Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 517.957

ОТСУТСТВИЕ ЛОКАЛЬНЫХ И ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДРОБНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ ДИНАМИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

М. Киране, Н. Татар

Аннотация: Обобщены некоторые результаты о несуществовании для эллиптических систем с динамическими краевыми условиями, включающими производные по времени целого порядка, на случай нецелого порядка. В частности, рассмотрена система уравнений Пуассона с дробными производными по времени меньшего, чем первый, порядка в краевых условиях и установлены границы нелинейностей, откуда вытекает отсутствие глобальных решений. Дробные производные понимаются в смысле Римана — Лиувилля (или в смысле Капуто). Предложены также необходимые условия существования локальных решений.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, динамическое краевое условие.

1. Введение и предварительные сведения

Эллиптические уравнения с нелинейными динамическими краевыми условиями первого или второго порядка, заданные на многообразии с краем или без такового, рассмотрены в книге Ж.-Л. Лионса [1, гл. 1–11, с. 134–139]. В [2] Хинтерман изучил задачу существования локальных решений некоторых эволюционных уравнений с динамическими краевыми условиями. В своих работах он следовал статьям Эшера [3, 4]. В [5] Киране исследовал разрушение решения для эллиптических уравнений с динамическими краевыми условиями первого или второго порядка. Аманн и Фила в [6] вновь обратились к одной из задач из [5] и нашли показатель Фуджиты для нее. Их результат обобщен в [7] на зависящие от времени краевые условия. Еще ранее Киране, Набана и Похожаев [8] рассмотрели систему уравнений Пуассона с динамическими краевыми условиями

$$\Delta u_i(x', x_d, t) = 0, \quad t > 0,\ x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \infty),$$

$$a_i(x', 0, t)\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial x_d} \geq h_i(x', 0, t)|u_{i+1}|^{p_i}, \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1},\ t > 0,$$

$$u_i(x', 0, 0) = u_{i,0}(x', 0) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-1}),$$

где $p_i > 1$, $d > 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $u_{m+1} = u_1$, a_i и h_i — заданные функции. А именно, они нашли показатель Фуджиты, который известен как показатель в

The second author is very grateful to King Fahd University of Petroleum and Minerals for the facilities and financial support.

нелинейности, отделяющей случай разрушения от случая существования глобального решения при некоторых подходящих начальных данных.

Как изложено в книге [9] и в работах [2, 10–13], эллиптические и параболические системы с динамическими краевыми условиями естественно возникают в математических моделях переноса тепла в твердом теле при контакте с движущейся жидкостью и явлений диффузии, задачах динамики текучих сред, диффузии в пористых средах, моделях полупроводников и химической инженерии (см. также [14–17]).

Следует упомянуть недавние статьи Вулкова и Колевой [18, 19] и Златевой [20], посвященные численному анализу параболических уравнений с динамическими краевыми условиями, а также работы Ахмеда и Кербаля по оптимальному управлению для уравнений с частными производными с динамическими краевыми условиями [21].

О других сходных исследованиях см. [9, 22–29].

В данной статье мы рассматриваем систему Пуассона в полупространстве с динамическими краевыми условиями, содержащими дробные производные по времени различных порядков. Будут доказаны результаты типа Фуджиты. Будут также получены необходимые условия локальной и глобальной разрешимости.

2. Постановка задачи

В данном разделе мы дадим постановку задачи, укажем, что будет пониматься под решением, и введем некоторые предположения. Мы рассматриваем задачу

$$
\begin{aligned}
&\Delta u(x,t) = \Delta v(x,t) = 0, \quad t>0,\ x=(x',x_d)\in\mathbb{R}^{d-1}\times(0,\infty) =: \Omega,\\
&D^{\alpha}_{0|t}\{u(x',0,t)-u_0(x')\} - u_{x_d} \ge h(x',0,t)|v|^p, \quad x'\in\mathbb{R}^{d-1},\ t>0,\\
&D^{\beta}_{0|t}\{v(x',0,t)-v_0(x')\} - v_{x_d} \ge g(x',0,t)|u|^q, \quad x'\in\mathbb{R}^{d-1},\ t>0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

подчиненную начальным условиям

$$
u(x',0,0)=u_0(x')\ge 0, \quad v(x',0,0)=v_0(x')\ge 0, \quad x'\in\mathbb{R}^{d-1}, \tag{2}
$$

где h и g — заданные функции и $p>1$, $q>1$, $d>1$ — вещественные числа. Здесь u_{x_d} — частная производная от u относительно x_d и $\Delta u = \sum_{i=1}^{d} u_{x_i x_i}$ (производная по времени отсутствует). Дробные производные $D^{\alpha}_{0|t}$ ($\alpha\in(0,1)$) и $D^{\beta}_{0|t}$ ($\beta\in(0,1)$) понимаются в смысле Римана — Лиувилля. Левосторонние и правосторонние дробные производные задаются так:

$$
D^{\varrho}_{0|t} f(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-\varrho} f(\tau)\,d\tau, \quad 0<\varrho<1,
$$

$$
D^{\varrho}_{t|T} f(t) := \frac{-1}{\Gamma(1-\varrho)}\frac{d}{dt}\int_t^T (\tau-t)^{-\varrho} f(\tau)\,d\tau, \quad 0<\varrho<1.
$$

Задачи такого типа возникают в вязкоупругости как модели для материалов с вязкоупругой границей. Локальное существование можно доказать, используя методы неподвижной точки (см. также работу М. О. Корпусова и А. Г. Свешникова [30]).

Определение 1. *Слабым решением задачи* (1), (2) на $(0,T)$ будем называть пару п. в. неотрицательных функций $(u,v) \in \big(C\big([0,T]; L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-1}\times\{0\})\big)\big)^2$ таких, что $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-1}\times\{0\}\times(0,T))$, $v \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-1}\times\{0\}\times(0,T))$, удовлетворяющую на $\Sigma_T := (0,T)\times\mathbb{R}^{d-1}$, $Q_T := (0,T)\times\Omega$ интегральным неравенствам

$$\int\limits_{\Sigma_T} \{u(x',0,t) - u_0(x')\} D^{\alpha}_{t|T}\varphi(x',0,t)\,dx'\,dt + \int\limits_{Q_T} u\Delta\varphi\,dxdt - \int\limits_{\Sigma_T} u\varphi_{x_d}\ dx'dt \ge \int\limits_{\Sigma_T} h(x',0,t)|v|^p\varphi\,dx'\,dt, \quad (3)$$

$$\int\limits_{\Sigma_T} \{v(x',0,t) - v_0(x')\} D^{\beta}_{t|T}\varphi(x',0,t)\ dx'\,dt + \int\limits_{Q_T} v\Delta\varphi\,dxdt - \int\limits_{\Sigma_T} v\varphi_{x_d}\,dx'dt \ge \int\limits_{\Sigma_T} g(x',0,t)|u|^q\varphi\,dx'\,dt \quad (4)$$

с некоторой пробной функцией $\varphi \ge 0$, дважды непрерывно дифференцируемой по x и однократно по t (с компактным носителем и $\varphi(T) = 0$).

На самом деле нам потребуется лишь то, что φ непрерывно дифференцируема до порядка $\max(\alpha,\beta)$ по t. Кроме того, мы предполагаем, что вторые интегралы в левых частях (3) и (4) конечны. Отметим, что дробные производные существуют для абсолютно непрерывных функций и имеет место следующая формула «интегрирования по частям» (см. [31, с. 36]):

$$\int\limits_0^T \hat\varphi(t).D^{\varrho}_{0|t}f(t)\,dt = \int\limits_0^T D^{\varrho}_{t|T}\hat\varphi(t).f(t)\,dt$$

и

$$(D^{\alpha}_{0|t}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(0)}{t^\alpha} + \int\limits_0^t \frac{f'(\sigma)}{(t-\sigma)^\alpha}\,d\sigma\right], \quad (5)$$

$$(D^{\alpha}_{t|T}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(T)}{(T-t)^\alpha} - \int\limits_t^T \frac{f'(\sigma)}{(\sigma-t)^\alpha}\ d\sigma\right]. \quad (6)$$

Будем предполагать, что функции h и g обладают следующими свойствами:

(H) $h(x',0,t) \ge Ct^\sigma|x'|^\nu$, $\sigma < p-1$, $t > 0$,

(G) $g(x',0,t) \ge Ct^\gamma|x'|^\mu$, $\gamma < q-1$, $t > 0$.

Условия на σ и γ могут быть опущены, если потребовать, чтобы выполнялись **(H)** и **(G)** для $t \ge t_0$ с некоторым $t_0 > 0$ и чтобы h и g были интегрируемыми на $(0,t_0)$. Здесь и ниже константы C могут быть разными в различных ситуациях.

На самом деле наши рассмотрения выполнены для функций h и g, удовлетворяющих при достаточно больших $R > 0$ условиям

$$h(Ry', R^\theta\tau) \ge R^{\theta_1}h_0(y',\tau), \quad y' \in B_r,\ \tau\in[0,T],$$

$$g(Ry', R^\theta\tau) \ge R^{\theta_2}g_0(y',\tau), \quad y' \in B_r,\ \tau\in[0,T],$$

с некоторыми неотрицательными константами θ, θ_1, θ_2, где $B_r := \{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : |x'| \leq r\}$ и $r > 0$. Здесь h_0 и g_0 таковы, что

$$\int_0^T \int_{B_r} \frac{dy'd\tau}{h_0^{1/(p-1)}(y',\tau)} < \infty, \quad \int_0^T \int_{B_r} \frac{dy'd\tau}{g_0^{1/(q-1)}(y',\tau)} < \infty$$

соответственно.

Основная особенность рассматриваемой задачи в том, что мы имеем дело с системой двух дробных дифференциальных уравнений на границе, у которых дробный порядок различен. В отличие от представленной здесь задачи в [8] изучалась система из двух дифференциальных уравнений (на границе) одного первого порядка, где хватало одной шкалы и тем самым одной пробной функции. Здесь мы используем две различные шкалы и две разные пробные функции. Тогда можно указать способ перейти от одной из них к другой, так как они будут связаны с компонентами решения.

Будем использовать следующие предположения.

(K) Либо $1 < q \leq (1 + \sigma + \beta\nu)/p + (\gamma + \alpha\mu + \beta)/(1-\alpha)$ и $p > 1$, либо $q > (\gamma + \alpha\mu + \beta)/(1-\alpha)$ и $1 < p \leq (\sigma + \beta\nu + 1)/((1-\alpha)q - (\gamma + \alpha\mu + \beta))$.

(L) Либо $1 < p \leq (1 + \gamma + \alpha\mu)/q + (\sigma + \beta\nu + \alpha)/(1-\beta)$ и $q > 1$, либо $q > (\sigma + \beta\nu + \alpha)/(1-\beta)$ и $1 < q \leq (\gamma + \alpha\mu + 1)/((1-\beta)p - (\sigma + \beta\nu + \alpha))$.

Положим

$$d_1 := 1 + \frac{1 + (\gamma + \alpha\mu)p + \sigma + \beta(\nu + p) - (1-\alpha)qp}{\alpha qp + (\beta - \alpha)p - \beta}, \tag{7}$$

$$d_2 := 1 + \frac{1 + (\sigma + \beta\nu)q + \gamma + \alpha(\mu + q) - (1-\beta)qp}{\beta qp + (\alpha - \beta)q - \alpha}. \tag{8}$$

Легко видеть, что $\alpha qp + (\beta-\alpha)p - \beta = \alpha p(q-1) + \beta(p-1) > 0$ и $\beta qp + (\alpha-\beta)q - \alpha = \beta q(p-1) + \alpha(q-1) > 0$. Поэтому знаменатели в (7), (8) положительны. Кроме того, условия в **(K)** и **(L)** могут быть выбраны так, что числители в (7), (8) будут неотрицательны.

Прежде чем формулировать и доказывать нашу первую теорему, покажем неотрицательность решений, обладающих некоторой регулярностью.

Предложение 1. *Если (u,v) — решение задачи* (1), (2) *в* $W_x^{2,2}(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times (0,T))$, *то* $u \geq 0$ *и* $v \geq 0$.

Доказательство. Рассмотрим $u^- = \max(-u, 0)$. Докажем, что на самом деле $u^- = 0$ и тем самым $u = u^+ := \max(u,0) \geq 0$. С одной стороны, используя формулу Грина, имеем

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u^- \Delta u \, dxdt = -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u^- . \nabla u \, dxdt + \int_{\Sigma_T} \frac{\partial u}{\partial n} u^- \, dx'dt. \tag{9}$$

Умножая первое уравнение в (1) на u^- и интегрируя по $(0,T) \times \mathbb{R}^d$, находим, что левая часть в (9) равна 0. Тем самым

$$\int_{\Sigma_T} \frac{\partial u}{\partial n} u^- \, dx'dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u^-|^2 \, dxdt \geq 0.$$

Далее, умножая первое уравнение на границе в (1) на u^- и интегрируя по $(0,T)\times\mathbb{R}^{d-1}$, видим, что

$$\int\limits_{\Sigma_T} D^\alpha_{0|t}t\{u(x',0,t)-u_0(x')\}u^-\,dx'dt - \int\limits_{\Sigma_T} u_{x_d}u^-\,dx'dt \geq 0,$$

откуда

$$\int\limits_{\Sigma_T} D^\alpha_{0|t}\{u(x',0,t)-u_0(x')\}u^-\,dx'dt \geq 0.$$

С другой стороны, не уменьшая общности, предположим (от противного), что u^- положительна и возрастает на $(0,T_1)$ (иначе можно рассмотреть первый интервал, на котором u^- положительная и возрастает, перед интервалом, на котором u^- равна нулю). По формуле (5) имеем

$$D^\alpha_{0|t}\{u(x',0,t)-u_0(x')\} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u'(\sigma)}{(t-\sigma)^\alpha}\,d\sigma. \tag{10}$$

Это выражает по существу связь между дробной производной в смысле Римана — Лиувилля и дробной производной в смысле Капуто (определенной в правой части (10)). Таким образом, поскольку $u'(t)$ отрицательна на $(0,T_1)$, получим

$$\int\limits_{\Sigma_{T_1}} D^\alpha_{0|t}\{u(x',0,t)-u_0(x')\}u^-\,dx'\,dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{\Sigma_{T_1}} u^-\int\limits_0^t \frac{u'(\sigma)}{(\sigma-t)^\alpha}\,d\sigma dx'dt < 0;$$

противоречие.

3. Результаты

Представим наш первый результат.

Теорема 1. *Пусть* $p>1$, $q>1$ *удовлетворяют либо условию* **(K)**, *либо условию* **(L)** *и* h, g *удовлетворяют условиям* **(H)** *и* **(G)** *соответственно. Если* $1<d\leq\max(d_1,d_2)$, *то задача* (1), (2) *не имеет нетривиального неотрицательного глобального решения.*

Доказательство. Предположим, что (u,v) — нетривиальное неотрицательное решение, существующее глобально по времени. Иначе говоря, (u,v) существует на $(0,T_*)$ для произвольного $T_*>0$. Пусть T и R — положительные вещественные числа такие, что $0<TR<T_*$. В качестве пробных функций выберем

$$\varphi_\theta(x',t) := \varphi_{0\theta}\left(\frac{t^{2\theta}+|x'|^2}{R^{2\theta}}\right), \quad \theta=\alpha,\beta,$$

такие, что $\varphi_\theta(x',TR)=0$, $\theta=\alpha,\beta$, где $\varphi_{0\theta}$ — неотрицательные невозрастающие функции из $C_0^2(\mathbb{R}_+)$ и

$$\varphi_{0\theta}(\xi) := \begin{cases} 1 & \text{для } 0\leq\xi\leq 1, \\ 0 & \text{для } \xi\geq 2, \end{cases} \qquad \theta=\alpha,\beta.$$

Пробные функции $\varphi_{0\theta}$ можно выбрать так, что

$$\int\limits_{\mathrm{supp}D^\alpha_{\tau|T}\varphi_{0\alpha}} (g_0\varphi_{0\beta})^{-q'/q}\left|D^\alpha_{\tau|T}\varphi_{0\alpha}\right|^{q'}d\tau dy' < \infty, \tag{11}$$

$$\int\limits_{\mathrm{supp} D^{\beta}_{\tau|T}\varphi_{0\beta}} (h_0\varphi_{0\alpha})^{-q'/q} \left|D^{\beta}_{\tau|T}\varphi_{0\beta}\right|^{p'} d\tau dy' < \infty, \tag{12}$$

где $p + p' = pp'$, $q + q' = qq'$. Эти условия не обременительны. В самом деле, их выполнения можно достичь допущениями на показатели в **(H)**, **(G)** выбором $\varphi_\theta = \varphi^{\lambda}_{0\theta}$, $\theta = \alpha, \beta$, с подходящим большим значением λ (например, как в следующей теореме). Причины такого требования будут ясны позже. Рассмотрим функцию $\Psi_\theta = \Psi_\theta(x', x_d, t)$ такую, что

$$\Delta\Psi_\theta = 0, \quad \Psi_\theta(x', 0, t) = \varphi_\theta(x', 0, t), \quad \theta = \alpha, \beta. \tag{13}$$

Напомним, что φ_θ имеет ограниченный носитель. Идея введения Ψ_θ в последней задаче заимствована из [1]. Условия на эту систему понимаются как краевые условия. По лемме Хопфа или в силу явного решения Пуассона

$$\Psi_\theta(x', x_d, t) = \frac{2x_d}{\sigma_d} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{\varphi_\theta(y, 0, t)}{(|y - x'|^2 + x_d^2)^{d/2}}\, dy, \quad \theta = \alpha, \beta,$$

где σ_d/d — объем единичного шара, получаем $\Psi_{\theta x_d} > 0$, $\theta = \alpha, \beta$. Используя второе тождество Грина, имеем

$$\int\limits_{\Sigma_T} (w_{x_d}\Psi_\theta - w\Psi_{\theta x_d})\, dx' dt = 0$$

с $w = u, v$ и $\theta = \alpha, \beta$ соответственно. Поэтому

$$\int\limits_{\Sigma_T} u_{x_d}\varphi_\alpha\, dx' dt \geq 0, \quad \int\limits_{\Sigma_T} v_{x_d}\varphi_\beta\, dx' dt \geq 0.$$

Используя пробные функции Ψ_α в (3) и Ψ_β в (4), из предыдущих рассуждений получим

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}} h|v|^p\varphi_\alpha + \int\limits_{\Sigma_{TR}} u_0(x').D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_\alpha \leq \int\limits_{\Sigma_{TR}} u.D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_\alpha, \tag{14}$$

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}} g|u|^q\varphi_\beta + \int\limits_{\Sigma_{TR}} v_0(x').D^{\beta}_{t|TR}\varphi_\beta \leq \int\limits_{\Sigma_{TR}} v.D^{\beta}_{t|TR}\varphi_\beta \tag{15}$$

(здесь $\int\limits_{\Sigma_{TR}} = \int\limits_{\Sigma_{TR}} dx'\, dt$).

Отметим, что согласно условиям на φ_θ и формуле (6) имеем

$$\left(D^{\theta}_{t|TR}\varphi_\theta\right)(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_t^{TR} \frac{\varphi'_\theta(\sigma)}{(\sigma - t)^\alpha}\, d\sigma \geq 0, \quad \theta = \alpha, \beta,\ t \in (0, TR). \tag{16}$$

Следовательно, из (14) и (15) выводим, что

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}} h|v|^p\varphi_\alpha \leq \int\limits_{\Sigma_{TR}} u.D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_\alpha, \tag{17}$$

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}} g|u|^q\varphi_\beta \leq \int\limits_{\Sigma_{TR}} v.D^{\beta}_{t|TR}\varphi_\beta \tag{18}$$

соответственно. Запишем теперь

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}} u.D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_\alpha = \int\limits_{\Sigma_{TR}} u(g\varphi_\beta)^{\frac{1}{q}}(g\varphi_\beta)^{-\frac{1}{q}}.D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_\alpha.$$

Используя неравенство Гёльдера, получим

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}} u.D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_\alpha \le \Bigg(\int\limits_{\Sigma_{TR}} |u|^q(g\varphi_\beta)\Bigg)^{\frac{1}{q}}\Bigg(\int\limits_{\Sigma_{TR}} (g\varphi_\beta)^{-\frac{q'}{q}}.\big|D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_\alpha\big|^{q'}\Bigg)^{\frac{1}{q'}}, \tag{19}$$

где $q+q'=qq'$.

Аналогично

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}} v.D^{\beta}_{t|TR}\varphi_\beta \le \Bigg(\int\limits_{\Sigma_{TR}} |v|^p(h\varphi_\alpha)\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg(\int\limits_{\Sigma_{TR}} (h\varphi_\alpha)^{-\frac{p'}{p}}.\big|D^{\beta}_{t|TR}\varphi_\beta\big|^{p'}\Bigg)^{\frac{1}{p'}}, \tag{20}$$

где $p+p'=pp'$.

Для упрощения положим

$$\mathscr{J} := \int\limits_{\Sigma_{TR}} g|u|^q\varphi_\beta \quad \text{и} \quad J := \int\limits_{\Sigma_{TR}} h|v|^p\varphi_\alpha, \tag{21}$$

$$\mathscr{A} := \Bigg(\int\limits_{\Sigma_{TR}} (g\varphi_\beta)^{-\frac{q'}{q}}.\big|D^{\alpha}_{t|TR}\varphi_\alpha\big|^{q'}\Bigg)^{\frac{1}{q'}}, \tag{22}$$

$$\mathscr{B} := \Bigg(\int\limits_{\Sigma_{TR}} (h\varphi_\alpha)^{-\frac{p'}{p}}.\big|D^{\beta}_{t|TR}\varphi_\beta\big|^{p'}\Bigg)^{\frac{1}{p'}}. \tag{23}$$

Из (17) и (19) вытекает, что

$$J \le \mathscr{J}^{1/q}\mathscr{A}, \tag{24}$$

а из (18) и (20) — что

$$\mathscr{J} \le J^{1/p}\mathscr{B}.$$

Перейдем к новым переменным $t=R\tau$, $x'=R^\theta y'$ ($dtdx' = R^{1+\theta(d-1)}d\tau dy'$) для $\theta=\alpha,\beta$ в (22) и (23) соответственно. Используя определение правосторонней дробной производной, находим, что

$$D^{\theta}_{t|TR}\varphi_\theta = R^{-\theta}D^{\theta}_{\tau|T}\varphi_{0\theta}, \quad \theta=\alpha,\beta.$$

Поэтому

$$\mathscr{A}^{q'} \le CR^{-\frac{q'}{q}(\gamma+\alpha\mu)-\alpha q'+1+\alpha(d-1)}\int\limits_{\Omega_\alpha}(\tau^\gamma|y'|^\mu\varphi_{0\beta}(\xi))^{-\frac{q'}{q}}.|D^{\alpha}_{\tau|T}\varphi_{0\alpha}(\xi)|^{q'}\,d\tau dy'$$

с $\Omega_\alpha := \{(\tau,y') : 0<\tau^{2\alpha}+|y'|^2<2\}$. Таким образом, учитывая (11), получаем

$$\mathscr{A} \le CR^{-\frac{1}{q}(\gamma+\alpha\mu)-\alpha+\frac{1+\alpha(d-1)}{q'}} = CR^{-a},$$

где

$$a := \alpha + \frac{\gamma+\alpha\mu}{q} - \frac{1+\alpha(d-1)}{q'}.$$

Аналогично с помощью (12) и подходящей шкалы имеем

$$\mathscr{B} \le CR^{-b},$$

где

$$b := \beta + \frac{\sigma + \beta\nu}{p} - \frac{1 + \beta(d-1)}{p'}.$$

Из (23) и (24) ясно, что

$$J^{1-\frac{1}{qp}} \le CR^{-\left(a+\frac{b}{q}\right)}, \quad \mathscr{J}^{1-\frac{1}{qp}} \le CR^{-\left(\frac{a}{p}+b\right)}. \tag{25}$$

При $d \le \max(d_1, d_2)$ имеем либо $d \le d_1$, либо $d \le d_2$, и согласно условиям одно из них не меньше единицы. Предположим, что $1 < d \le d_1$. Пусть вначале $d < d_1$. Тогда легко проверить, что $a + (b/q) > 0$. Отсюда

$$\lim_{R\to\infty} J^{1-\frac{1}{qp}} = 0,$$

следовательно, $v = 0$ п. в. согласно определению (21), а значит, $u = 0$ п. в. ввиду (15); противоречие. Если теперь $d = d_1$, то $a + (b/q) = 0$ и в силу (25) оказывается, что

$$\lim_{R\to\infty} J = C.$$

Из (18), (20) и (30) имеем

$$\mathscr{J} \le \mathscr{B}\Bigg(\int\limits_{\operatorname{supp} D^{\beta}_{t|TR}\varphi_\beta} h|v|^p\varphi_\alpha\Bigg)^{1/p}$$

или

$$\mathscr{J} \le \mathscr{B}\Bigg(\int\limits_{\mathscr{C}} h|v|^p\varphi_\alpha\Bigg)^{1/p},$$

где $\mathscr{C} := \{(t, x') : R^{2\beta} \le t^{2\beta} + |x'|^2 \le 2R^{2\beta}\}$. Используя (24) и тот факт, что $\mathscr{A}\mathscr{B}^{1/q}$ ограничено, получаем

$$J \le \Bigg(\int\limits_{\mathscr{C}} h|v|^p\varphi_\alpha\Bigg)^{1/pq} \mathscr{A}\mathscr{B}^{1/q} \le C\Bigg(\int\limits_{\mathscr{C}} h|v|^p\varphi_\alpha\Bigg)^{1/pq},$$

и правая часть уходит к нулю при R, стремящемся к бесконечности. Отсюда $\lim\limits_{R\to\infty} J = 0$; вновь противоречие. Рассуждения для случая $d \le d_2$ аналогичны.

Замечание 1. Условия на d можно переложить на p и q для нахождения критических показателей. Заметим, что в специальном случае: $u \equiv v$, $p = q$, $\alpha = \beta = 1$ и $\sigma = \mu = \gamma = \nu = 0$, получим критический показатель $p_c = 1 + (1/(d-1))$, найденный в работе [6].

Определим

$$V := \liminf_{|x'|\to+\infty} \{u_0(x') \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\},$$

$$W := \liminf_{|x'|\to+\infty} \{v_0(x') \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\}.$$

Установим необходимые условия существования.

Теорема 2. *Пусть (u, v) — неотрицательное слабое решение задачи* (1), (2) *на* $(0, T)$. *Предположим, что* $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}^+} h > 0$, $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}^+} g > 0$ *п. в. в* $\mathbb{R}^{d-1}$. *Тогда*

$$V \le C_1 T^{\alpha-\beta p'} + C_2 T^{\alpha(1-q')}, \quad W \le C_3 T^{\beta-\alpha q'} + C_4 T^{\beta(1-p')}.$$

Доказательство. Рассмотрим пробную функцию

$$\varphi(x', t) := \Phi\left(\frac{x'}{R}\right) \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^k, & 0 < t \le T, \\ 0, & t > T, \end{cases} \qquad k = \max(p', q'),$$

с $\operatorname{supp}\Phi \subset \{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : |x'| > R > 1\}$. Возьмем пробную функцию, определенную в (13), с такой φ на границе в (14) и проинтегрируем по $(0, T) \times \mathbb{R}^{d-1}$. Используя (17)–(19) и неравенство Юнга, находим, что

$$\int\limits_{\Sigma_T} h|v|^p\varphi + \int\limits_{\Sigma_T} u_0(x').D^{\alpha}_{t|T}\varphi \le \frac{1}{q}\int\limits_{\Sigma_T} g|u|^q\varphi + \frac{1}{q'}\int\limits_{\Sigma_T}(g\varphi)^{-q'/q}\left|D^{\alpha}_{t|T}\varphi\right|^{q'}. \tag{26}$$

Из (15) получаем

$$\int\limits_{\Sigma_T} g|u|^q\varphi \le \int\limits_{\Sigma_T} v.D^{\beta}_{t|T}\varphi,$$

поэтому

$$D^{\beta}_{t|T}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left[\frac{\varphi(T)}{(T-t)^{\beta}} - \int\limits_t^T \frac{\varphi'(\sigma)\,d\sigma}{(\sigma-t)^{\beta}}\right] \ge 0.$$

Следовательно, аналогично (20) видим, что

$$\int\limits_{\Sigma_T} g|u|^q\varphi \le \frac{1}{p}\int\limits_{\Sigma_T} h|v|^p\varphi + \frac{1}{p'}\int\limits_{\Sigma_T}(h\varphi)^{-p'/p}|D^{\beta}_{t|T}\varphi|^{p'}. \tag{27}$$

Отсюда, принимая во внимание (27) в (26), выводим, что

$$\int\limits_{\Sigma_T} h|v|^p\varphi + \int\limits_{\Sigma_T} u_0(x').D^{\alpha}_{t|T}\varphi$$
$$\le \frac{1}{pq}\int\limits_{\Sigma_T} h|v|^p\varphi + \frac{1}{p'q}\int\limits_{\Sigma_T}(h\varphi)^{-p'/p}\left|D^{\beta}_{t|T}\varphi\right|^{p'} + \frac{1}{q'}\int\limits_{\Sigma_T}(g\varphi)^{-q'/q}\left|D^{\alpha}_{t|T}\varphi\right|^{q'}. \tag{28}$$

После несложных вычислений получаем

$$D^{\theta}_{t|T}\varphi = \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k-\theta)}\Phi T^{-\theta}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{k-\theta}. \tag{29}$$

Воспользуемся равенством $\Gamma_{k,\theta} = \Gamma(1+k)/\Gamma(1+k-\theta)$, $\theta = \alpha, \beta$. Соотношения (28) и (29) вместе с тем фактом, что $pq > 1$, приводят к неравенству

$$\Gamma_{k,\alpha}T^{-\alpha}\int\limits_{\Sigma_T} u_0(x')\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{k-\alpha}$$
$$\le \frac{1}{p'q}(\Gamma_{k,\beta})^{p'}T^{-\beta p'}\int\limits_{\Sigma_T} h^{-p'/p}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{k-\beta p'}$$

$$+\frac{1}{q'}(\Gamma_{k,\alpha})^{q'}T^{-\alpha q'}\int\limits_{\Sigma_T} g^{-q'/q}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{k-\alpha q'}.$$

Используя величину k, можно проверить, что $1+k-\beta p'>0$ и $1+k-\alpha q'>0$. Поэтому если $\widetilde{\Gamma}_{k,\alpha}=\Gamma(1+k)/\Gamma(2+k-\alpha)$, то

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}_{k,\alpha}T^{1-\alpha}&\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} u_0(x')\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx'\\ &\le \frac{1}{p'q(1+k-\beta p')}(\Gamma_{k,\beta})^{p'}T^{1-\beta p'}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}(\inf_{t\in(0,T)} h)^{-p'/p}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx'\\ &\quad+\frac{1}{q'(1+k-\alpha q')}(\Gamma_{k,\alpha})^{q'}T^{1-\alpha q'}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}(\inf_{t\in(0,T)} g)^{-q'/q}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx'. \end{aligned}\tag{30}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}_{k,\alpha}T^{1-\alpha}&\inf_{|x'|>R}\{u_0(x')\inf[(\inf_{t\in(0,T)} h)^{p'/p},(\inf_{t\in(0,T)} g)^{q'/q}]\}\\ &\times\int\limits_{|x'|>R}\sup[(\inf_{t\in(0,T)} h)^{-p'/p},(\inf_{t\in(0,T)} g)^{-q'/q}]\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx'\\ &\le \frac{1}{p'q(1+k-\beta p')}(\Gamma_{k,\beta})^{p'}T^{1-\beta p'}\int\limits_{|x'|>R}(\inf_{t\in(0,T)} h)^{-p'/p}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx'\\ &\quad+\frac{1}{q'(1+k-\alpha q')}(\Gamma_{k,\alpha})^{q'}T^{1-\alpha q'}\int\limits_{|x'|>R}(\inf_{t\in(0,T)} g)^{-q'/q}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx'. \end{aligned}\tag{31}$$

Разделив обе части в (31) на

$$\int\limits_{|x'|>R}\sup[(\inf_{t\in(0,T)} h)^{-p'/p},(\inf_{t\in(0,T)} g)^{-q'/q}]\Phi\left(\frac{x'}{R}\right)dx',$$

находим, что

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}_{k,\alpha}T^{1-\alpha}&\inf_{|x'|>R}\{u_0(x')\inf[(\inf_{t\in(0,T)} h)^{p'/p},(\inf_{t\in(0,T)} g)^{q'/q}]\}\\ &\le \frac{1}{p'q(1+k-\beta p')}(\Gamma_{k,\beta})^{p'}T^{1-\beta p'}+\frac{1}{q'(1+k-\alpha q')}(\Gamma_{k,\alpha})^{q'}T^{1-\alpha q'}\end{aligned}$$

или

$$\inf_{|x'|>R}\{u_0(x')\inf[(\inf_{t\in(0,T)} h)^{p'/p},(\inf_{t\in(0,T)} g)^{q'/q}]\}\le C_1T^{\alpha-\beta p'}+C_2T^{\alpha(1-q')},$$

где

$$C_1=\frac{(2+k-\alpha)}{p'q(1+k-\beta p')}(\Gamma_{k,\beta})^{p'-1},\quad C_2=\frac{(2+k-\alpha)}{q'(1+k-\alpha q')}(\Gamma_{k,\alpha})^{q'-1}.$$

Переходя к пределу при $R\to+\infty$, получаем

$$V\le C_1T^{\alpha-\beta p'}+C_2T^{\alpha(1-q')}.$$

Используя (15) вместо (14) и рассуждая аналогично, можно доказать второе соотношение в утверждении теоремы.

Следствие 1. *Допустим, что задача* (1), (2) *имеет глобальное неотрицательное слабое решение. Тогда*

(a) *если* $\alpha - \beta p' < 0$, *то* $V = 0$, *иначе говоря,*

$$\liminf_{|x'|\to+\infty} \{u_0(x') \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\} = 0;$$

(b) *если* $\beta - \alpha q' < 0$, *то* $W = 0$, *иначе говоря,*

$$\liminf_{|x'|\to+\infty} \{v_0(x') \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\} = 0;$$

(c) *если* $\alpha - \beta p' = 0$, *то* $V \le C_1$, *иначе говоря,*

$$\liminf_{|x'|\to+\infty} \{u_0(x') \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\} \le C_1;$$

(d) *если* $\beta - \alpha q' = 0$, *то* $W \le C_3$, *иначе говоря,*

$$\liminf_{|x'|\to+\infty} \{v_0(x') \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\} \le C_3.$$

Замечание 2. Отметим, что если $\alpha \le \beta$, то $\alpha/\beta \le 1 < p'$, а если $\beta \le \alpha$, то $\beta/\alpha \le 1 < q'$. Поэтому в любой ситуации выполнен по крайней мере один из случаев предыдущего следствия.

Следствие 2. *Пусть* $V = +\infty$ *или* $W = +\infty$. *Тогда задача* (1), (2) *не может иметь локального неотрицательного слабого решения.*

Следствие 3. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если* $\alpha - \beta p' < 0$ *и* $V > 0$, *то* $\min(T^{\beta p' - \alpha}, T^{(q'-1)\alpha}) \le (C_1 + C_2)/V$;

(ii) *если* $\beta - \alpha q' < 0$ *и* $W > 0$, *то* $\min(T^{\alpha q' - \beta}, T^{(p'-1)\beta}) \le (C_3 + C_4)/W$.

Замечание 3. В том случае, если локально существует слабое решение задачи (1), (2), последнее следствие дает оценки сверху для времени его разрушения.

В завершение укажем другие необходимые условия существования глобального решения.

Теорема 3. *Если задача* (1), (2) *допускает неотрицательное глобальное слабое решение, то существуют четыре положительные константы* κ, $\tilde\kappa$ *и* K, $\widetilde{K}$ *такие, что*

$$\liminf_{|x'|\to+\infty} \{u_0(x')|x'|^{\kappa} \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\} \le K,$$

$$\liminf_{|x'|\to+\infty} \{v_0(x')|x'|^{\tilde\kappa} \inf[(\inf_{t\in\mathbb{R}^+} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in\mathbb{R}^+} g)^{q'/q}]\} \le \widetilde{K}.$$

Доказательство. Из (30) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} u_0(x')\Phi\left(\frac{x'}{R}\right) dx' \le C_1 T^{\alpha-\beta p'} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} (\inf_{t\in(0,T)} h)^{-p'/p} \Phi\left(\frac{x'}{R}\right) dx' + C_2 T^{\alpha(1-q')} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} (\inf_{t\in(0,T)} g)^{-q'/q} \Phi\left(\frac{x'}{R}\right) dx'.$$

Если $\operatorname{supp}\Phi \subset \{x' : R < |x'| < 2R\}$, то, умножая в интегралах на $|x'|^\kappa |x'|^{-\kappa}$, где $\kappa = \min\{\kappa_1, \kappa_2\}$ с $\kappa_1 = \beta p' - \alpha$ и $\kappa_2 = \alpha(q'-1)$, находим, что

$$\inf_{|x'|>R}\{u_0(x')|x'|^\kappa \inf[(\inf_{t\in(0,T)} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in(0,T)} g)^{q'/q}]\}$$
$$\times \int\limits_{|x'|>R} |x'|^{-\kappa} \sup[(\inf_{t\in(0,T)} h)^{-p'/p}, (\inf_{t\in(0,T)} g)^{-q'/q}]\Phi\left(\frac{x'}{R}\right) dx'$$
$$\le C_1 T^{\alpha-\beta p'}(2R)^{\kappa_1} \int\limits_{|x'|>R} |x'|^{-\kappa_1}(\inf_{t\in(0,T)} h)^{-p'/p}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right) dx'$$
$$+ C_2 T^{\alpha(1-q')}(2R)^{\kappa_2} \int\limits_{|x'|>R} |x'|^{-\kappa_2}(\inf_{t\in(0,T)} g)^{-q'/q}\Phi\left(\frac{x'}{R}\right) dx'. \tag{32}$$

Взяв $T = R$ и разделив обе части (32) на

$$\int\limits_{|x'|>R} |x'|^{-\kappa} \sup[(\inf_{t\in(0,T)} h)^{-p'/p}, (\inf_{t\in(0,T)} g)^{-q'/q}]\Phi\left(\frac{x'}{R}\right) dx',$$

очевидно, получим

$$\inf_{|x'|>R}\{u_0(x')|x'|^\kappa \inf[(\inf_{t\in(0,T)} h)^{p'/p}, (\inf_{t\in(0,T)} g)^{q'/q}]\} \le 2^{\kappa_1}C_1 + 2^{\kappa_2}C_2 =: K.$$

Второе соотношение в утверждении теоремы получается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod-Gautiers Villars, 1969.
2. *Hintermann T.* Evolution equations with dynamic boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1989. Sect. A. V. 113, N 1–2. P. 43–60.
3. *Escher J.* Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions // Comm. Partial Differential Equations. 1993. V. 18, N 7/8. P. 1309–1364.
4. *Escher J.* Nonlinear elliptic systems with dynamical boundary conditions // Math. Z. 1992. Bd 210. S. 413–439.
5. *Kirane M.* Blow-up for some equations with semilinear dynamical boundary conditions of parabolic and hyperbolic types // Hokkaido Math. J. 1992. V. 21, N 2. P. 221–229.
6. *Amann H., Fila M.* A Fujita-type theorem for the Laplace equation with a dynamical boundary condition // Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 1997. V. 66, N 2. P. 321–328.
7. *Kirane M., Nabana E., Pokhozhaev S. I.* Nonexistence of global solutions to an elliptic equation with a dynamical boundary condition // Bol. Soc. Paran. Mat. (2). 2004. V. 22, N 2. P. 9–16.
8. *Киране М., Набана Э., Похожаев С. И.* Построение самосопряженного расширения оператора Шредингера с потенциалом, сосредоточенным на пучке плоскостей. I // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 6. С. 768–774.
9. *Carslaw H. S., Jaeger J. C.* Conductor of heat in solids. Oxford: Oxford Univ. Press, 1960.
10. *Gröger, K.* Initial boundary value problems from semiconductor device theory // Z. Angew. Math. Mech. 1987. Bd 67. S. 345–355.
11. *Igbida N., Kirane M.* A degenerate diffusion problem with dynamical boundary conditions // Math. Ann. 2002. V. 323, N 2. P. 377–396.
12. *Bejenaru I., Diaz J. I., Vrabie I. I.* An abstract approximate controllability result and applications to elliptic and parabolic systems with dynamic boundary conditions // Electron. J. Differential Equations. 2001. V. 50. P. 16–19.
13. *Grobbelaar-Van Dalsen M., Sauer N.* Solutions in Lebesgue spaces of the Navier–Stokes equations with dynamical boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1993. V. 123, N 4. P. 745–761.

14. *Langer R. E.* A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with a fluid // Tôhoku Math. J. 1932. V. 35. P. 260–275.
15. *Popescu L.* Parabolic large diffusion equations with dynamical boundary conditions // An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. 2001. V. 28. P. 173–182.
16. *Popescu L.* Parabolic large diffusion equations with dynamical boundary conditions. Existence results // Math. Rep. (Bucur.) 2003. V. 4. P. 401–413.
17. *Sun N.-Z.* Mathematical modelling of groundwater pollution. New York: Springer-Verl., 1996.
18. *Vulkov L. G.* Applications of Steklov-type eigenvalue problems to convergence of difference schemes for parabolic and hyperbolic equations with dynamical boundary conditions // Numerical analysis and its applications (Rousse, 1996). Berlin: Springer, 1997. P. 557–564. (Lecture Notes in Comput. Sci.; 1196).
19. *Koleva M. N., Vulkov L. G.* On the blow up of finite difference solutions to the heat-diffusion equation with semilinear dynamical boundary conditions // Appl. Math. Comput. 2005. V. 161, N 1. P. 69–71.
20. *Zlateva K.* Method of lines for parabolic equations with dynamical boundary conditions // Math. Balkanica. 2000. V. 14, N 3–4. P. 275–290.
21. *Ahmed N. U., Kerbal S.* Necessary conditions of optimality for systems governed by B-evolutions // Proc. dynamic systems and applications. Atlanta, GA, 1995. V 2. P. 293–300. Atlanta, GA: Dynamic, 1996.
22. *Aiki T.* Multi-dimensional Stefan problems with dynamic boundary conditions // Appl. Anal. 1995. V. 56, N 1–2. P. 71–94.
23. *Andreucci D., Gianni R.* Global existence and blow up in a parabolic problem with nonlocal dynamical boundary conditions // Adv. Differential Equations. 1996. V. 1, N 5. P. 729–752.
24. *Arrieta J. M., Quittner P., Rodriguez-Bernal A.* Parabolic problems with nonlinear dynamical boundary conditions and singular initial data // Differential Integral Equations. 2001. V. 14, N 12. P. 1487–1510.
25. *Von Below J., De Coster C.* A qualitative theory for parabolic problems under dynamical boundary conditions // J. Ineq. Appl. 2000. V. 5, N 5. P. 467–486.
26. *Fila M., Quittner P.* Global solutions of the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20. P. 1325–1333.
27. *Friedman A., Shinbrot M.* The initial value problem for the linearized equations of water waves // J. Math. Mech. 1968. V. 17. P. 107–180.
28. *Kacur J.* Nonlinear parabolic equations with the mixed nonlinear and nonstationary boundary conditions // Math. Slovaca. 1980. V. 30. P. 213–237.
29. *Koleva M. N.* On the computation of blow-up solutions of parabolic equation with semilinear dynamical boundary conditions // Proc. Math. Inform. 2003. V. 39. P. 122–126.
30. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* О существовании решения уравнения Лапласа с нелинейным динамическим граничным условием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 1. С. 95–110.
31. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional integrals and derivatives: Theory and applications. Amsterdam: Gordon and Breach, 1993.

Статья поступила 17 октября 2005 г., окончательный вариант — 20 февраля 2006 г.

Mokhtar Kirane
Laboratoire de Mathématiques,
Université de La Rochelle, France
mkirane@univ-lr.fr

Nasser-eddine Tatar
King Fahd University of Petroleum and Minerals,
Department of Mathematical Sciences
Dhahran, 31261, Saudi Arabia
tatarn@kfupm.edu.sa