмерных геометриях с четырехмерной группой изометрий [4]. Результаты Абреша и Розенберга послужили для нас мотивом доказать это утверждение нашими методами, поэтому мы отнесли в [1] авторство результата о голоморфности этого дифференциала для поверхностей постоянной средней кривизны Абрешу. Тем не менее тщательный анализ формул из [4, 6] показывает, что дифференциал Абреша — Розенберга имеет вид

$$(H + i\tau)\widetilde{A}\,dz^2,$$

где пространство Nil локально рассматривается как двумерное расслоение над евклидовой плоскостью с кривизной расслоения, равной τ.

где $n_3 = \langle n, e_3 \rangle$,

$$e^{2\alpha} = \frac{4|Z_3|^2}{1-n_3^2} \tag{7}$$

и

$$\frac{\partial \overline{Z}_3}{\partial z} = (2H - i)|Z_3|^2 \frac{n_3}{1-n_3^2} \tag{8}$$

Формулу (6) легко получить из деривационных уравнений, записанных в терминах вложения f: $\nabla_{f_z} n = -H f_z - 2Ae^{-2\alpha} f_{\bar z}$.

Предположим что дифференциал $\widetilde{A} dz^2$ равен нулю. Это, в частности, означает, что поверхность имеет постоянную среднюю кривизну [1]:

$$A = -\frac{{Z_3}^2}{2H+i}, \quad H = \mathrm{const}\,. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6) и выражая $e^{2\alpha}$ через (7), получим

$$\frac{\partial n_3}{\partial z} = \left(-H + \frac{i}{2} + \frac{1-n_3^2}{4H+2i}\right) Z_3, \tag{10}$$

что вместе с (8) дает уравнение

$$\Delta n_3 + \frac{2n_3({n_{3x}}^2 + {n_{3y}}^2)}{1-n_3^2} = 0. \tag{11}$$

Таким образом, доказано

Предложение 1. *Для поверхностей в* Nil, *для которых* $\widetilde{A} dz^2 = 0$, *имеет место уравнение* (11).

Кроме того, метрика $e^{2\alpha}$ *однозначно выражается через* n_3 *и константу* H.

Первое утверждение уже доказано. Для того чтобы показать второе, достаточно выразить Z_3 из (10) и затем, используя (7), получить

$$e^{2\alpha} = \frac{4}{1-n_3^2} \frac{16H^2+4}{(4H^2+n_3^2)^2} \left|\frac{\partial n_3}{\partial z}\right|^2. \tag{12}$$

3.2. Сферы вращения постоянной средней кривизны. Сферы вращения постоянной средней кривизны, а также поверхности постоянной средней кривизны с винтовой симметрией описаны в работе [5]. Мы покажем, как описание сфер постоянной средней кривизны непосредственно выводится с помощью представления Вейерштрасса. Проводимые при таком выводе вычисления будут необходимы для нахождения значений различных функционалов (площади, объема ограничиваемой области и спинорной энергии) на этих сферах.

Рассмотрим следующее решение уравнения (11):

$$n_3 = \frac{r^2-1}{r^2+1}, \tag{13}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $z = x + iy$. Если такое решение соответствует поверхности, на которой $\widetilde{A} = 0$, то согласно (12) индуцированная метрика $e^{2\alpha}\, dz d\bar z$ принимает вид

$$e^{2\alpha} = \frac{16(1+4H^2)(1+r^2)^2}{((r^2-1)^2 + 4H^2(1+r^2)^2)^2}. \tag{14}$$

Найдем поверхности, которые получаются вращением кривой $\gamma(r) = (\rho(r), \psi(r), h(r))$ и для которых индуцированная метрика имеет вид (14), где $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ — конформные координаты на поверхности и θ — угол поворота. В терминах координат r и θ индуцированная метрика на поверхности вращения равна

$$\left(\rho^2 + \frac{\rho^4}{4}\right) d\theta^2 + \left(\left(2\rho^2 + \frac{\rho^4}{2}\right)\psi' - \rho^2 h'\right) dr d\theta \\ + \left(h'^2 + \rho^2\psi'^2 + \frac{1}{4}\rho^4\psi'^2 - \rho^2 h'\psi' + \rho'^2\right) dr^2.$$

Такая метрика имеет необходимый вид $e^{2\alpha}\, dz d\bar{z}$ тогда и только тогда, когда ρ, h и ψ удовлетворяют уравнениям

$$\rho^2 + \frac{\rho^4}{4} = r^2 e^{2\alpha},\ \left(2\rho^2 + \frac{\rho^4}{2}\right)\psi' - \rho^2 h' = 0,\ h'^2 + \rho'^2 + \rho^2\psi'^2 + \frac{1}{4}\rho^4\psi'^2 - \rho^2 h'\psi' = e^{2\alpha}.$$

Эту систему можно переписать следующим образом:

$$\rho = \sqrt{\sigma}, \quad h' = \sqrt{1 + \frac{\sigma}{4}}\sqrt{e^{2\alpha} - \frac{\sigma'^2}{4\sigma}}, \quad \psi' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e^{2\alpha} - \frac{\sigma'^2}{4\sigma}}{1 + \frac{\sigma}{4}}},$$

где $\sigma = 2\sqrt{1 + r^2 e^{2\alpha}} - 2$.

Если $e^{2\alpha}$ имеет вид (14), то

$$\sigma = \frac{16r^2}{(r^2-1)^2 + 4H^2(r^2+1)^2}$$

и, кроме того,

$$\rho = \sqrt{\frac{16r^2}{(r^2-1)^2 + 4H^2(r^2+1)^2}}, \quad h' = \frac{16H(1+4H^2)r(1+r^2)^2}{((r^2-1)^2 + 4H^2(1+r^2)^2)^2},$$

$$\psi' = 8\frac{Hr}{(r^2-1)^2 + 4H^2(1+r^2)^2}.$$

Окончательные формулы для образующей кривой $\gamma(r)$ принимают вид

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{4r}{\sqrt{(r^2-1)^2 + 4H^2(r^2+1)^2}}, \\ h &= \frac{1+4H^2}{4H^2}\left(-\frac{4H(1 - r^2 + 4H^2(1+r^2))}{(r^2-1)^2 + 16H^4(1+r^2)^2 + 8H^2(1+r^4)}\right. \\ &\qquad \left. + \arctan\left[\frac{1}{4H}(r^2 - 1 + 4H^2(r^2+1))\right]\right), \\ \psi &= \arctan\left[\frac{1}{4H}(4H^2 - 1 + (1+4H^2)r^2)\right], \end{aligned} \tag{15}$$

где $r \in [0, \infty]$.

Следующее утверждение получается прямыми вычислениями.

Предложение 2. *Для любого H, $0 < H < \infty$, кривая* (15) *порождает посредством вращения сферу постоянной средней кривизны H.*

Пусть $T_1\,\mathrm{Nil}$ — S^1-расслоение над Nil, образованное касательными векторами единичной длины. Обозначим через $\hat{f} : M \to T_1\,\mathrm{Nil}$ гауссово отображение, которое сопоставляет точке $p \in M$ нормаль к поверхности в точке p.

Предложение 3. *Для любого значения H, $0 < H < \infty$, и любой точки $q \in T_1\,\mathrm{Nil}$ существует сфера вращения M постоянной средней кривизны H такая, что $q \in \hat{f}(M)$.*

Под сферами вращения постоянной средней кривизны мы подразумеваем не только сферы, заданные формулами (15), но также их образы при левых сдвигах в группе Nil.

Доказательство предложения 3. Пусть $q = (p, \xi)$ с $p \in \mathrm{Nil}$ и $\xi \in T_p\,\mathrm{Nil}$. Рассмотрим сферу S_H. Из (15) вытекает, что n_3 принимает все возможные значения, лежащие между -1 и 1. Рассмотрим точку $p_1 \in S_H$ такую, что $\xi_3 = n_3(p_1)$. Действуя на S_H таким левым сдвигом $g \to hg$, что $hp_1 = p$, получим сферу S_1. Пусть нормаль к S_1 в точке p_1 равна (ξ_1', ξ_2', ξ_3). Поворачивая сферу S_1 вокруг оси z, проходящей через точку p, получим сферу S_2, для которой нормаль в точке p равна ξ, что доказывает предложение.

3.3. Сферы постоянной средней кривизны. Чтобы завершить описание сфер постоянной средней кривизны в Nil, нам осталось показать, что все такие сферы являются сферами вращения. Это утверждение доказано в [6] для поверхностей в $S^2 \times \mathbb{R}$ и $H^2 \times \mathbb{R}$ и сформулировано в [4] для других трехмерных геометрий с четырехмерной группой изометрий. Более того, в [4] объяснено, что доказательство в последнем случае почти то же самое, что и для случая произведений [5]. Здесь мы излагаем такое доказательство для случая поверхностей в Nil.

Предложение 4 [4]. *Для любого H такого, что $0 < H < \infty$, любая замкнутая поверхность постоянной средней кривизны H такая, что $\widetilde{A} = 0$, есть сфера вращения.*

Доказательство. Одно из уравнений Гаусса — Вейнгартена записывается в виде

$$\nabla_{f_z} n = -Hf_z - 2Ae^{-2\alpha} f_{\bar{z}}. \tag{16}$$

Так как $\widetilde{A} = 0$, имеем $A = -\frac{Z_3^2}{2H+i}$ и потому для произвольной точки p векторы $\nabla_{f_x} n$ и $\nabla_{f_y} n$ однозначно определяются векторами f_z, $f_{\bar{z}}$ в точке p. Более того,

$$(\nabla_{f_x} n)^i = \frac{\partial n^i}{\partial x} + \Gamma^i_{jk}(p) f_x^j n^k.$$

Вид уравнения (16) не зависит от выбора на поверхности конформных координат $w = w(z)$. На самом деле уравнение (16) определяет в $T_q\,(T_1\,\mathrm{Nil})$ двумерную плоскость Π_q, где $q = (p, n)$, которая является касательной к образу гауссова отображения любой поверхности с $\widetilde{A} = 0$. Таким образом, в $T_1\,\mathrm{Nil}$ задано двумерное распределение Π, и любая интегральная поверхность этого распределения однозначно восстанавливается по любой своей точке. Поскольку через любую точку $T_1\,\mathrm{Nil}$ проходит образ гауссова отображения сферы постоянной средней кривизны H, все замкнутые поверхности, для которых $\widetilde{A} = 0$, суть сферы вращения. Предложение доказано.

3.4. Замечание о изопериметрической задаче в группе Nil. Поскольку метрика на сфере имеет вид $e^{2\alpha}(dr^2 + r^2 d\theta^2)$, элемент площади равен $d\mu = re^{2\alpha}\, drd\theta$.

Подставляя (14) в эту формулу, вычислим площадь $A(H)$ сферы S_H средней кривизны H:

$$A(H) = \int\limits_{S_H} d\mu = 2\pi \int\limits_0^\infty re^{2\alpha}\,dr = 2\pi \int\limits_0^\infty \frac{16(1+4H^2)r(1+r^2)^2}{((r^2-1)^2+4H^2(r^2+1)^2)^2}\,dr$$
$$= 2\pi\left(\frac{1}{H^2} + \frac{1+4H^2}{4H^3}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left[\frac{4H^2-1}{4H}\right]\right)\right).$$

В области D_H, ограниченной сферой S_H, выберем координаты $\delta \in [0,1]$, $r \in (0,\infty)$ и $\theta \in [0,2\pi]$ так, что цилиндрические координаты точки (δ, r, θ) равны $\rho = \delta\rho(r)$, $\phi = \psi(r) + \theta$ и $h = h(r)$, где $\rho(r)$, $h(r)$ и $\psi(r)$ — функции из (15), определяющие сферу вращения. Имеем

$$d\rho = \delta\rho'(r)\,dr + \rho(r)\,d\delta, \quad d\phi = \psi'(r)\,dr + d\theta, \quad dh = h'(r)\,dr.$$

Подставляя эти формулы в (1), получим выражение для индуцированной метрики:

$$ds^2 = \rho^2\,d\delta^2 + 2\delta\rho\rho'\,drd\delta + \left(\delta^2\rho'^2 - \delta^2\rho^2h'\psi' + \delta^2\rho^2\psi'^2 + \frac{1}{4}\delta^4\rho^4\psi'^2 + h'^2\right)dr^2$$
$$+ \frac{1}{4}\delta^2\rho^2(4+\delta^2\rho^2)\,d\theta^2 + \left(-\delta^2\rho^2h' + 2\delta^2\rho^2\psi' + \frac{1}{2}\delta^4\rho^4\psi'\right)drd\theta,$$

и выражение для формы объема:

$$d\nu = (\rho^2h'\delta)\,d\delta drd\theta = \frac{256H(1+4H^2)r^3(1+r^2)^2\delta}{((r^2-1)^2+4H^2(1+r^2)^2)^3}\,d\delta drd\theta.$$

Следовательно, объем $V(H)$ области D_H равен

$$V(H) = \int\limits_{D_H} d\nu = \pi\int\limits_0^\infty \frac{256H(1+4H^2)r^3(1+r^2)^2}{((r^2-1)^2+4H^2(1+r^2)^2)^3}\,dr$$
$$= \frac{\pi}{16H^4}\left(4H(4H^2+3) - (4H^2+1)(4H^2-3)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left[\frac{4H^2-1}{4H}\right]\right)\right).$$

Окончательно получаем соотношение между площадью сферы постоянной средней кривизны $S(H)$ и объемом $V(H)$ области, ограниченной этой сферой:

$$V(H) = \frac{2\pi}{H} - \frac{4H^2-3}{8H}A(H). \tag{17}$$

Имеет место гипотеза, что это соотношение между $A(H)$ и $V(H)$ дает решение изопериметрической задачи в Nil.

Для произвольного n-мерного риманова многообразия изопериметрическая задача заключается в нахождении гиперповерхности S, минимизирующей $(n-1)$-мерный объем V_{n-1} среди всех поверхностей, ограничивающих область n-мерного объема d. Такая поверхность имеет постоянную среднюю кривизну и называется *изопериметрической поверхностью*, и через $V_{n-1}(d)$ будем обозначать минимальный $(n-1)$-мерный объем, соответствующий значению d. Из геометрической теории меры известно, что для $n \leq 7$ изопериметрическая поверхность гладкая [8].

В случае $\mathbb{R}^3$ изопериметрические поверхности суть круглые сферы и тогда имеет место тождество $V_2(d) = (24\pi d^2)^{1/3}$. Впервые этот факт был доказан в 30-е Шмидтом метод симметризации [9]. Сейчас этот результат может быть получен из теоремы Александрова о том, что все замкнутые поверхности постоянной средней кривизны в $\mathbb{R}^3$ гомеоморфны сфере, и из теоремы Хопфа о том, что все сферы постоянной средней кривизны в $\mathbb{R}^3$ — это в точности круглые сферы.

Хотя аналог теоремы Александрова неизвестен для группы Nil, предположение, что некоторые изопериметрические поверхности не гомеоморфны сфере, выглядит очень неправдоподобно. Тем самым возникает вполне естественная гипотеза, что изопериметрические поверхности в Nil гомеоморфны сфере. Если она верна, то сферы постоянной кривизны S_H, $0 < H < \infty$, дают решение изопериметрической задачи[2)] для всех d, $0 < d < \infty$. Отметим, что для компактного риманова многообразия гиперповерхности, дающие решение изопериметрической задачи для малых объемов, гомеоморфны сфере [11].

§ 4. Спектральное обобщение функционала Уиллмора

Для замкнутых ориентированных поверхностей в Nil функционал спинорной энергии, введенный в [1], имеет вид

$$E(M) = \int\limits_M UV \frac{idz \wedge d\bar{z}}{2} == \frac{1}{4}\int\limits_M \left(H^2 - \frac{n_3^2}{4}\right) d\mu = \frac{1}{4}\int\limits_M \left(H^2 + \frac{\widehat{K}}{4} - \frac{1}{16}\right) d\mu. \tag{18}$$

Для сфер постоянной средней кривизны S_H функционал спинорной энергии равен

$$E(S_H) = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\infty \left(H^2 - \frac{1}{4}n_3^2\right) e^{2\alpha} r\, dr, \tag{19}$$

где n_3 и $e^{2\alpha}$ определяются из (13) и (14). Подставляя эти формулы в (19), получим следующий результат.

Теорема 1. *На каждой сфере постоянной средней кривизны в* Nil *функционал спинорной энергии равен* π*:*

$$E(S_H) = \pi. \tag{20}$$

Вычислим классический функционал Уиллмора

$$\mathscr{W}(M) = \int\limits_M (H^2 + \widehat{K})\, d\mu \tag{21}$$

для этих сфер. Поскольку для поверхностей в Nil выполнено тождество

$$\widehat{K} = \frac{1}{4} - e^{-2\alpha}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2) = \frac{1}{4} - n_3^2,$$

2) После появления первого варианта этой статьи в интернете Морган обратил наше внимание на работу [10], где описаны сферы вращения с постоянной средней кривизной в Nil и показано, что для малых объемов, т. е. при $H \gg 0$, они дают решение изопериметрической задачи.

из формул (18) и (21) вытекает, что

$$\int\limits_{S_H} \widehat{K}\, d\mu = 16\pi - \left(4H^2 - \frac{1}{4}\right) A(H),$$

и окончательно получим

$$\mathscr{W}(S_H) = 10\pi + \frac{\pi}{2H^2} - \pi\frac{(1+4H^2)\big(3H^2-\frac{1}{4}\big)}{2}H^3\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left[\frac{4H^2-1}{4H}\right]\right).$$

Поэтому функционал Уиллмора не равен какой-либо постоянной на сферах постоянной средней кривизны.

Вычислим спинорную энергию для замкнутых поверхностей вращения.

На пространстве Nil группа $SO(2)$ действует вращениями вокруг оси z и фактор-пространство $\mathrm{Nil}/SO(2)$ есть полуплоскость $u \geq 0$ с локальными координатами $u = \rho$ и $v = z$, где ρ, ϕ, z — цилиндрические координаты. В силу (1) имеет место субмерсия

$$\mathrm{Nil} \to B = \mathrm{Nil}/SO(2),$$

где $\mathrm{Nil}/SO(2)$ наделена метрикой

$$du^2 + \frac{4u^2}{4u^2+u^4}\, dv^2.$$

Пусть $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ — кривая в B, порождающая при вращении гладкую поверхность в Nil. Здесь s — натуральный параметр на γ. Пусть σ — угол между γ и направлением $\frac{\partial}{\partial u}$. Тогда верны следующие формулы для касательного и нормального векторов t и n:

$$t = (\cos\sigma, (2u)^{-1}\sqrt{4u^2+u^4}\sin\sigma), \quad n = (-\sin\sigma, (2u)^{-1}\sqrt{4u^2+u^4}\cos\sigma).$$

Кроме того, u, v, σ удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{u} = \cos\sigma, \\ \dot{v} = (2u)^{-1}\sqrt{4u^2+u^4}\sin\sigma, \\ \dot{\sigma} = 2H - u^{-1}\sin\sigma, \end{cases} \tag{22}$$

где точка обозначает производную по s. Из (22) вытекает, что

$$H = \frac{1}{2}(\dot{\sigma} + u^{-1}\sin\sigma).$$

Отметим, что формулы для t, n, H получены в [5].

Нетрудно вычислить, что

$$n_3 = \left\langle n, \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle = \frac{2u}{\sqrt{4u^2+u^4}}\cos\sigma, \quad d\mu = \frac{1}{2}\sqrt{4u^2+u^4}\, d\theta ds.$$

Переписывая функционал E в терминах u и σ, получаем, что

$$E(M) = \frac{\pi}{4}\int\limits_{\gamma}\left[\frac{\left(\dot{\sigma} + \frac{sin\sigma}{u}\right)^2}{4} - \frac{u^2}{4u^2+u^4}cos^2\sigma\right]\sqrt{4u^2+u^4}\, ds$$

$$= \frac{\pi}{4}\int\limits_{\gamma}\left[\frac{\left(\dot{\sigma} - \frac{\sin\sigma}{u}\right)^2}{4}\sqrt{4u^2+u^4} + \frac{\dot{\sigma}\sin\sigma}{u}\sqrt{4u^2+u^4} - \frac{u^2\cos^2\sigma}{\sqrt{4u^2+u^4}}\right] ds.$$

Заметим, что

$$\frac{\pi}{4}\int\limits_{\gamma}\left(\frac{\dot\sigma\sin\sigma}{u}\sqrt{4u^2+u^4}-\frac{u^2}{\sqrt{4u^2+u^4}}\cos^2\sigma\right)ds$$
$$=-\frac{\pi}{4}\int\limits_{\gamma}\left(\ddot u\sqrt{4+u^2}+\frac{u}{\sqrt{4+u^2}}\dot u^2\right)ds=-\frac{\pi}{4}\int\limits_{\gamma}\frac{\partial}{\partial s}(\dot u\sqrt{4+u^2})\,ds.$$

Тем самым доказана

Теорема 2. *Пусть замкнутая поверхность M в* Nil *получена в результате вращения кривой $\gamma\subset B$ вокруг оси z, тогда функционал спинорной энергии на M равен*

$$E(M)=\frac14\int\limits_{\gamma}\left(H^2-\frac14 n_3^2\right)d\mu$$
$$=\frac{\pi}{8}\int\limits_{\gamma}\left(\dot\sigma-\frac{\sin\sigma}{u}\right)^2\sqrt{4u^2+u^4}ds-\frac{\pi}{4}\int\limits_{\gamma}\frac{\partial[\dot u\sqrt{4+u^2}]}{\partial s}\,ds$$
$$=\frac{\pi}{8}\int\limits_{\gamma}\left(\dot\sigma-\frac{\sin\sigma}{u}\right)^2\sqrt{4u^2+u^4}\,ds+\frac{\pi\chi(M)}{2},\qquad(23)$$

где $\chi(M)$ — эйлерова характеристика M.

Кроме того, если $\dot\sigma=\frac{\sin\sigma}{u}$ всюду на поверхности, то эта поверхность есть сфера постоянной средней кривизны.

Следствие 1. *Для сфер вращения имеет место оценка $E(M)\ge\pi$ и равенство достигается в точности на сферах постоянной средней кривизны.*

Следствие 2. *Для торов вращения $E(M)>0$.*

Теорема 3. *Сферы постоянной средней кривизны в* Nil *являются критическими точками функционала спинорной энергии E.*

Доказательство. Уравнение Эйлера — Лагранжа для функционала E имеет вид

$$\Delta H+2H(H^2-K)+2e^{-4\alpha}\big(A\overline{Z}_3^2+\overline{A}Z_3^2\big)=0$$

(теорема 4, п. 6.1). На сфере постоянной средней кривизны H выполнено тождество $A=-\frac{Z_3^2}{2H+i}$, которое влечет, что

$$\Delta H=0,\quad 2H(H^2-K)=8e^{-4\alpha}H|A|^2=8e^{-4\alpha}H\frac{|Z_3|^4}{4H^2+1},$$

$$2e^{-4\alpha}\big(A\overline{Z}_3^2+\overline{A}Z_3^2\big)=-8e^{-4\alpha}H\frac{|Z_3|^4}{4H^2+1}.$$

Из этих формул следует, что сферы постоянной средней кривизны в Nil удовлетворяют уравнению Эйлера — Лагранжа. Теорема доказана.

§ 5. Окончательные замечания и открытые вопросы

Мы видим, что во многих геометрических аспектах функционал спинорной энергии ведет себя подобно функционалу

$$\frac{\mathscr{W}(M)}{4} = \frac{1}{4}\int\limits_M H^2\,d\mu$$

для замкнутых ориентированных поверхностей в $\mathbb{R}^3$. В самом деле, как и в случае (20), верно, что

$$\mathscr{W}/4 = \pi$$

на всех изопериметрических поверхностях, т. е. круглых сферах в $\mathbb{R}^3$. Далее,

$$\frac{\mathscr{W}(M)}{4} = \frac{1}{4}\int\limits_M \left(\left(\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{2}\right)^2 + \varkappa_1\varkappa_2\right)d\mu = \frac{1}{4}\int\limits_M \left(\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{2}\right)^2 d\mu + \frac{\pi}{2}\chi(M),$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — главные кривизны. Последняя формула похожа на формулу (23), но величины $\dot\sigma$ и $\frac{\sin\sigma}{u}$ не являются главными кривизнами поверхности вращения.

Среди полных компактных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ уравнение $A = 0$ выделяет в точности сферы постоянной средней кривизны, минимизирующие функционал Уиллмора $\mathscr{W}$ среди всех сфер. Для замкнутых поверхностей вращения в Nil уравнение $\widetilde{A} = 0$ выделяет в точности сферы постоянной средней кривизны, минимизирующие среди всех сфер вращения значение функционала E.

Эти геометрические наблюдения подтверждают, что функционал E, полученный из спектральной теории представления Вейерштрасса, является правильным обобщением функционала Уиллмора для случая поверхностей в Nil.

Мы также должны рассматривать поверхности, на которых справедливо тождество $\widetilde{A} = 0$, как обобщенные омбилические поверхности: в $\mathbb{R}^3$ и в Nil замкнутые «омбилические» поверхности — это сферы постоянной средней кривизны. Отметим что для сфер постоянной средней кривизны в Nil лишь полюсы, т. е. точки, инвариантные относительно вращений, являются омбилическими точками в обычном смысле.

С точки зрения указанного обобщения представляет интерес исследование следующих проблем.

1. Показать, что E ограничен снизу на замкнутых ориентированных поверхностях любого топологического рода, или даже доказать что $E > 0$.

2. Доказать, что среди всех сфер функционал E достигает глобального минимума в точности на сферах постоянной средней кривизны.

3. Обобщить формулу (23) на случай произвольных поверхностей.

4. Найти минимумы функционала E среди поверхностей заданного топологического рода и, в частности, найти аналог гипотезы Уиллмора, сформулированной для $\mathbb{R}^3$.

Представляется интересным изучить аналогичные вопросы для поверхностей в $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, для которых представление Вейерштрасса также было выведено в [1].

§ 6. Дополнения

6.1. Уравнение Эйлера — Лагранжа для функционала E.

Теорема 4. *Пусть $f : M \to \mathrm{Nil}$ — регулярная поверхность и $r : M \times [0,1] \to \mathrm{Nil}$ — ее гладкая вариация: $r_0 = f$. Предположим, что r постоянно на границе M, если такая существует, т. е. $r(p,t) = f(p)$ для $p \in \partial M$. Пусть $\frac{\partial r(p,t)}{\partial t}|_{t=0} = \varphi n$, где n — единичное нормальное векторное поле к M. Тогда вариация функционала E при $t = 0$ равна*

$$\delta E(M) = \frac{1}{4}\int\limits_M \bigl(\Delta H + 2H(H^2 - K) + 2e^{-4\alpha}\bigl(A\overline{Z}_3^2 + \overline{A}Z_3^2\bigr)\bigr)\varphi\, d\mu. \tag{24}$$

Доказательство. Согласно [1] мы должны вычислить

$$\delta E = \frac{1}{4}\biggl(\delta\int\limits_M H^2\, d\mu - \delta\int\limits_M \frac{1}{4}n_3^2\biggr)\, d\mu. \tag{25}$$

Для локальных координат x и y на M обозначим через r_1 и r_2 производные $\frac{\partial r}{\partial x}$ и $\frac{\partial r}{\partial y}$ соответственно.

Уравнения Гаусса — Вейнгартена имеют вид

$$\nabla_j r_i = \Gamma_{ij}^k r_k + h_{ij}n, \quad \nabla_i n = -h_i^j r_j = -g^{kj}h_{ki}r_j,$$

где g_{ij} и h_{ij} — первая и вторая фундаментальные формы на M. Из определения средней кривизны вытекает, что $\delta\, d\mu = -2H\varphi\, d\mu$.

Вычислим

$$\delta\int H^2\, d\mu = 2\int H\delta H\, d\mu + \int H^2\delta\, d\mu = 2\int H(\delta H)\, d\mu - 2\int H^3\varphi\, d\mu.$$

Справедливо тождество

$$2\delta H = \delta 2H = \delta(g^{ij}h_{ij}) = (\delta g^{ij})h_{ij} + g^{ij}\delta h_{ij}, \tag{26}$$

и из уравнений Гаусса — Вейнгартена следует, что $\delta g_{ij} = \delta\langle r_i, r_j\rangle = -2\varphi h_{ij}$. Так как $0 = \delta(g_{ij}g^{jk}) = g_{ij}\delta g^{jk} + g^{jk}\delta g_{ij} = g_{ij}\delta g^{jk} - 2\varphi h_{ij}g^{jk}$, то

$$\delta g^{ij} = 2\varphi g^{jk}h_k^i.$$

Вычислим δh_{ij}. Имеем $\delta h_{ij} = \delta\langle\nabla_j r_i, n\rangle = \langle\nabla_j r_i,\ \delta n\rangle + \langle\delta\nabla_j r_i, n\rangle$. Согласно уравнениям Гаусса — Вейнгартена $\delta n = -g^{ij}\varphi_j r_i$, откуда следует, что $\langle\nabla_j r_i, \delta n\rangle = -\Gamma_{ij}^k\varphi_k$. Кроме того, $\delta\nabla_j r_i = \nabla_{\partial t}\nabla_j r_i = \nabla_j\nabla_{\partial t}r_i + (\nabla_{\partial t}\nabla_j r_i - \nabla_j\nabla_{\partial t}r_i) = \nabla_j\nabla_i(\varphi)n + \varphi R(r_j, n)r_i$, и прямыми вычислениями убеждаемся, что $\langle\nabla_j\nabla_i\varphi n, n\rangle = \varphi_{ij} - \varphi h_i^k h_{kj}$. Объединяя предыдущие вычисления, получим

$$\delta h_{ij} = -\Gamma_{ij}^k\varphi_k + \varphi_{ij} - \varphi h_i^k h_{kj} + \varphi\langle R(r_j, n)r_i, n\rangle.$$

Подставляя полученные выражения для δg^{ij} и δh_{ij} в (26), придем к выводу что

$$\begin{aligned}2\delta H = g^{ij}(\varphi_{ij} - \Gamma_{ij}^k\varphi_k) + \varphi g^{jk}h_k^i h_{ij} + \varphi g^{ij}\langle R(r_j, n)r_i, n\rangle&\\ = \Delta\varphi + \varphi h_k^i h_i^k + \varphi g^{ij}\langle R(r_j, n)r_i, n\rangle&,\end{aligned}$$

где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами, заданный на поверхности. Так как $h_k^i h_i^k = \mathrm{Tr}\, h^2 = k_1^2 + k_2^2 = (k_1 + k_2)^2 - 2k_1k_2 = 4H^2 - 2K$, предыдущую формулу можно переписать следующим образом:

$$2\delta H = \Delta\varphi + (4H^2 - 2K)\varphi + g^{ij}\langle R(r_j, n)r_i, n\rangle\varphi.$$

Воспользовавшись равенством $\int\limits_M (\Delta\varphi)H\,d\mu = \int\limits_M (\Delta H)\varphi\,d\mu$, получим

$$\delta \int\limits_M H^2 d\mu = \int\limits_M (\Delta H + 2H(H^2 - K)\varphi + Hg^{ij}\langle R(r_j,n)r_i,n\rangle)\varphi\,d\mu.$$

Полагая координаты x, y ортогональными: $g_{12} = 0$, имеем

$$g^{ij}\langle R(r_j,n)r_i,n\rangle = g^{11}\langle R(r_1,n)r_1,n\rangle + g^{22}\langle R(r_2,n)r_2,n\rangle = \\ = \widehat{K}(r_1,n) + \widehat{K}(r_2,n),$$

где $\widehat{K}(u,v)$ — секционная кривизна объемлющего пространства вдоль плоскости, натянутой на векторы u и v.

Выпишем теперь окончательную формулу для $\delta\int H^2\,d\mu$ для поверхностей в Nil. В этом случае секционная кривизна зависит лишь от n_3 и равна $\frac{1}{4} - n_3^2$ (см., например, [1]), поэтому $\widehat{K}(r_1,n) + \widehat{K}(r_2,n) = n_3^2 - \frac{1}{2}$, что влечет

$$\delta \int\limits_M H^2\,d\mu = \int\limits_M \bigl(\Delta H + 2H(H^2 - K) + H\bigl(n_3^2 - 1/2\bigr)\bigr)\varphi\,d\mu. \tag{27}$$

Вычислим

$$\delta \int\limits_M n_3^2\,d\mu = \int 2n_3\delta n_3\,d\mu + \int\limits_M n_3^2\delta\,d\mu.$$

Предположим, что $z = x+iy$ — конформный параметр на поверхности и метрика имеет вид $e^{2\alpha}dzd\bar{z}$.

Поскольку[3)]

$$\langle n,\delta e_3\rangle = \langle n,\nabla_{\varphi n}e_3\rangle = \left\langle n,\varphi\left(\frac{1}{2}n_2e_1 - \frac{1}{2}n_1e_2\right)\right\rangle = \frac{1}{2}\varphi(n_2n_1 - n_1n_2) = 0,$$

то $\delta n_3 = \delta\langle n,e_3\rangle = \langle\delta n,e_3\rangle$ и получаем, что

$$\langle\delta n,e_3\rangle = \langle -g^{ij}\varphi_j r_i,e_3\rangle = -2e^{-2\alpha}\langle\varphi_z r_{\bar{z}} + \varphi_{\bar{z}}r_z,e_3\rangle.$$

Таким образом,

$$2\int\limits_M n_3\delta n_3\,d\mu = -4\int\limits_M n_3\langle\varphi_z r_{\bar{z}} + \varphi_{\bar{z}}r_z,e_3\rangle\,dx\wedge dy \\ = 4\int\limits_M ((n_3\langle r_{\bar{z}},e_3\rangle)_z + (n_3\langle r_z,e_3\rangle)_{\bar{z}})\varphi\,dx\wedge dy.$$

Согласно формулам представления Вейерштрасса (см. § 2) $\langle r^{-1}r_z,e_3\rangle = Z_3$, и поскольку метрика метрика левоинвариантна, заключаем, что

$$\int\limits_M n_3\delta n_3\,d\mu = 2\int\limits_M (n_3(\partial\overline{Z}_3 + \overline{\partial}Z_3) + (\langle\nabla_{\partial z}n,e_3\rangle + \langle n,\nabla_{\partial z}e_3\rangle)\overline{Z}_3 \\ + (\langle\nabla_{\partial\bar{z}}n,e_3\rangle + \langle n,\nabla_{\partial\bar{z}}e_3\rangle)Z_3)\varphi\,dx\wedge dy.$$

[3)]Здесь мы воспользуемся формулами для связности Леви-Чевиты в Nil, изложенными, например, в [1].

Так как $\partial\overline{Z}_3+\overline{\partial}Z_3 = Hn_3e^{2\alpha}$ (см. [1]), из формулы (16) следует, что $\langle\nabla_{\partial z}n, e_3\rangle = -HZ_3 - 2Ae^{-2\alpha}\overline{Z}_3$. Из формул для связности Леви-Чевиты в Nil также вытекает, что

$$\langle n, \nabla_{\partial z}e_3\rangle = \langle n, \nabla_{Z_1e_1+Z_2e_2+Z_3e_3}e_3\rangle$$
$$= \left\langle n_1e_1+n_2e_2+n_3e_3, \frac{1}{2}Z_2e_1 - \frac{1}{2}Z_1e_2\right\rangle = \frac{1}{2}(n_1Z_2 - n_2Z_1) = \frac{i}{2}Z_3.$$

Подставляя эти формулы в $\int\limits_M n_3\delta n_3\,d\mu$, получим

$$\int\limits_M n_3\langle\delta n, e_3\rangle\,d\mu = 2\int\limits_M Hn_3^2\varphi\,d\mu + 2\int\limits_M \bigl(-2H|Z_3|^2 - 2A\overline{Z}_3^2e^{-2\alpha} - 2\overline{A}Z_3^2e^{-2\alpha}\bigr)\varphi\,dx\wedge dy.$$

Поскольку $4|Z_3|^2 = e^{2\alpha}\bigl(1-n_3^2\bigr)$ (см. (7)), имеем

$$\int\limits_M n_3\langle\delta n, e_3\rangle\,d\mu = \frac{1}{2}\int\limits_M \bigl(6Hn_3^2 - 2H - 8e^{-4\alpha}\bigl(A\overline{Z}_3^2 + \overline{A}Z_3^2\bigr)\bigr)\varphi\,d\mu,$$

и окончательно

$$\delta\int\limits_M n_3^2\,d\mu = \int\limits_M \bigl(4Hn_3^2 - 2H - 8e^{-4\alpha}\bigl(A\overline{Z}_3^2 + \overline{A}Z_3^2\bigr)\bigr)\varphi\,d\mu. \tag{28}$$

Подставляя (27) и (28) в (25), получаем утверждение теоремы.

6.2. Изопериметрическая задача и функционал уиллморовского типа в пространстве $S^2\times\mathbb{R}$.

Предложение 5. *Для неминимальной сферы постоянной средней кривизны M в $S^2\times\mathbb{R}$ справедливо*

$$\int\limits_M (H^2 + \widehat{K} + 1)\,d\mu = 16\pi.$$

Доказательство. Согласно [6] сферы постоянной средней кривизны суть сферы вращения при $H\neq 0$ и сферические сечения при $H=0$. Ввиду [12] сфера вращения S_H постоянной средней кривизны $H\neq 0$ порождается кривой $\gamma_H = S_H/O(2)$, удовлетворяющей уравнениям $B = S^2\times\mathbb{R}/O(2) = \{(x,y) : x\in\mathbb{R}, y\in[0,\pi]\}$:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\sigma, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\sigma, \quad \frac{d\sigma}{ds} = h + \cot y\cos\sigma,$$

где σ — угол между γ и осью x. В этих терминах секционная кривизна равна $\widehat{K} = \sin^2\sigma$ и ее интеграл по сфере равен

$$\int\limits_{S_H}\widehat{K}\,d\mu = 4\pi\left(2 - \frac{h^2}{\sqrt{1+h^2}}\ln\frac{\sqrt{1+h^2}+1}{\sqrt{1+h^2}-1}\right). \tag{29}$$

В [12] приведена формула для площади сферы S_H:

$$A(S_H) = \int\limits_M d\mu = 4\pi\left(\frac{2}{1+h^2} + \frac{h^2}{(1+h^2)^{3/2}}\ln\frac{\sqrt{1+h^2}+1}{\sqrt{1+h^2}-1}\right). \tag{30}$$

Формулы (29) и (30) вместе дают доказательство предложения.

Как показано в [12], для малых объемов d сферы постоянной средней кривизны $H \neq 0$ дают решение изопериметрической задачи в пространстве $S^2 \times \mathbb{R}$, а для d, большего некоторого d_0, решениями являются цилиндры $S^2 \times \left[0, \frac{d}{4\pi}\right]$. Значение d_0 является точкой перехода от одного топологического класса решений к другому.

Предложение 5 еще раз показывает, что некоторое обобщение функционала Уиллмора вида $(H^2 + \alpha\widehat{K} + \beta)\, d\mu$ принимает на изопериметрических поверхностях, гомеоморфных сфере, постоянное значение, которое, возможно, даже является минимумом функционала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердинский Д. А., Тайманов И. А.* Поверхности в трехмерных группах Ли // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1248–1264.

2. *Taimanov I. A.* Modified Novikov–Veselov equation and differential geometry of surfaces // Amer. Math. Soc. Transl. 1997. V. 179, N 2. P. 133–151.

3. *Тайманов И. А.* Двумерный оператор Дирака и теория поверхностей // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 1. С. 85–164.

4. *Abresch U., Rosenberg H.* Generalized Hopf differentials // Mat. Contemp. 2005. V. 28. P. 1–28.

5. *Figueroa C., Mercuri F., Pedrosa R.* Invariant surfaces of the Heisenberg groups // Ann. Math. Pura Appl. 1999. V. 177. P. 173–194.

6. *Abresch U., Rosenberg H.* The Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$ and $H^2 \times \mathbb{R}$ // Acta Math. 2004. V. 193. P. 141–174.

7. *Fernández I., Mira P.* A characterization of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds. Available at http://arxiv.org, see math.DG/0512280.

8. *Morgan F.* Regularity of isoperimetric hypersurfaces in Riemannian manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. V. 355. P. 5041–5052.

9. *Schmidt E.* Der Brunn–Minkowskische Satz und ein Spiegel-theorem sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und hyperbolischen Geometrie // Math. Ann. 1949. V. 120. P. 307–429.

10. *Tomter P.* Constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group // Proccedings of Symposia in Pure Mathematics. 1993. V. 53, N 1. P. 485–495.

11. *Morgan F., Johnson D.* Some sharp isoperimetric theorems for Riemannian manifolds // Indiana Univ. Math. J. 2000. V. 49. P. 1017–1041.

12. *Pedrosa R. H. L.* The isoperimetric problem in spherical cylinders // Ann. Global Anal. Geom. 2004. V. 26. P. 333–354.

Статья поступила 13 октября 2006 г.

Бердинский Дмитрий Александрович, *Тайманов Искандер Асанович*
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`berdinsky@gmail.com`, `taimanov@math.nsc.ru`