Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 515.164.13

ОБ ОПЕРАТОРЕ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ КОНЦАМИ

В. И. Кузьминов, И. А. Шведов

Аннотация: Указаны условия нормальной и компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования на цилиндрических многообразиях, снабженных произвольной римановой метрикой. Ранее аналогичные результаты были получены в частном случае искривленных цилиндров [1].

Ключевые слова: дифференциальная форма, нормальная и компактная разрешимость линейных операторов, неравенство Харди.

Представляет интерес вопрос о том, как те или иные геометрические характеристики риманова многообразия находят свое отражение в свойствах L_p-комплекса де Рама этого многообразия. В настоящей работе мы находим условия нормальной и компактной разрешимости операторов $d^k : L_p^k(X) \to L_p^{k+1}(X)$ внешнего дифференцирования на римановом многообразии X, которое как гладкое многообразие представляет собой цилиндр $[a, b) \times Y$ над замкнутым компактным многообразием Y.

Спектр оператора Лапласа $\Delta_k : L_2^k(X) \to L_2^k(X)$, действующего в пространстве L_2-форм степени k на полном римановом многообразии X, дискретен тогда и только тогда, когда компактно разрешимы операторы d^{k-1}, d^k и $\dim(\operatorname{Ker} d^k / \operatorname{Im} d^{k-1}) < \infty$. Поэтому указанные условия компактной разрешимости операторов внешнего дифференцирования на цилиндрах позволяют указать также и условия дискретности спектра оператора Лапласа, действующего в пространстве дифференциальных форм на многообразиях специального вида, а именно на многообразиях с цилиндрическими концами.

1. Поливекторы и формы над евклидовым пространством

Приведем некоторые сведения из полилинейной алгебры евклидовых пространств. Недостающие детали можно найти в [2]. Пусть V — евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, V^* — евклидово пространство, сопряженное к V, $\Lambda_k V$ — k-я внешняя степень пространства V, $\Lambda^k V$ — пространство k-линейных кососимметрических $\mathbb{R}$-значных функций на V^k. Элементы пространства $\Lambda_k V$ называются *k-векторами* над V, а элементы пространства $\Lambda^k V$ — *k-ковекторами* или

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (коды проектов НШ–311.2003.1, НШ–8526.2006.1).

k-формами над V. Определены операции умножения $\wedge : \Lambda_k V \times \Lambda_l V \to \Lambda_{k+l} V$ и $\wedge : \Lambda^k V \times \Lambda^l V \to \Lambda^{k+l} V$. k-Вектор называется *простым* или *разложимым*, если он представим в виде $a = a_1 \wedge \dots \wedge a_k$, $a_i \in V = \Lambda_1 V$. Аналогично k-форма называется *простой* или *разложимой*, если она имеет вид $\omega = f_1 \wedge \dots \wedge f_k$, $f_i \in V^* = \Lambda^1 V$. Скалярное произведение, заданное в пространстве V, индуцирует каноническим образом скалярные произведения в $\Lambda_k V$ и $\Lambda^k V$. Для простых k-векторов $a = a_1 \wedge \dots \wedge a_k$, $b = b_1 \wedge \dots \wedge b_k$

$$(a, b)_{\Lambda_k V} = \det((a_i, b_j)_V),$$

для простых k-форм $f = f_1 \wedge \dots \wedge f_k$, $g = g_1 \wedge \dots \wedge g_k$

$$(f, g)_{\Lambda^k V} = \det((f_i, g_j)_{V^*}).$$

Обозначим через M_n^k множество всех мультииндексов вида $I = (i_1, \dots, i_k)$, $i_j \in \{1, \dots, n\}$, $i_j < i_l$ при $j < l$. Для произвольного набора векторов $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in V$, и мультииндекса $I = (i_1, \dots, i_k)$ положим $a_I = a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_k}$. Если $(e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис пространства V, то $(e_I : I \in M_n^k)$ — ортонормированный базис пространства $\Lambda_k V$. Аналогично если $(f_1, \dots, f_n)$ — ортонормированный базис пространства V^*, то $\big(f_I : I \in M_n^k\big)$ — ортонормированный базис пространства $\Lambda^k V$.

Для произвольного линейного функционала F на $\Lambda_k V$ функция ω_F на V^k, заданная формулой $\omega_F(a_1, \dots, a_k) = F(a_1 \wedge \dots \wedge a_k)$, является k-формой над V. Соответствие $F \mapsto \omega_F$ задает изоморфизм $(\Lambda_k V)^* \cong \Lambda^k V$. В дальнейшем, используя этот изоморфизм, будем отождествлять пространства $(\Lambda_k V)^*$ и $\Lambda^k V$.

Для произвольных k-вектора a над V и k-формы ω над V определены их модули $|a| = (a, a)_{\Lambda_k V}^{1/2}$ и $|\omega| = (\omega, \omega)_{\Lambda^k V}^{1/2}$. Если $\omega \in \Lambda^k V$, $(e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис пространства V, то

$$|\omega|^2 = \sum_{I \in M_n^k} (\omega(e_I))^2. \tag{1}$$

Произвольное линейное отображение $f : V \to V'$ евклидовых пространств порождает линейные отображения $\Lambda_k f : \Lambda_k V \to \Lambda_k V'$ и $\Lambda^k f : \Lambda^k V' \to \Lambda^k V$. Обозначим через $\theta_k(f)$ норму оператора $\Lambda_k f$. Отметим, что $\theta_k(f)$ является и нормой оператора $\Lambda^k f$, поскольку оператор $\Lambda^k f$ сопряжен к $\Lambda_k f$.

Лемма 1. *Для любого обратимого линейного отображения $f : V_1 \to V_2$ n-мерных евклидовых пространств имеет место равенство $\theta_k(f) = \theta_n(f)\theta_{n-k}(f^{-1})$.*

Доказательство. Для отображения f существует биортогональный базис пространства V_1, т. е. такой ортонормированный базис $(e_1, \dots, e_n)$ пространства V_1, для которого векторы $f(e_1), \dots, f(e_n)$ попарно ортогональны. Пусть $\lambda_i = |\Lambda_k f(e_i)|$ и $\lambda_I = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$ для любого мультииндекса $I = (i_1, \dots, i_k) \in M_n^k$. Базис $\big(e_I : I \in M_n^k\big)$ биортогонален для $\Lambda_k f$, причем $\lambda_I = |\Lambda_k f(e_I)|$. Поэтому $\theta_k(f) = \max\big(\lambda_I : I \in M_n^k\big)$ и, в частности, $\theta_n(f) = \lambda_1 \dots \lambda_n$. Базис $\big(\frac{1}{\lambda_1} f(e_1), \dots, \frac{1}{\lambda_n} f(e_n)\big)$ биортогонален для f^{-1}. Поэтому

$$\theta_{n-k}(f^{-1}) = \max\left(\frac{1}{\lambda_J} : J \in M_n^{n-k}\right) = \max\left(\frac{\lambda_I}{\lambda_1 \dots \lambda_n} : I \in M_n^k\right) = \theta_n(f)\theta_n(f^{-1}).$$

Лемма доказана.

2. Пространства дифференциальных форм

Пусть (M,g) — гладкое n-мерное ориентируемое риманово многообразие, TM — его касательное расслоение. Сечения векторного расслоения $\Lambda^k TM$ называются *дифференциальными k-формами* на M. Векторное пространство $\mathscr{D}^k(M)$ образовано по определению всеми C^∞-гладкими дифференциальными k-формами на M, имеющими компактные носители, лежащие в $\operatorname{int} M$, $L^k_{1,\mathrm{loc}}(M)$ — пространство всех дифференциальных k-форм на M, координатные представления которых в локальных картах многообразия M имеют коэффициенты класса $L_{1,\mathrm{loc}}(M)$. Будем говорить, что форма $\omega \in L^k_{1,\mathrm{loc}}(M)$ *имеет* (*обобщенный*) *дифференциал* $d\omega \in L^{k+1}_{1,\mathrm{loc}}(M)$, если для любой формы $u \in \mathscr{D}^{n-k-1}(M)$ выполняется равенство

$$\int\limits_M \omega \wedge du = (-1)^{k+1} \int\limits_M d\omega \wedge u,$$

где du — обычный дифференциал гладкой формы u.

Слой T_xM над точкой $x \in M$ расслоения TM, снабженный скалярным произведением, соответствующим римановой метрике g, будем обозначать через $T_x(M,g)$. Значение $\omega(x)$ произвольной k-формы на M принадлежит евклидову пространству $\Lambda^k T_x(M,g)$. Поэтому для любой точки $x \in M$ и k-формы ω на M определен модуль $|\omega(x)|_g$ значения формы ω в точке x.

Для произвольных непрерывной строго положительной функции r на M, числа $p \in [1,\infty)$ и формы $\omega \in L^k_{1,\mathrm{loc}}(M)$ положим

$$\|\omega\|_{p,r,g} = \biggl(\int\limits_M |\omega|_g^p r^p \, dv_g\biggr)^{1/p},$$

где dv_g — элемент объема риманова многообразия (M,g).

Пусть $L^k_p(M,g,r)$ — пространство тех форм на M, для которых $\|\omega\|_{p,r,g} < \infty$. Это пространство считается снабженным нормой $\|\cdot\|_{p,r,g}$, относительно которой оно является банаховым пространством.

Условимся опускать символы g и r в обозначениях типа $T_x(M,g)$, $L^k_p(M,g,r)$, $\|\omega\|_{p,r,g}$ в тех случаях, когда из контекста ясно, о какой весовой функции r или римановой метрике g идет речь.

Пусть на многообразии (M,g) задана пара весовых функций $r = (r_k, r_{k+1})$. Обозначим через $W^k_p(M,r)$ банахово пространство, образованное теми формами $\omega \in L^k_p(M,r_k)$, которые имеют дифференциал $d\omega \in L^{k+1}_p(M,r_k)$. Норма в этом пространстве определена формулой $\|\omega\|_{p,r} = (\|\omega\|^p_{p,r_k} + \|d\omega\|^p_{p,r_{k+1}})^{1/p}$.

Для замкнутого в M множества A обозначим через $W^k_p(M,A,r)$ замыкание в $W^k_p(M,r)$ подпространства, образованного всеми теми формами из $W^k_p(M,r)$, носители которых лежат в $M \setminus A$. Будем использовать обозначение $d^k_{(M,A)}$ для оператора внешнего дифференцирования, действующего из $L^k_p(M,r_k)$ в $L^{k+1}_p(M,r_k)$, с областью задания $W^k_p(M,A,r)$.

3. Цилиндрические многообразия

Пусть Y — гладкое n-мерное ориентируемое многообразие, $[a,b)$ — полуинтервал вещественной прямой, $-\infty < a < b \le \infty$, $X = [a,b) \times Y$, $\psi : X \to Y$,

$\tau : X \to [a,b)$, $i_t : Y \to X$, $i_y : [a,b) \to X$ — отображения, заданные формулами $\psi(t,y) = y$, $\tau(t,y) = t$, $i_t(y) = i_y(t) = (t,y)$. Для каждой точки $(t,y) \in X$ определим вектор $\nu(t,y) \in T_{(t,y)}X$, полагая

$$\nu(t,y) = di_y(t)(\mathbf{1}),$$

где $di_y(t)$ — дифференциал отображения i_y в точке t, а $\mathbf{1}$ — вектор длины 1, касательный к $[a,b)$ в точке t.

В дальнейшем будем предполагать, что на Y задана риманова метрика h, а на X — риманова метрика g. Кроме метрики h на Y будем рассматривать еще семейство метрик $g_t, t \in [a,b)$, для каждой из которых вложение $i_t : (Y, g_t) \to (X, g)$ является изометрическим вложением.

Положим $\theta_k(t,y) = \theta_k(\phi)$, где $\phi : T_y(Y,h) \to T_y(Y,g_t)$ — тождественное отображение. В силу леммы 1

$$\theta_k^{-1}(t,y)|\omega(y)|_h \le |\omega(y)|_{g_t} \le \theta_n^{-1}(t,y)\theta_{n-k}(t,y)|\omega(y)|_h \tag{2}$$

для любой k-формы ω на многообразии Y.

Пусть $e_0 \in T_{(t,y)}(X,g)$ — вектор, ортогональный к подпространству $di_t(T_yY)$, $|e_0|_g = 1$, $u = u(t,y) = (\nu, e_0)_g$.

Лемма 2. *Для произвольной измеримой неотрицательной функции f на X*

$$\int\limits_X f\,dv_g = \int\limits_Y \int\limits_a^b f(t,y)u(t,y)\theta_n(t,y)\,dtdv_h. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $(X,\tilde h)$ — произведение риманова многообразия (Y,h) на полуинтервал $[a,b)$, снабженный стандартной метрикой, $\phi : T_y(X,\tilde h) \to T_y(X,g)$ — тождественное отображение. Тогда $dv_g = \theta_{n+1}(\phi)\,dv_{\tilde h}$. Пусть a — n-вектор из $\Lambda_n T_y(Y,h)$ такой, что $|a|_h = 1$, и a' — образ этого n-вектора при вложении $\Lambda_n\,di_t(y) : \Lambda_n T_yY \to \Lambda_n T_{(t,y)}X$. Тогда $|\nu \wedge a'|_{\tilde h} = 1$ и поэтому

$$\theta_{n+1}(\phi) = |\nu \wedge a'|_g = |u||e_0 \wedge a'|_g = |u||a|_{g_t} = |u|\theta_n.$$

По теореме Фубини

$$\int\limits_X f\,dv_g = \int\limits_X f|u|\theta_n\,dv_{\tilde h} = \int\limits_Y \int\limits_a^b f(t,y)u(t,y)\theta_n(t,y)\,dtdv_h.$$

Лемма доказана.

4. Оператор гомотопии

Для произвольной $(k+1)$-формы ω на X и каждого $t \in [a,b)$ определим k-форму ω_t на Y следующим образом:

$$\omega_t(y)(a_1,\dots,a_k) = \omega(t,y)(\nu, di_t(y)a_1,\dots,di_t(y)a_k).$$

Для произвольной непрерывной $(k+1)$-формы ω на X определим k-форму $S_a\omega$, полагая

$$S_a\omega(t,y)(a_1,\dots,a_k) = \int\limits_a^t \omega_s(y)(d\psi(s,y)a_1,\dots,d\psi(s,y)a_k)\,ds.$$

Для описания координатных представлений форм ω_t и $S_a\omega$ удобно использовать локальные системы координат на многообразии X, согласованные с представлением этого многообразия в виде произведения $[a,b)\times Y$. А именно, локальную систему координат, заданную на открытом в X множестве $[a,b)\times U$, назовем *цилиндрической*, если она имеет вид $(\tau, y_1,\dots,y_n)$, где $(y_1,\dots,y_n)$ — локальная система координат многообразия Y, заданная на множестве U.

Пусть $\omega=\sum\limits_I \alpha_I dy^I+\sum\limits_J \beta_J d\tau\wedge dy^J$ — координатное представление формы ω в цилиндрической локальной системе координат на многообразии X. Тогда

$$\omega_t=\sum_J \beta_J\,dy^J,\quad S_a\omega=\sum_J\left(\int\limits_a^t \beta_J(s,y)\,ds\right)dy^J.$$

Используя эти локальные координатные представления, легко проверить, что формы ω_t и $S_a\omega$ непрерывны для произвольной непрерывной формы ω и гладкие для гладкой формы ω. Кроме того, для любой гладкой формы ω выполнена формула гомотопии

$$dS_a\omega+S_a d\omega=\omega-\psi^* i_a^*\omega.$$

Дифференциальную форму α на многообразии $X=[a,b)\times Y$ назовем *цилиндрической*, если для каждой точки $(t,y)\in X$ выполнено равенство $(i_t\circ\psi)^*\alpha(t,y)=\alpha(t,y)$.

Дифференциальная форма ω цилиндрическая, если ее координатное представление в цилиндрических локальных системах координат не содержит членов вида $\beta_J\,d\tau\wedge dy^J$.

Лемма 3. *Для любой цилиндрической формы α на X справедлива оценка*

$$|\alpha(t,y)|_g\le|\nu|\cdot|u|^{-1}|i_t^*\alpha(y)|_{g_t}. \tag{4}$$

Если α — 0-форма, то

$$|\alpha(t,y)|_g=|i_t^*\alpha(y)|_{g_t}. \tag{4$'$}$$

Доказательство. Пусть α — цилиндрическая k-форма на многообразии X, $(t,y)\in X$. Выберем ортонормированный базис $(e_1',\dots,e_n')$ пространства $T_y(Y,g_t)$ такой, что вектор $\nu(t,u)$ принадлежит плоскости векторов e_0 и $di_t(y)e_1'$. Пусть $e_i=di_t(y)e_i'$. Тогда $(e_0,\dots,e_n)$ — ортонормированный базис пространства $T_{(t,y)}(X,g)$ и $\nu=ue_0+ve_1$. Так как форма α цилиндрическая, то для любого $(k-1)$-вектора $a\in\wedge^{k-1}T_{(t,y)}(X,g)$ имеем $\alpha(\nu\wedge a)=0$ и, следовательно, $\alpha(e_0\wedge a)=-\frac{v}{u}\alpha(e_1\wedge a)$.

Обозначим через $M_{l,n}^k$ множество таких мультииндексов $I=(i_1,\dots,i_k)$ из M_n^k, для которых $i_1\ge l$. Используя (1) при $k>0$, заключаем, что

$$\begin{aligned}|\alpha(t,y)|_g^2&=\sum_{I\in M_{2,n}^{k-2}}(\alpha(e_0\wedge e_1\wedge e_I))^2+\sum_{I\in M_{2,n}^{k-1}}((\alpha(e_0\wedge e_I))^2+(\alpha(e_1\wedge e_I))^2)\\&+\sum_{I\in M_{2,n}^{k}}(\alpha(e_I))^2=\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)\sum_{I\in M_{2,n}^{k-1}}(\alpha(e_1\wedge e_I))^2+\sum_{I\in M_{2,n}^{k}}(\alpha(e_I))^2\\&\le\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)\sum_{I\in M_{n}^{k}}(\alpha(e_I))^2=\frac{|\nu|^2}{u^2}|i_t^*\alpha(y)|_{g_t}^2.\end{aligned}$$

В случае $k=0$ равенство $\alpha(t,y)=i_t^*\alpha(y)$ очевидно. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любых $(k+1)$-формы ω на X и $(t,y)\in X$ справедлива оценка*
$$|\omega_t(y)|_{g_t} \le |\nu(t,y)|\cdot|\omega(t,y)|_g. \tag{5}$$
Кроме того, если $k=n$, то
$$|\omega_t(y)|_{g_t} = |u|\cdot|\omega(t,y)|_g. \tag{5$'$}$$

Доказательство. Пусть $(e_0,\dots,e_n)$ — ортонормированный базис пространства $T_{(t,y)}(X,g)$ такой, как в доказательстве леммы 3. Тогда
$$\begin{aligned}|\omega_t|^2_{g_t} &= \sum_{I\in M_n^k}(\omega(\nu\wedge e_I))^2\\ &= \sum_{I\in M_{2,n}^{k-1}} u^2(\omega(e_0\wedge e_1\wedge e_I))^2 + \sum_{I\in M_{2,n}^k}(u\omega(e_0\wedge e_I)+v\omega(e_1\wedge e_I))^2\end{aligned}$$
$$\le (u^2+v^2)\Big[\sum_{I\in M_{2,n}^{k-1}}(\omega(e_0\wedge e_1\wedge e_I))^2+\sum_{I\in M_{2,n}^k}((\omega(e_0\wedge e_I))^2+(\omega(e_1\wedge e_I))^2)\Big]\le|\nu|^2|\omega|^2_g.$$
Если $k=n$, то
$$|\omega_t|_{g_t} = |\omega(\nu\wedge e_1\wedge\dots\wedge e_n)| = |u|\,|\omega(e_0\wedge e_1\wedge\dots\wedge e_n)| = |u|\,|\omega|_g.$$
Лемма доказана.

Лемма 5 (неравенство Харди). *Пусть ρ и σ — две весовые функции на интервале (a,b) вещественной прямой, $1<p<\infty$, $\frac1p+\frac1{p'}=1$, $\alpha,\beta\in[a,b]$,*
$$\chi=\chi_\alpha^\beta(p,\rho,\sigma)=\sup_{\tau\in(\alpha,\beta)}\left(\int_\tau^\beta \rho^p(t)\,dt\right)^{\frac1p}\left(\int_\alpha^\tau\sigma^{-p'}(t)\,dt\right)^{\frac1{p'}}.$$
Тогда для любой локально интегрируемой функции f на (a,b) справедливо неравенство
$$\left|\int_\alpha^\beta\rho^p(t)\left|\int_\alpha^\tau f(t)\,dt\right|^p d\tau\right|^{\frac1p}\le p^{\frac1p}(p')^{\frac1{p'}}\chi\left|\int_\alpha^\beta\sigma^p(\tau)|f(\tau)|^p\,d\tau\right|^{\frac1p}.$$

Лемма 6. *Пусть $r=(r_k,r_{k+1})$ — две весовые функции на X, $\rho_k=\theta_n^{-\frac1{p'}}\cdot\theta_{n-k}|\nu|\,|u|^{-\frac1{p'}}r_k$ при $k>0$, $\rho_0=\theta_n^{\frac1p}|u|^{\frac1p}r_0$, $\sigma_k=\theta_n^{\frac1p}\theta_k^{-1}|\nu|^{-1}|u|^{\frac1p}r_{k+1}$ при $k<n$, $\sigma_n=\theta_n^{-\frac1{p'}}|u|^{-\frac1{p'}}r_{n+1}$, $H=H_a^b(k,p,r)=p^{\frac1p}(p')^{\frac1{p'}}\sup_{y\in Y}\chi_a^b(p,\rho_k,\sigma_k)$. Тогда для любой непрерывной $(k+1)$-формы ω на (X,g) справедлива оценка*
$$\|S_a\omega\|_{p,r_k}\le H_a^b(k,p,r)\|\omega\|_{p,r_{k+1}}. \tag{6}$$

Доказательство. Форма $S_a\omega$ цилиндрическая. Для $0<k<n$, используя последовательно (3), (4), (2), неравенство Харди, (3), (5), получаем
$$\|S_a\omega\|^p_{p,r_k}=\int_X|S_a\omega|^p_g r_k^p\,dv_g=\int_Y\int_a^b|S_a\omega|^p_g r_k^p u\theta_n\,dt dv_h$$

$$\le \int\limits_Y \int\limits_a^b \left| \int\limits_a^t \omega_s \, ds \right|_{g_t}^p |u|^{1-p} |\nu|^p \theta_n r_k^p \, dt dv_h$$

$$\le \int\limits_Y \int\limits_a^b \left| \int\limits_a^t \omega_s \, ds \right|_h^p |u|^{1-p} |\nu|^p \theta_n^{1-p} \theta_{n-k}^p r_k^p \, dt dv_h \le \int\limits_Y \int\limits_a^b \left| \int\limits_a^t |\omega_s|_h \, ds \right|^p \rho_k^p \, dt dv_h$$

$$\le H^p \int\limits_Y \int\limits_a^b |\omega_t|_h^p \sigma_k^p \, dt dv_h \le H^p \int\limits_Y \int\limits_a^b |\omega_t|_{g_t}^p \theta_k^p \sigma_k^p \, dt dv_h$$

$$= H^p \int\limits_X |\omega_t|_{g_t}^p \theta_k^p \sigma_k^p |u|^{-1} \theta_n^{-1} \, dv_g = H^p \int\limits_X |\omega|_g^p r_{k+1} \, dv_g = H^p \|\omega\|_{p,r_{k+1}}^p.$$

В случае $0 < k < n$ лемма доказана. В случаях $k = 0$ и $k = n$ доказательство остается прежним с заменой (4) на (4′) в случае $k = 0$ и (5) на (5′) в случае $k = n$. Лемма доказана.

Если $H_a^b(k,p,r) < \infty$, то в силу оценки (6) существует единственный ограниченный оператор $S_a : L_p^{k+1}(X, r_{k+1}) \to L_p^k(X, r_k)$, значение которого на каждой непрерывной форме $\omega \in L_p^{k+1}(X, r_{k+1})$ совпадает с ранее определенной формой $S_a\omega$. При этом $\|S_a\| \le H_a^b(k,p,r)$.

Лемма 7. *Если $H_b^a(k,p,r) < \infty$, то $dS_a d\omega = d\omega$ для любой формы $\omega \in W_p^k(X, \{a\} \times Y, r)$.*

Доказательство. Пусть $\omega \in W_p^k(X, \{a\} \times Y, r)$. Используя процедуру регуляризации дифференциальных форм [3, 4], найдем последовательность гладких форм ω_i, имеющих носители в $(a,b) \times Y$, сходящуюся в $W_p^k(X, \{a\} \times Y, r)$ к форме ω. Для каждого i по формуле гомотопии $dS_a d\omega_i = d\omega_i$. Так как $d\omega_i \to d\omega$ в $L_p^{k+1}(X, r_{k+1})$ и оператор $S_a : L_p^{k+1}(X, r_{k+1}) \to L_p^k(X, r_k)$ непрерывен, то $S_a d\omega_i \to S_a d\omega$ в $L_p^k(X, r_k)$. Кроме того, $dS_a d\omega_i \to d\omega$ в $L_p^{k+1}(X, r_{k+1})$. Следовательно, $S_a d\omega \in W_p^k(X, r_k)$ и $dS_a d\omega = d\omega$. Лемма доказана.

5. Нормальная и компактная разрешимость оператора внешнего дифференцирования

Пусть E, F — банаховы пространства, $A : E \to F$ — произвольный замкнутый оператор. Оператор $\widetilde{A} : E/\ker A \to F$ определен следующими условиями: $\widetilde{A} \circ \pi = A$, $\operatorname{Dom} \widetilde{A} = \pi(\operatorname{Dom} A)$, где $\pi : E \to E/\ker A$ — каноническая проекция.

Оператор A называется *нормально* (*компактно*) *разрешимым*, если оператор $(\widetilde{A})^{-1}$ ограничен (компактен).

Отметим, что оператор A нормально разрешим тогда и только тогда, когда подпространство $\operatorname{Im} A = \operatorname{Dom}(\widetilde{A})^{-1}$ замкнуто в F.

Лемма 8 [1]. *Пусть M — гладкое риманово многообразие, край ∂M которого компактен, $r = (r_k, r_{k+1})$ — две весовые функции на M. Тогда оператор $d_M^k : L_p^k(M, r_k) \to L_p^{k+1}(M, r_{k+1})$ компактно разрешим, если выполнено следующее условие: для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset M$, что для любой формы $\omega \in W_p^k(M, r)$, носитель которой содержится в $M \setminus K$, существует такая форма $\varphi \in W_p^k(M, r)$, что $d\varphi = d\omega$ и $\|\varphi\|_{p,r_k} \le \varepsilon \|d\omega\|_{p,r_{k+1}}$.*

Пусть риманово $(n+1)$-мерное многообразие M представлено как объединение двух замкнутых множеств M_1 и M_2, причем $M_1 \cap M_2$ — n-мерное гладкое компактное подмногообразие многообразия M и $M_1 \cap M_2 \subset \operatorname{int} M$.

Лемма 9. *Оператор d^k_M нормально (компактно) разрешим тогда и только тогда, когда нормально (компактно) разрешимы операторы $d^k_{M_1}$ и $d^k_{M_2}$.*

Доказательство. Утверждение леммы о компактной разрешимости доказано в работе [5]. В случае нормальной разрешимости воспользуемся следующим результатом из [5, теорема 2]. Пусть $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ — точная последовательность коцепных комплексов банаховых пространств,

$$\dots \to H^kC \xrightarrow{\delta^k} H^{k+1}A \xrightarrow{H^{k+1}\varphi} H^{k+1}B \xrightarrow{H^{k+1}\psi} H^{k+1}C \xrightarrow{\delta^{k+1}} \dots$$

— ее точная последовательность пространств когомологий. Тогда

1) дифференциал d^k_B комплекса B нормально разрешим, если нормально разрешим дифференциал d^k_C и подпространство $\operatorname{Im}\delta^k$ замкнуто в $H^{k+1}A$,

2) дифференциал d^k_C нормально разрешим, если нормально разрешим дифференциал d^{k+1}_A и подпространство $\operatorname{Im} H^{k+1}\varphi$ замкнуто в $H^{k+1}B$,

3) дифференциал d^k_A нормально разрешим, если нормально разрешим дифференциал d^k_B и подпространство $\operatorname{Im} H^k\psi$ замкнуто в H^kC.

Пусть $M_0 = M_1 \cap M_2$ и $h : [-1,1] \times M_0 \to M$ — какой-нибудь гладкий воротник подмногообразия M_0 в M, $h([-1,0] \times M_0) \subset M_1$, $h([0,1] \times M_0) \subset M_2$. Рассмотрим многообразия $\widetilde{M}_0 = h\big(\big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big] \times M_0\big)$, $\widetilde{M}_1 = M_1 \backslash h\big(\big(-\frac{1}{2}, 0\big] \times M_0\big)$, $\widetilde{M}_2 = M_2 \backslash h\big(\big[0, \frac{1}{2}\big) \times M_0\big)$, $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \cup \widetilde{M}_2$ и коцепные комплексы $A = (W_p(\widetilde{M}_0, \partial\widetilde{M}_0), d_{\widetilde{M}_0})$, $B = (W_p(M), d_M)$, $C = (W_p(\widetilde{M}), d_{\widetilde{M}})$. Пусть φ — оператор продления форм нулем с $\widetilde{M}_0$ на M, ψ — оператор ограничения форм с M на $\widetilde{M}$. Последовательность коцепных комплексов $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ точна [5].

Используя воротник h, легко построить билипшицев диффеоморфизм многообразий M_1 и $\widetilde{M}_1$, тождественный вне компакта $h([-1,0] \times M_0)$. Существование такого диффеоморфизма позволяет заключить, что операторы $d^k_{M_1}$ и $d^k_{\widetilde{M}_1}$ нормально разрешимы одновременно. Аналогично одновременно нормально разрешимы операторы $d^k_{M_2}$ и $d^k_{\widetilde{M}_2}$.

Пусть операторы $d^k_{M_1}$ и $d^k_{M_2}$ нормально разрешимы. Тогда нормально разрешим оператор $d^k_C = d^k_{\widetilde{M}}$. Поскольку многообразие $\widetilde{M}_0$ компактно, то пространство $H^{k+1}A$ отделимо и конечномерно [6, предложение 2]. Всякое линейное подпространство такого пространства замкнуто. В частности, замкнуто подпространство $\operatorname{Im}\delta^k$. По теореме 2 работы [5] оператор $d^k_B = d^k_M$ нормально разрешим.

Предположим теперь, что нормально разрешим оператор d^k_M. Тогда пространство $H^{k+1}B$ отделимо и поэтому его конечномерное подпространство $\operatorname{Im} H^{k+1}\varphi$ замкнуто. Поскольку пространство $H^{k+1}A$ отделимо, оператор d^k_A нормально разрешим. По теореме 2 работы [5] оператор $d^k_{\widetilde{M}} = d^k_C$ нормально разрешим, а вместе с ним нормально разрешимы операторы $d^k_{M_1}$ и $d^k_{M_2}$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть N — объединение конечного числа компактных компонент связности края ∂M многообразия M. Тогда операторы d^k_M и $d^k_{(M,N)}$ нормально (компактно) разрешимы одновременно.*

Доказательство. Утверждение леммы о компактной разрешимости установлено в [5]. Рассмотрим случай нормальной разрешимости. Пусть $h : [0,1]\times N \to M$ — гладкий воротник многообразия N в M. Положим $M_1 = M\setminus h\big([0,\frac{1}{2})\times N\big)$, $M_2 = h\big([0,\frac{1}{2}]\times N\big)$, $M_0 = M_1\cap M_2 = h\big(\{\frac{1}{2}\}\times N\big)$. Рассмотрим комплексы $A = W_p(M_1, M_0)$, $B = W_p(M)$, $C = W_p(M_2)$. Пусть φ — оператор продления форм нулем с M_1 на M, ψ — оператор ограничения форм с M на M_2. Последовательность комплексов $0\to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ точна. В силу компактности многообразия M_2 оператор d^k_C нормально разрешим, а пространство H^k_C конечномерно. Если оператор d^k_A нормально разрешим, то пространство H^{k+1}_A отделимо. В этом случае подпространство $\operatorname{Im}\delta^k$ замкнуто в H^{k+1}_A как всякое конечномерное подпространство отделимого векторного топологического пространства. По теореме 2 работы [5] оператор d^k_B нормально разрешим.

Подпространство $\operatorname{Im} H^k\psi$ замкнуто в H^k_C. По теореме 2 работы [5] оператор d^k_A нормально разрешим, если нормально разрешим оператор d^k_B. Операторы d^k_A и $d^k_{(M,N)}$ нормально разрешимы одновременно, поскольку существует билипшицев диффеоморфизм многообразий M и M_1, тождественный вне компакта $h([0,1]\times N)$ и переводящий N на M_0. Лемма доказана.

6. Основная теорема

Обозначим через $d^k_{M,c} : L^k_p(M, r_k) \to L^{k+1}_p(M, r_{k+1})$ оператор, заданный следующими условиями: $\operatorname{Dom} d_{M,c} = \overline{D^k(M)}$ — замыкание в $W^k_p(M,r)$ подпространства $D^k(M)$, $d^k_{M,c}\omega = d^k\omega$ для каждой формы $\omega\in\overline{D^k(M)}$.

Теорема 1. *Пусть Y — компактное ориентируемое гладкое многообразие без края, $X = [a,b)\times Y$, $-\infty < a < b \le \infty$, g и h — произвольные римановы метрики на многообразиях X и Y соответственно, $r = (r_k, r_{k+1})$ — две непрерывные строго положительные функции на X, $p\in(1,\infty)$. Тогда*

1) *оператор $d^k_X : L^k_p(X, r_k) \to L^{k+1}_p(X, r_{k+1})$ нормально разрешим, если $H^b_a(k,p,r) < \infty$,*

2) *оператор d^k_X компактно разрешим, если $H^b_{a'}(k,p,r)\to 0$ при $a'\to b$,*

3) *оператор $d^k_{X,c} : L^k_p(X, r_k) \to L^{k+1}_p(X, r_{k+1})$ нормально разрешим, если $H^a_b(k,p,r) < \infty$,*

4) *оператор $d^k_{X,c}$ компактно разрешим, если $H^{a'}_b(k,p,r)\to 0$ при $a'\to b$.*

Доказательство. Пусть $H^b_a(k,p,r) < \infty$. Тогда для каждой формы $\omega\in W^k_p(X,\partial X, r)$ по лемме 7 $dS_a d\omega = d\omega$, а по лемме 6

$$\|S_a d\omega\|_{p,r_k} \le H^b_a(k,p,r)\|d\omega\|_{p,r_{k+1}}.$$

Поэтому

$$\|(\tilde d^k_{(X,\partial X)})^{-1}\| \le H^b_a(k,p,r) < \infty.$$

Оператор $d^k_{(X,\partial X)}$ нормально разрешим. По лемме 10 нормально разрешим оператор d^k_X.

Предположим теперь, что $H^b_{a'}(k,p,r)\to 0$ при $a'\to b$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем $a'\in(a,b)$ так, что $H^b_{a'}(k,p,r) < \varepsilon$. Для произвольной формы $\omega\in W^k_p(X, [a,a']\times Y, r)$ рассмотрим форму φ, равную $S_{a'}d\omega$ на $[a',b]\times Y$ и 0 на $[a,a']\times Y$. По лемме 7 $d\varphi = d\omega$, а по лемме 6 $\|\varphi\|_{p,r_k} < \varepsilon\|d\omega\|_{p,r_{k+1}}$. По лемме 8 оператор d^k_X компактно разрешим.

Два первых утверждения теоремы доказаны. Покажем, что два другие утверждения следуют из доказанных по соображениям двойственности.

Каждой форме $\omega \in L_p^k(X, r_k)$ соответствует непрерывный линейный функционал $F(\omega)$ на пространстве $L_{p'}^{n+1-k}(X, r_k^{-1})$, заданный формулой

$$F(\omega)u = \int\limits_X \omega \wedge u, \quad u \in L_{p'}^{n+1-k}(X, r_k^{-1}).$$

Отображение $F : L_p^k(X, r_k) \to \left(L_{p'}^{n+1-k}(X, r_k^{-1})\right)^*$ является топологическим изоморфизмом банаховых пространств и $d_{X,c}^k = (-1)^{k+1} F^{-1} \circ \left(d_X^{n-k}\right)^* \circ F$. Оператор $\left(d_X^{n-k}\right)^*$, сопряженный к оператору d_X^{n-k}, нормально (компактно) разрешим тогда и только тогда, когда нормально (компактно) разрешим оператор d_X^{n-k} [1, 7]). Поэтому оператор $d_{X,c}^k : L_p^k(X, r_k) \to L_p^{k+1}(X, r_{k+1})$ нормально (компактно) разрешим тогда и только тогда, когда нормально (компактно) разрешим оператор $d_X^{n-k} : L_{p'}^{n-k}(X, r_{k+1}^{-1}) \to L_{p'}^{n+1-k}(X, r_k^{-1})$. По доказанной части теоремы оператор d_X^{n-k} нормально разрешим, если $H_a^b(n-k, p', r_{k+1}^{-1}, r_k^{-1}) < \infty$, и компактно разрешим, если $H_a^b(n-k, p', r_{k+1}^{-1}, r_k^{-1}) \to 0$ при $c \to b$. Остается заметить, что $H_c^b(n-k, p', r_{k+1}^{-1}, r_k^{-1}) = H_b^c(k, p, r_k, r_{k+1})$. Теорема доказана.

Гладкое $(n+1)$-мерное многообразие M без края называется *многообразием с цилиндрическими концами*, если оно может быть представлено как объединение двух замкнутых множеств M_1 и M_2 так, что $M_1 \cap M_2$ — гладкое n-мерное подмногообразие многообразия M, M_1 компактно, а M_2 диффеоморфно дизъюнктному объединению цилиндров $[a_i, b_i) \times Y_i$. Лемма 9 позволяет на основании теоремы 1 указать достаточные условия как нормальной, так и компактной разрешимости операторов внешнего дифференцирования d_M и $d_{M,c}$ на римановом многообразии M с цилиндрическими концами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 573–590.
2. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
3. *Gaffney M. P.* A special Stokes's theorem for complete Riemannian manifolds // Ann. Math. 1954. V. 60, N 1. P. 140–145.
4. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Об одном свойстве операторов регуляризации де Рама // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 2. С. 104–111.
5. *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Гомологические аспекты теории банаховых комплексов // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 893–904.
6. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* L_p-когомологии римановых многообразий // Исследования по геометрии и математическому анализу. Новосибирск: Наука, 1987. С. 101–116. (Тр. Ин-та математики/АН СССР. Сиб. отд-ние; Т. 7).
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 10 января 2007 г.

Кузьминов Владимир Иванович, Шведов Игорь Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kuzminov@math.nsc.ru, shvedov@math.nsc.ru