Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 512.54

X–ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПОДГРУППЫ

В. Го, А. Н. Скиба, К. П. Шам

Аннотация: Пусть A, B — подгруппы группы G и $\varnothing \neq X \subseteq G$. Говорят, что A *X-перестановочна с* B, если найдется такой элемент $x \in X$, что $AB^x = B^x A$. С использованием этого понятия даны новые характеризации классов конечных разрешимых, сверхразрешимых и нильпотентных групп.

Ключевые слова: силовская подгруппа, добавление к подгруппе, максимальная подгруппа, нильпотентная группа, сверхразрешимая группа, разрешимая группа, X-перестановочная подгруппа.

1. Введение

Напомним, что подгруппа A группы G называется *перестановочной с подгруппой* B, если $AB = BA$. Если A перестановочна со всеми подгруппами из G, то A называется *перестановочной* [1] или *квазинормальной* [2] *подгруппой* в G.

Перестановочные подгруппы имеют ряд интересных свойств. Так, например, если H — перестановочная подгруппа в некоторой конечно порожденной группе G, то H субнормальна в G [3]. Этот результат является обобщением теоремы Оре [2]: *каждая перестановочная подгруппа конечной группы субнормальна.* В другом направлении результат Оре усилили Ито и Сеп. Они доказали [4], что для каждой перестановочной подгруппы H конечной группы G фактор-группа H/H_G нильпотентна. В дальнейшем Майер и Шмид доказали [5], что при таких условиях верно даже, что $H/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$.

В работах Кегеля [6] и Дескинза [7] показано, что подгруппы H, перестановочные со всеми силовскими подгруппами конечной группы G, наследуют ряд ключевых свойств перестановочных подгрупп. В частности, H по-прежнему субнормальна, а секция H/H_G нильпотентна. Если к тому же G разрешима и H перестановочна с системными нормализаторами группы G, то верно $H/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$ [8]. После работ [6, 7] многими авторами предпринимались попытки исследования и применений и других типов обобщенно перестановочных подгрупп. Здесь прежде всего отметим работы [9–11], где рассматривались m-перестановочные подгруппы [11], т. е. подгруппы, перестановочные со всеми максимальными подгруппами, и [12–15], где исследовалось влияние на строение группы систем полунормальных подгрупп, т. е. подгрупп H, перестановочных со всеми подгруппами из некоторого добавления к H [12].

Часто встречается ситуация, когда подгруппы A и B группы G не являются перестановочными, но в G имеется такой элемент x, для которого имеет место $AB^x = B^x A$.

Рассмотрим несколько типичных ситуаций такого рода.

1. Если $G = AB$ — конечная группа, A_p и B_p — силовские p-подгруппы в A и в B соответственно, то в общем случае $A_p B_p \neq B_p A_p$, но G имеет такой элемент x, что $A_p B_p^x = B_p^x A_p$.

2. Если P и Q — холловские подгруппы конечной разрешимой группы G, то для некоторого $x \in G$ имеем $PQ^x = Q^xP$.

3. Если M — максимальная подгруппа в G и $|G : M| = p^a$ для некоторого простого p, то для каждой силовской подгруппы P из G в G имеется такой элемент x, что $MP^x = P^xM$.

4. Если A и B — нормально погруженные подгруппы конечной разрешимой группы G (см. [1, I, определение (7.1)]), то согласно [1, I, (17.10)] A перестановочна с некоторым B^x.

При анализе ситуаций подобного рода удобно пользоваться следующими естественными определениями [16, 17].

Определение 1.1. Пусть A, B — подгруппы группы G и $\varnothing \neq X \subseteq G$. Тогда будем говорить, что

(1) A — *X-перестановочная* с B подгруппа, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in X$;

(2) A — *наследственно X-перестановочная* с B подгруппа, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in X \cap \langle A, B\rangle$.

Заметим, что 1-перестановочные подгруппы — это в точности перестановочные подгруппы. В другом предельном случае мы имеем дело с G-перестановочными подгруппами. Такие подгруппы были впервые рассмотрены в работе авторов [18], и они уже нашли ряд интересных приложений [19–22].

Определение 1.2. Подгруппа A группы G называется (*наследственно*) *X-перестановочной* в G, если A (наследственно) X-перестановочна со всеми подгруппами из G.

Значение понятия (наследственной) X-перестановочности связано прежде всего с тем, что многие важные классы конечных групп допускают точное описание в терминах X-перестановочных подгрупп. В данной работе мы продемонстрируем это на примере разрешимых, сверхразрешимых и нильпотентных групп.

Все рассматриваемые ниже группы конечны.

2. Примеры и общие свойства X-перестановочности

Пусть G — некоторая группа и X — подгруппа в G. Тогда справедливы следующие утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть A, B — подгруппы из G и $K \trianglelefteq G$.*

(1) *Если A (наследственно) X-перестановочна с B, то B (наследственно) X-перестановочна с A.*

(2) *Если A (наследственно) X-перестановочна с B, то A^x (наследственно) X^x-перестановочна с B^x для всех $x \in G$.*

(3) *Если A (наследственно) X-перестановочна с B, то AK/K (наследственно) XK/K-перестановочна с BK/K в G/K.*

(4) *Пусть $K \leq A$. Тогда A/K (наследственно) XK/K-перестановочна с BK/K в том и только том случае, когда A (наследственно) X-перестановочна с B.*

(5) *Если $A, B \leq M \leq G$ и A наследственно X-перестановочна с B, то A наследственно $(X \cap M)$-перестановочна с B.*

(6) *Если A (наследственно) X-перестановочна с B и $X \leq M \leq G$, то A (наследственно) M-перестановочна с B.*

(7) *Если A X-перестановочна с B и $X \leq N_G(A)$, то A перестановочна с B.*

(8) *Если F — перестановочная подгруппа группы G и A (наследственно) X-перестановочна с B, то AF (наследственно) X-перестановочна с B.*

(9) *Если $A \leq T$, где T — субнормальная подгруппа (разрешимой) группы G, и A G-перестановочна со всеми силовскими (холловскими) подгруппами из G, то A T-перестановочна с каждой силовской (холловской) подгруппой из T.*

(10) *Пусть $G = AT$ и T_1 — подгруппа группы T. Предположим, что A (наследственно) G-перестановочна с T_1. Тогда A (наследственно) T-перестановочна с T_1.*

(11) *Если A максимальна в G, T — минимальное добавление к A в G и A G-перестановочна со всеми подгруппами из T, то $T = \langle a \rangle$ — циклическая p-группа для некоторого простого числа p и $a^p \in A$.*

Доказательство. Утверждения (1)–(3) и (5)–(8) очевидны.

(4) Предположим, что A/K — (наследственно) XK/K-перестановочная с KB/K подгруппа в G/K, и пусть xK — произвольный элемент из XK/K (соответственно элемент из $(XK/K) \cap \langle A/K, KB/K \rangle$) такой, что

$$(A/K)(BK/K)^{xK} = (BK/K)^{xK}(A/K).$$

Тогда $AB^xK = AB^x = B^xA$. Ясно, что $xK = hK$ для некоторого $h \in X$, и поэтому мы можем предполагать, что $x \in X$ (соответственно $x \in X \cap \langle A, KB \rangle = X \cap \langle A, B \rangle$). Это значит, что A — (наследственно) X-перестановочная с B подгруппа в G. С другой стороны, если A — (наследственно) X-перестановочная с B подгруппа в G, то по (3) A/K (наследственно) X-перестановочна с BK/K в G/K.

(9) Пусть T_p — силовская p-подгруппа группы T и G_p — силовская подгруппа группы G, содержащая T_p. Пусть x — произвольный элемент из G такой, что $AG_p^x = G_p^xA$. Тогда AG_p^x — подгруппа в G и поэтому $AG_p^x \cap T = A(G_p^x \cap T) = (G_p^x \cap T)A$ — подгруппа в T. Но поскольку T субнормальна в G, то $G_p^x \cap T$ — силовская p-подгруппа из T. Пусть t — элемент из T такой, что $(G_p^x \cap T)^t = T_p$. Тогда

$$A(G_p^x \cap T) = AT_p^{t^{-1}} = T_p^{t^{-1}}A.$$

Аналогично можно доказать второе утверждение.

(10) Предположим, что A наследственно G-перестановочна с T_1. Тогда существует такой элемент $x \in \langle A, T_1 \rangle$, что $AT_1^x = T_1^xA$. Так как $G = AT$, то $x = at$ для некоторых $a \in A$, $t \in T$ и поэтому $AT_1^x = AatT_1t^{-1}a^{-1} = aAtT_1t^{-1}a^{-1} = a(AT_1^t)a^{-1}$ — подгруппа группы G. Значит, $AT_1^t = T_1^tA$, где $t \in T \cap \langle A, T_1 \rangle$ (поскольку $x \in \langle A, T_1 \rangle$). Следовательно, A наследственно T-перестановочна с T_1. Если A G-перестановочна с T_1, то аналогично можно показать, что A T-перестановочна с T_1.

(11) Пусть M — максимальная в T подгруппа. Тогда согласно (10) для некоторого $t \in T$ имеет место $AM^t = M^tA$. Поскольку T — минимальное добавление к A в G, то $AM \neq G$ и поэтому $AM^t \neq G$. Так как A максимальна в G, это означает, что $M^t \leq A$. Предположим, что в T имеется максимальная подгруппа M_1, которая не сопряжена с M. Тогда, как и выше, видим, что для некоторого $t_1 \in T$ имеет место $M_1^{t_1} \leq A$. Понятно, что $M^t \neq M_1^{t_1}$ и поэтому $T = \langle M^t, M_1^{t_1} \rangle \leq A$, что влечет $G = AT = A$; противоречие. Таким образом, T — циклическая примарная группа и $M \leq A$.

Лемма 2.2. *Пусть $G = AT$, где A — наследственно G-перестановочная собственная подгруппа из G и T — нильпотентная подгруппа из G. Тогда G*

имеет такой ряд

$$A = T_0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_{t-1} \leq T_t = G,$$

что $|T_i : T_{i-1}|$ *— простое число для всех* $i = 1, \ldots, t$.

Доказательство. Мы можем предположить, что $G \neq DA$ для всех собственных подгрупп D из T. Пусть T_1 — максимальная подгруппа группы T. Допустим, что $T_1 \leq A$. Поскольку T нильпотентна и $|G| = \frac{|T||A|}{|T \cap A|} = \frac{|T||A|}{|T_1|}$, то $|G : A| = |T : T_1|$ — простое число.

Пусть теперь $T_1 \nsubseteq A$. По условию для некоторого элемента $x \in G$ имеем $AT_1^x = T_1^x A$. Так как $G = AT$, то $x = ta$, где $t \in T$ и $a \in A$. Тогда $T_1^x = T_1^a$. Поскольку $T_1 \nsubseteq A^{a^{-1}} = A$, то $T_1^a \nsubseteq A$. Более того, если $T_1^a A$ является подгруппой в G, то $(T_1^a A)^{a^{-1}} = T_1 A$ — подгруппа в G. Ясно, что $T_1 A \neq G$. Предположим, что $T \cap A \nsubseteq T_1$. Тогда $T = T_1(T \cap A) \leq T_1 A$ и поэтому $G = TA \leq T_1 A$, что противоречит нашему предположению о минимальности T. Значит, $T \cap A \leq T_1$, тем самым $|T \cap A| = |T_1 \cap A|$. Следовательно,

$$|TA : T_1 A| = \frac{|T||A|}{|T \cap A|} \cdot \frac{|T_1 \cap A|}{|T_1||A|} = |T : T_1|$$

— простое число. Поскольку $|T_1 A| < |G|$ и по условию A — наследственно G-перестановочная в G подгруппа, то по выбору группы G и по лемме 2.1(5) заключаем, что $T_1 A$ имеет ряд

$$A = D_0 \leq D_1 \leq \cdots \leq D_{n-1} \leq D_n = AT_1$$

такой, что $|D_i : D_{i-1}|$ — простое число для $i = 1, \ldots, n$. Это завершает доказательство леммы.

Следующие элементарные примеры демонстрируют основное различие между X-перестановочными и перестановочными подгруппами.

Пример 2.3. Пусть $G = Z_5 \times (Z_3 Z_2)$, где $|Z_i| = i$ и $Z_3 Z_2$ — симметрическая группа S_3. Ясно, что Z_2 не является перестановочной подгруппой в G (так как $Z_2 Z_2^x \neq Z_2^x Z_2$ для всех неединичных элементов $x \in Z_3$). Но в то же время, очевидно, Z_2 — наследственно Z_3-перестановочная подгруппа в G.

Пример 2.4. Рассмотрим знакопеременные группы $A_4 \simeq D \leq A_5$. Легко видеть, что в A_5 любая ее подгруппа порядка 2 является A_5-перестановочной. С другой стороны, поскольку A_4 не является свехразрешимой группой, то всякая ее подгруппа порядка 2 не является A_4-перестановочной в A_4. Следовательно, в A_5 имеются A_5-перестановочные подгруппы, но в то же время в A_5 нет наследственно A_5-перестановочных подгрупп.

Пример 2.3 показывает, что в общем случае наследственно X-перестановочная подгруппа не является субнормальной. Тем не менее следующие наблюдения показывают, что X-перестановочные подгруппы обладают свойствами, аналогичными свойствам перестановочных подгрупп.

Предложение 2.5. *Пусть A — подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если G разрешима и A — наследственно G-перестановочная собственная подгруппа из G, то G имеет такой ряд*

$$A = T_0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_{t-1} \leq T_t = G,$$

что индекс $|T_i : T_{i-1}|$ является простым числом для всех $i = 1, \ldots, t$.

(2) *Если A G-перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G и субнормальна в G, то секция A/A_G разрешима.*

Доказательство. (1) Предположим, что это утверждение неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа в G. Поскольку G разрешима, то L абелева. Допустим, что $G = LA$. Тогда по лемме 2.2 утверждение справедливо для G, что противоречит выбору группы G. Значит, $LA \neq G$. Так как $|LA| < |G|$ и A наследственно G-перестановочна в LA по лемме 2.1(5), то по выбору группы G заключаем, что LA имеет ряд

$$A = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_{n-1} \leq T_n = LA$$

такой, что $|T_i : T_{i-1}|$ — простое число для всех $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим G/L. По лемме 2.1(3) AL/L наследственно G/L-перестановочна в G/L и поэтому G/L имеет ряд

$$AL/L = T_n/L \leq T_{n+1}/L \leq \dots \leq T_{t-1}/L \leq T_t/L = G/L$$

такой, что $|T_i/L : T_{i-1}/L| = |T_i/T_{i-1}|$ — простое число для всех $i = n+1, \dots, t$. Значит, группа G имеет ряд подгрупп

$$A = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_{t-1} \leq T_t = G$$

с простыми индексами. Это завершает доказательство утверждения (1).

(2) Ввиду леммы 2.1(4) мы можем предполагать, что $A_G = 1$ и A не является примарной группой. Пусть R — наименьшая нормальная подгруппа группы A с разрешимой фактор-группой. Ясно, что $R = R'$. Предположим, что A не является разрешимой группой. Тогда $R \neq 1$. Пусть $p \in \pi(G)$ и G_p — силовская p-подгруппа из G такая, что $D = G_pA = AG_p$. Пусть Q — силовская q-подгруппа группы A, где $q \neq p$. Тогда очевидно, что Q — силовская q-подгруппа из D. Так как A субнормальна в G, то A субнормальна в D и $Q^x \cap A$ — силовская q-подгруппа из A для всех $x \in D$. Значит, $L_q = \langle Q^x \mid x \in D\rangle \subseteq A$. Ясно, что $L_q \trianglelefteq D$. Пусть L — произведение всех подгрупп L_q, где q пробегает все простые делители порядка группы A, отличные от p. Тогда $L \trianglelefteq D$. Поскольку $LR/L \simeq R/L \cap R$ и D/L — p-группа, то $R \subseteq L$. Пусть R_1 — наименьшая нормальная подгруппа из L, фактор-группа по которой разрешима. Тогда $R_1 \operatorname{char} L \trianglelefteq A$ и поэтому $R_1 \trianglelefteq A$. Поскольку L/R_1 разрешима, то $R_1 \subseteq R$. Но $R' = R$ и тем самым $R_1 = R \operatorname{char} L \trianglelefteq D$. Следовательно, $R_1 \trianglelefteq D$, т. е. $G_p \subseteq N_G(R)$. Ввиду произвольного выбора p заключаем, что $R \trianglelefteq G$ и поэтому $1 \neq R \subseteq A$. Полученное противоречие завершает доказательство данного утверждения.

Следующий пример показывает, что субнормальная в G подгруппа, которая X-перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G, в общем случае может не быть перестановочной со всеми силовскими подгруппами из G.

Пример 2.6. Пусть p — нечетное простое число и $A = \langle x, y \mid x^{p^2} = y^p = 1, x^y = x^{1+p}\rangle$. Рассмотрим $L = \langle y\rangle$. Пусть g — инволюция в $\operatorname{Aut} L$ и $B = [L]\langle g\rangle$. Пусть $\alpha : B \to \operatorname{Sym}(p)$ — транзитивное подстановочное представление степени p. Пусть также $G = A \wr_\alpha B = [K]B$ — сплетение групп A и B относительно α, где K — база $A \wr_\alpha B$. Пусть $R = L^\natural$ (мы используем здесь терминологию из [1]), и пусть $N = N_G(R)$. Понятно, что $B \subseteq N$ и $N \cap K = (N_A(L))^\natural$. Так как $|A| = p^3$ и $N_A(L) \neq A$, то $N_A(L)$ — абелева группа и поэтому $N \cap K$ также является абелевой группой. Ясно, что R G-перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G и R субнормальна в G. Допустим, что R перестановочна со всеми силовскими 2-подгруппами из G. Тогда для каждого $x \in G$ имеем $\langle g \rangle^x \subseteq N$. Следовательно, для нормального замыкания $\langle g \rangle^G$ подгруппы $\langle g \rangle$ в G имеет место $L \subseteq \langle g \rangle^G \subseteq N$ и поэтому $B^G \subseteq N$. Пусть теперь $M = \{(a_1, \dots, a_p) \mid a_i \in A$ и $a_1 \dots a_p \in A'\}$. Тогда по [1, A, (18.4)] получим $B^G = MB$. Следовательно, $M \subseteq N$. Но если $a_1 = \dots = a_p$, то $a_1^p \subseteq A'$ и поэтому M содержит подгруппу, изоморфную A. Это означает, что $N \cap K$ не является абелевой группой. Полученное противоречие показывает, что R не перестановочна с некоторой силовской 2-подгруппой группы G.

3. Характеризации разрешимых, сверхразрешимых и нильпотентных групп

Новые характеризации разрешимых групп. Классическая теорема Холла о наличии в разрешимых группах холловских систем [23] допускает следующую интерпретацию в терминах X-перестановочных подгрупп.

Теорема 3.1. *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда любые ее две холловские подгруппы G-перестановочны.*

Доказательство. Если группа G разрешима и A, B — некоторые ее холловские подгруппы, то для некоторого $x \in G$ имеет место $AB^x = B^xA$, поскольку A и B — элементы некоторых холловских систем группы G и любые две холловские системы группы G сопряжены [1, I, (4.11)]. С другой стороны, если любые две холловские подгруппы группы G G-перестановочны, то в G имеется p'-холловская подгруппа для любого простого делителя p порядка группы G и поэтому G разрешима согласно [1, I, (3.5)].

Напомним также следующий результат.

Теорема 3.2 [24]. *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда любые ее две силовские подгруппы G-перестановочны.*

Следующие две леммы хорошо известны.

Лемма 3.3. *Если $G = AB$ и p — простое число, то существуют такие силовские p-подгруппы A_p, B_p и G_p в A, B и G соответственно, что $G_p = A_pB_p$.*

Лемма 3.4. *Пусть A, B — собственные подгруппы из G и $G = AB$. Тогда $G = AB^x$ и $G \neq AA^x$ для всех $x \in G$.*

Напомним, что ненильпотентная группа G является квазинильпотентной тогда и только тогда, когда $G/Z_\infty(G)$ является прямым произведением некоторых простых неабелевых групп (см. [25, теорема 13.6]).

Пусть $\mathscr{N}^*$ — класс всех квазинильпотентных групп и G — группа. Тогда символом $G^{\mathscr{N}^*}$ обозначают пересечение всех нормальных в G подгрупп N с квазинильпотентной фактор-группой G/N.

Лемма 3.5. *Пусть $N \trianglelefteq G$. Тогда $(G/N)^{\mathscr{N}^*} = G^{\mathscr{N}^*}N/N$.*

Доказательство. Это непосредственно следует из [25, 13.3] и [26, I, 2.4].

Доказательство теоремы 3.2 использует классификацию простых неабелевых групп. Однако при некоторых дополнительных условиях этого можно избежать.

Теорема 3.6. *Пусть G — группа, $X = G^{\mathscr{N}^*}$ и $Y = R(G^{\mathscr{N}^*})$ — радикал, т. е. наибольшая разрешимая нормальная подгруппа в $G^{\mathscr{N}^*}$. Тогда следующие условия равносильны.*

(1) *Группа G разрешима.*

(2) *Группа G имеет разрешимую максимальную подгруппу M, и каждая силовская подгруппа из G является X-перестановочной с M и каждой силовской подгруппой группы G.*

(3) *Каждая максимальная подгруппа группы G Y-перестановочна со всеми силовскими подгруппами G.*

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что это неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть p — простой делитель индекса $|G : M|$ и P — силовская p-подгруппа из G. По условию для некоторого $x \in X$ имеем $MP^x = P^x M$. Ясно, что $G = MP^x$ и поэтому для некоторого $a \in \mathbb{N}$ имеет место $|G : M| = p^a$. Пусть H — минимальная нормальная подгруппа из M. Поскольку по условию подгруппа M разрешима, то H — q-группа для некоторого простого q. Пусть M_q — силовская q-подгруппа из M. Если $q \neq p$, то M_q — силовская q-подгруппа из G и поэтому по условию существует элемент $y \in X$ такой, что $M_q^y P^x = P^x M_q^y$. Следовательно, $G = MP^x M_q^y$ и поэтому согласно лемме 3.4 имеет место $G = M(P^x M_q^y)^{y^{-1}} = M(M_q^y P^x)^{y^{-1}} = M(M_q P^{xy^{-1}})$. Ясно, что $H \subseteq M_q \subseteq M_q P^{xy^{-1}}$. Поскольку $H \trianglelefteq M$, то $H^G = H^{MM_qP^{xy^{-1}}} = H^{M_qP^{xy^{-1}}}$ и поэтому $H \subseteq (M_q P^{xy^{-1}})_G$. Значит, поскольку каждая бипримарная группа разрешима, то G имеет абелеву минимальную нормальную подгруппу. Если $q = p$, то для некоторой силовской p-подгруппы G_p из G получим $H \leq G_p$. Понятно, что для некоторого $x \in G$ имеет место $MG_p^x = G_p^x M = G$ и согласно лемме 3.4 $G = MG_p$. Значит, $H^G \leq H^{MG_p} = H^{G_p} \leq G_p$. Следовательно, в любом случае G имеет абелеву минимальную нормальную подгруппу, скажем R. Если $R \nsubseteq M$, то $G/R = RM/R \simeq M/R \cap M$ — разрешимая группа и поэтому G разрешима, что противоречит выбору группы G. Следовательно, $R \leq M$. Согласно лемме 2.1 каждая силовская подгруппа из G/R (XR/R)-перестановочна с M/R и с каждой силовской подгруппой из G/R. Кроме того, по лемме 3.5 имеем $(G/R)^{\mathscr{N}^*} = G^{\mathscr{N}^*}R/R = XR/R$. Это показывает, что условия теоремы выполнены для G/R. Так как $|G/R| < |G|$, то по выбору группы G группа G/R разрешима. Значит, G разрешима; противоречие.

(3) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что это неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа в G. Поскольку $R(G^{\mathscr{N}^*}) \operatorname{char} G^{\mathscr{N}^*}$ и $(G/N)^{\mathscr{N}^*} = G^{\mathscr{N}^*}N/N$, то $YN/N \leq R((G/N)^{\mathscr{N}^*})$ и поэтому согласно лемме 2.1 условие (3) наследуется фактор-группой G/L. Следовательно, G/L — разрешимая группа. Таким образом, L — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $Y = 1$. Пусть p — произвольный простой делитель $|L|$ и L_p — силовская p-подгруппа в L. Пусть P — силовская подгруппа в G, содержащая L_p, и $N = N_G(L_p)$. Тогда $P \leq N$ и поскольку L неабелева, то $N \neq G$. Пусть $N \leq M$, где M — максимальная в G подгруппа. Согласно лемме Фраттини $G = LN$ и поэтому $L \nsubseteq M$. Значит, $M_G = 1$. Пусть q — произвольный простой делитель $|G : M|$ и Q — силовская q-подгруппа в G. Тогда $Q \nsubseteq M$ и поэтому $MQ = QM = G$. Пусть теперь R — силовская r-подгруппа в M, где $r \neq q$. Тогда R является силовской подгруппой в G и поэтому согласно условию для всех $x \in G$ имеет место $R^x \leq M$. Значит, $M_G \neq 1$. Полученное противоречие показывает, что группа G разрешима.

(1) $\Rightarrow$ (2), (3). Предположим, что группа G разрешима. В этом случае $X = Y = G^{\mathscr{N}}$, где $\mathscr{N}$ — класс всех нильпотентных групп. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G. Покажем, что M X-перестановочна со все-

ми силовскими подгруппами из G и что любые две силовские подгруппы из G X-перестановочны. Пусть $|G : M| = p^a$ и Q — произвольная силовская q-подгруппа в G. Если $p = q$, то для некоторого $x \in G$ имеет место $Q^x M = MQ^x = G$, а значит, $QM = MQ$. Пусть $q \neq p$. Пусть также M_q — силовская p-подгруппа в M. Ясно, что $M_q = Q^x$ для некоторого $x \in G$. Тогда $M = MQ^x = Q^x M$. Ввиду [1, I, (4.11)] для некоторого системного нормализатора N группы G имеет место $N \subseteq N_G(Q)$. Используя [1, I, (5.6)], видим, что $G = NX$ и поэтому $x = nd$ для некоторых $n \in N$ и $d \in X$. Следовательно, $MQ^d = Q^d M$. Кроме того, из этого следует, что для любого простого делителя q порядка $|G|$ группы G любые две силовские q-подгруппы группы G сопряжены при помощи некоторого элемента из X. Следовательно, Q X-перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G.

Новые характеризации сверхразрешимых групп. В работе Хупперта [27] доказано, что разрешимая группа G является сверхразрешимой при условии, что все максимальные подгруппы силовских подгрупп перестановочны со всеми членами некоторой фиксированной силовской системы группы G. Этот результат дал толчок большому числу исследований, в которых изучалось влияние максимальных подгрупп силовских подгрупп на строение основной группы (см. обзор в [28]). Следующая теорема в данном направлении дает точное описание сверхразрешимых групп G на основе условия $F(G)$-перестановочности максимальных подгрупп силовских подгрупп с максимальными подгруппами из G.

Теорема 3.7. *Пусть G — группа и $X = F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. Тогда следующие утверждения равносильны.*

(1) *G сверхразрешима.*

(2) *Каждая максимальная подгруппа из G является X-перестановочной в G.*

(3) *Каждая максимальная подгруппа любой нециклической силовской подгруппы из G, не имеющая сверхразрешимого добавления в G, является X-перестановочной с каждой максимальной подгруппой из G.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 3.8 [29, лемма 3.1]. *Пусть $N \leq G$ и L — нормальная подгруппа в G. Предположим, что P/L — силовская p-подгруппа в NL/L и M/L — максимальная подгруппа в P/L. Если P_p — силовская p-подгруппа в $P \cap N$, то P_p — силовская p-подгруппа в N, $D = M \cap N \cap P_p$ — максимальная подгруппа в P_p и $M = LD$.*

Следующая лемма очевидна.

Лемма 3.9. *Пусть $P = P_1 \times \dots \times P_t$ — элементарная абелева p-группа, где $|P_i| = p, i = 1, \dots, t$ и $t > 1$. Если n — количество всех максимальных подгрупп группы P, то $n > t$.*

Лемма 3.10. *Пусть G — группа, p, q — различные простые делители порядка $|G|$, P — нециклическая силовская p-подгруппа из G. Если все максимальные подгруппы из P (кроме, возможно, одной) имеют q-замкнутое добавление в G, то группа G q-замкнута.*

Доказательство. Пусть $|P| \neq 1$ и $\{M, M_1, \dots, M_t\}$ — множество максимальных подгрупп из P таких, что $M_1 \cap \dots \cap M_t = \Phi(P)$ (см. лемму 3.9). Пусть T_i — q-замкнутое добавление к M_i в G, $i = 1, \dots, t$.

Пусть Q — силовская q-подгруппа в T_1. Понятно, что Q является силовской q-подгруппой в G и $Q \trianglelefteq T_1$. Так как P действует транзитивно на множестве силовских q-подгрупп группы G, то для каждого $i \in \{1, \dots, t\}$ в P найдется такой элемент x_i, что Q^{x_i} — силовская q-подгруппа в T_i. Каждому $i \in \{1, \dots, t\}$ сопоставим некоторый полный набор $g_{i_1}, \dots, g_{i_r}$ представителей левых смежных классов по подгруппе M_i в P, все элементы которого принадлежат T_i. Пусть, кроме того, S — объединение всех таких наборов.

Заметим, что поскольку $Q^{x_i} \trianglelefteq T_i$, то каждый элемент из $g_{i_1}, \dots, g_{i_r}$ имеет вид g^{x_i}, где $g \in N_G(Q)$. Ясно, что подгруппа P порождается множеством S. Так как при этом $g^{-1}g^{x_i} \in P' \subseteq \Phi(P)$, то в действительности P порождается некоторым набором элементов из $N_G(Q)$ и поэтому $Q \trianglelefteq G = M_1T_1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.7. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть M — максимальная подгруппа в G и T — произвольная подгруппа из G. Покажем, что M X-перестановочна с T. Пусть $|G : M| = p$. Если $\{M_1, \dots, M_t\}$ — силовская база группы M и $\{T_1, \dots, T_l\}$ — силовская база группы T, то ввиду [1, I, (4.8), (4.12)] G имеет силовские базы $\Sigma = \{P_1, \dots, P_n\}$ и $\Sigma_1 = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ такие, что $M_i = P_i \cap M$ для всех $i = 1, \dots, t$ и $T_i = Q_i \cap T$ для всех $i = 1, \dots, l$. Более того, системы Σ и Σ_1 сопряжены, т. е. G имеет такой элемент x, что $Q_i^x = P_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Без ограничения общности мы можем предположить, что P_1 — силовская p-подгруппа из G. Тогда $M_2 = P_2, \dots, M_t = P_t$.

Допустим, что $T_1^x \subseteq M_1$. Тогда $T^x \subseteq M_1P_2 \dots P_t = M$, поэтому $T^xM = M = MT^x$.

С другой стороны, если $T_1^x \not\subseteq M_1$, то из того, что $|G : M| = p$, следует $|P_1 : M_1| = p$ и поэтому $P_1 = T_1^xM_1$. Отсюда $T^xM = T_2^x \dots T_l^xT_1^xM_1M_2 \dots M_t = T_2^x \dots T_l^xP_1P_2 \dots P_t = G = MT^x$.

Пусть теперь $N = N_G(\Sigma_1)$. Тогда по [1, I, (5.6)] N покрывает все центральные главные факторы группы G. Но по условию G сверхразрешима и поэтому $G' \subseteq F(G)$. Следовательно, $G = F(G)N$. Значит, $x = fn$, где $f \in F(G)$ и $n \in N$, и поэтому $MT^f = T^fM$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Это прямо вытекает из леммы 2.1.

(3) $\Rightarrow$ (1) Допустим, что это утверждение неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка.

(a) *G/N сверхразрешима для каждой неединичной нормальной подгруппы N.*

Пусть P/N — нециклическая силовская p-подгруппа из G/N, P_1/N — максимальная в P/N подгруппа и M/N — произвольная максимальная подгруппа группы G/N. Если G_p — силовская p-подгруппа из P, то G_p — нециклическая силовская p-подгруппа из G и $G_pN/N = P/N$. С другой стороны, по лемме 3.8 $P_1 \cap G_p$ — максимальная подгруппа из G_p и $P_1 = N(P_1 \cap G_p)$. Если $P_1 \cap G_p$ имеет сверхразрешимое добавление T в G, то $TN/N \simeq T/T \cap N$ — сверхразрешимое добавление к P_1/N в G/N. В противном случае $P_1 \cap G_p$ X-перестановочна с M. Значит, по лемме 2.1 P_1/N XN/N-перестановочна с M/N. Так как $XN/N = F(G)N/N \simeq F(G)/N \cap F(G)$ — нильпотентная нормальная подгруппа в G/N, то P_1/N $F(G/N)$-перестановочна с M/N. Следовательно, условие (3) справедливо для фактор-группы G/N. Но поскольку $|G/N| < |G|$, то G/N сверхразрешима по выбору группы G.

(b) *G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу H, и $X = H = C_G(H) = O_p(G) = F(G) \not\subseteq \Phi(G)$ для некоторого простого $p \neq |H|$.*

Пусть H — минимальная нормальная подгруппа группы G. Поскольку класс всех сверхразрешимых групп является насыщенной формацией (см. [26, с. 43]), то ввиду (a) $\Phi(G) = 1$ и H — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Предположим, что H — неабелева группа. Тогда $X = F(G) = 1$. Пусть p — наименьший простой делитель порядка $|H|$ и H_p — силовская p-подгруппа из H. Ясно, что H_p не является циклической группой (см. [30, IV, теорема 2.8]). Пусть P — силовская p-подгруппа из G такая, что $H_p \subseteq P$. Пусть $N = N_G(H_p)$. Поскольку $H_p = H \cap P \trianglelefteq P$, то $P \leq N$. Так как H неабелева, то $H_p \neq H$ и поэтому $N \neq G$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G такая, что $N \subseteq M$. Тогда $P \subseteq M$, тем самым $p \nmid |G : M|$. Если все максимальные подгруппы из P обладают свехразрешимыми добавлениями в G, то согласно лемме 3.10 группа G q-замкнута, где q — наибольший простой делитель порядка $|G|$ группы G. Но тогда $F(G) \neq 1$, что противоречит нашему предположению о группе G. Таким образом, в P имеется такая максимальная подгруппа P_1, которая перестановочна со всеми максимальными подгруппами группы G. В частности, для всех $x \in G$ имеем $P_1 M^x = M^x P_1$. Но $p \nmid |G : M^x|$ и поэтому $P_1 \leq M^x$ для всех $x \in G$. Это влечет то, что $P_1 \leq M_G$ и тем самым $H \subseteq M$. По лемме Фраттини $G = HN$ и тогда $G = M$; противоречие. Значит, H — p-группа для некоторого простого p. Ввиду (a) G разрешима и поэтому ввиду [1, A, (10.6), (15.6)] $X = H = C_G(H) = F(G) = O_p(H)$. Ясно также, что $|H| \neq p$.

(c) *Силовская p-подгруппа группы G не является нормальной подгруппой.*

Допустим, что силовская p-подгруппа G_p из G нормальна в G. Тогда согласно (b) $H = G_p$. Пусть M — максимальная подгруппа в G такая, что $G = [H]M$. Тогда $|G : M| = |H|$. Пусть H_1 — максимальная подгруппа из H. По условию и лемме 2.1 подгруппа H_1 либо имеет сверхразрешимое добавление T в G, либо $H_1 M = M H_1$. В первом случае по выбору группы G имеет место $T \neq G$ и поэтому $G = [H_1]T$, что противоречит минимальности подгруппы H. Аналогично приходим к противоречию во втором случае. Следовательно, имеем (c).

(d) *Число p не является наибольшим простым делителем $|G|$.*

Действительно, если p — наибольший простой делитель $|G|$, то согласно (c) и (a) имеет место $O_p(G/H) \neq 1$, что противоречит (b).

Заключительное противоречие.

Пусть M — максимальная подгруппа группы G такая, что $H \not\subseteq M$. Тогда $G = [H]M$. Пусть M_p — силовская p-подгруппа из M и P — силовская p-подгруппа группы G, содержащая M_p. Пусть P_1 — максимальная подгруппа группы P такая, что $M_p \leq P_1$. Поскольку $|H| > p$, группа P не является циклической. Значит, согласно условию и ввиду (b) либо найдется $x \in G$ такое, что $D = P_1 M^x = M^x P_1$, либо P_1 имеет сверхразрешимое добавление T в G. Предположим, что имеет место первое. Тогда поскольку $G = HM$, имеем $x = ba$, где $a \in P$ и $b \in M$, и поэтому $D = P_1 M^a$. Так как $P_1 \trianglelefteq P$, то $M_p^a \subseteq P_1$. Допустим, что $D = G$. Тогда $P = P \cap P_1 M^a = P_1(P \cap M^a) = P_1 M_p^a = P_1$; противоречие. Значит, $D \neq G$ и тем самым $D = M^a$. Но тогда $P_1 \leq M^a$. Из этого следует $|G : M^a| = |G : M| = p = |H|$, что противоречит (b). Следовательно, имеет место второе. Пусть T_q — силовская q-подгруппа в T, где q — наибольший простой делитель $|G|$. Тогда $T_q \trianglelefteq T$ и T_q является силовской q-подгруппой группы G. Понятно, что для некоторого $x \in G$ имеет место $T_q \trianglelefteq M^x = N_G(T_q)$. Следовательно, $T \leq M^x$ и поэтому $G = P_1 T = P_1 M^x = P_1 M$, что влечет $P = P_1$. Полученное противоречие завершает доказательство импликации (3) $\Rightarrow$ (1). Теорема доказана.

Следствие 3.11. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа из G является $F(G)$-перестановочной в G.*

Следствие 3.12. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа любой нециклической силовской подгруппы из G $F(G)$-перестановочна со всеми максимальными подгруппами группы G.*

Будем говорить, что подгруппа M группы G *имеет непримарный индекс*, если $|G : M|$ делится по крайней мере на два различных простых числа. Подгруппа H группы G называется *2-максимальной подгруппой* этой группы, если H является максимальной подгруппой некоторой максимальной подгруппы M группы G.

Лемма 3.13 [31, теорема 3]. *Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$ и $AB^x = B^x A$ для всех $x \in G$. Тогда G имеет такую собственную нормальную подгруппу N, что либо $A \leq N$, либо $B \leq N$.*

Лемма 3.14 [32, теорема 3.4]. *Группа G разрешима, если $G = AB$, где A сверхразрешима, а B — циклическая группа нечетного порядка.*

Теорема 3.15. *Пусть G — группа, $X = F(G) \cap G'$ и Σ — набор всех таких 2-максимальных подгрупп E группы G для которых фактор-группа G/E_G сверхразрешима и для некоторого простого числа p имеет место $|F(G/E_G)| = |O_p(G/E_G)| > p$. Тогда G сверхразрешима в том и только в том случае, когда для каждой 2-максимальной подгруппы E группы G, имеющей непримарный индекс и не принадлежащей Σ, в G найдется дисперсивное по Оре добавление к E, все подгруппы которого X-перестановочны с E.*

Доказательство. $\Longrightarrow$ Предположим, что это утверждение неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка.

(1) *Группа G не проста.*

Предположим, что G — простая неабелева группа. Тогда $F(G) = 1$ и $X = F(G) \cap G' = 1$. Поскольку группа G не является разрешимой, то согласно [26, гл. 5, теорема 26.3] в группе G имеется несвехразрешимая максимальная подгруппа, скажем M. Предположим, что индекс M не является примарным, и пусть T — максимальная в M подгруппа. Согласно условию в G найдется такая подгруппа A, что $TA = G$ и все подгруппы из A перестановочны с T. Заметим, что $M = M \cap TA = T(M \cap A)$ и поэтому согласно лемме 2.1(11) $|M : T|$ — простое число. Таким образом, индекс каждой максимальной подгруппы из M прост, а значит, по теореме Хупперта M — сверхразрешимая группа. Это противоречие показывает, что $|G : M| = p^\alpha$ для некоторого простого p. Понятно, что для некоторой максимальной в M подгруппы T имеет место $(p, |M : T|) = 1$. Согласно условию в группе G имеется такая подгруппа A, что $TA = G$ и каждая подгруппа из A перестановочна с T. Не теряя общности, мы можем считать, что A — минимальное добавление к T в G. Пусть $x \in G$, и пусть A_1 — собственная подгруппа группы A. Тогда TA_1 — собственная в G подгруппа и $x = at$, где $t \in T$ и $a \in A$. Значит, $T(A_1)^a = (A_1)^a T$, и поэтому $((A_1)^a T)^t = (A_1)^x T$ — подгруппа группы G. Но тогда согласно лемме 3.13 группа G не является простой. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (1).

(2) *Фактор-группа G/N сверхразрешима для любой минимальной нормальной подгруппы N из G.*

Достаточно проверить, что условие верно для G/N. Пусть E/N — произвольная 2-максимальная подгруппа из G/N, имеющая непримарный индекс. Тогда согласно условию в G имеется такая подгруппа T, что $G = ET$ и любая подгруппа из T X-перестановочна с E. Пусть теперь D/N — произвольная подгруппа из TN/N. Тогда $D/N = (D \cap T)N/N$ и поэтому по лемме 2.1 подгруппа D/N XN/N-перестановочна с E/N. Значит, поскольку $XN/N = (F(G) \cap G')N/N \leq F(G/N)$ и $G'N/N = (G/N)'$, каждая подгруппа из TN/N является $F(G/N) \cap (G/N)'$-перестановочной с E/N.

(3) *В группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа, скажем L* (это прямо вытекает из (2) и того факта, что класс всех сверхразрешимых групп замкнут относительно образования подпрямых произведений).

(4) *Группа G разрешима.*

В силу (2) необходимо лишь показать, что L — абелева группа. Предположим, что это не так, и пусть $L \leq M$, где M — максимальная в G подгруппа. Тогда согласно (3) $F(G) = 1$ и поэтому $X = 1$. Согласно (2) $|G : M| = p$ — простое число. Покажем, что для некоторой максимальной в M подгруппы T одновременно имеем $M = LT$ и $(|M : T|, p) = 1$. Действительно, предположим, что p делит $|L|$, и пусть L_p — некоторая силовская p-подгруппа в L, P — силовская подгруппа группы G, которая содержит L_p. Тогда $P \leq N = N_G(L_p)$. По лемме Фраттини $G = LN$, следовательно, $M = M \cap LN = L(M \cap N)$. Так как L не является абелевой, то $N \neq G$ и поэтому $N_1 = M \cap N \neq M$. Пусть T — максимальная в M подгруппа, содержащая N_1. Тогда $M = LT$ и $(|M : T|, p) = 1$. Теперь предположим, что $(|L|, p) = 1$. Понятно, что $L \nsubseteq \Phi(M)$ и поэтому для некоторой максимальной в M подгруппы T имеем $M = LT$ и p не делит $|M : T| = |L|/|L \cap T|$.

Согласно гипотезе в группе G имеется такая подгруппа A, что $G = TA$ и каждая подгруппа из A перестановочна с T. Не теряя общности, можем считать, что A — минимальное добавление к T в G. Тогда $A \cap T \subseteq \Phi(A)$. Поскольку $M = M \cap TA = T(M \cap A)$, согласно лемме 2.1(11) $|M : T| = q$ для некоторого простого $q \neq p$. Тем самым $|G : T| = pq = |A : A \cap T|$. Это означает, что A — $\{p, q\}$-группа. Пусть A_p — силовская p-подгруппа группы A. Тогда $D = TA_p$ — подгруппа группы G такая, что $|G : D| = q$. Поскольку $|G : M| = p$ и $M = LT$, видим, что $L \nsubseteq D$. Тогда $D_G = 1$ и поэтому G изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_q на q символах. Значит, D — холлова q'-подгруппа в G, и $G = DZ_q$, где Z_q — группа порядка q. Ввиду условия теоремы это означает, что для любой максимальной в D подгруппы E найдется такая подгруппа A, что $D = EA$ и любая подгруппа из A перестановочна с E. Применяя теперь лемму 2.1(11), видим, что группа D сверхразрешима и поэтому согласно лемме 3.14 группа G разрешима. Это противоречие завершает доказательство (4).

(5) *Для некоторого простого числа p имеет место $X = L = C_G(L) = F(G) = O_p(G)$ и $|L| > p$.*

Согласно (4) группа G разрешима. Кроме того, согласно (2) фактор-группа G/L сверхразрешима. Поскольку класс всех сверхразрешимых групп является насыщенной формацией, $L \nsubseteq \Phi(G)$. Значит, ввиду [1, A, (10.6), (15.6)] для некоторого простого числа p имеет место $L = C_G(L) = F(G) = O_p(G)$. Понятно также, что $|L| > p$ и $L = F(G) \leq G'$. Следовательно, $L = X$.

Заключительное противоречие.

Пусть E — максимальная в G подгруппа такая, что $L \nsubseteq E$. Тогда $G = [L]E$ и поэтому согласно (2) подгруппа E сверхразрешима. Пусть q — простой делитель $|E|$, отличный от p. Тогда E содержит максимальную подгруппу E_1, для которой $|E : E_1| = q$ и $(E_1)_G = 1$. Согласно условию в группе G имеется такая дисперсивная по Оре подгруппа T, что $G = E_1T$ и каждая подгруппа из T X-перестановочна с E_1. Не теряя общности, можем считать, что T — минимальное добавление к E_1 в G.

Предположим, что $E_1 = 1$, и пусть L_1 — максимальная в L подгруппа. Тогда L_1 имеет непримарный индекс в G и $L_1 \notin \Sigma$. Следовательно, по условию в G найдется такая подгруппа V, что $G = L_1V$ и каждая подгруппа из V является перестановочной с L_1. Это, в частности, означает, что L_1 перестановочна с некоторой силовской q-подгруппой Q группы G. Но Q — максимальная в G подгруппа и поэтому $|G : Q| = |L| = |L_1|$. Полученное противоречие показывает, что $E_1 \neq 1$.

Пусть $D = E_1 \cap T$ и D_p — силовская p-подгруппа в D. Тогда поскольку $|G : E_1| = |L|q$, имеем $|T/D| = p^aq$, где $|L| = p^a > p$. Пусть r — наибольший простой делитель $|G|$. Предположим, что $r = p$. Тогда поскольку фактор-группа G/L сверхразрешима и в силу (5) имеет место $O_p(G/L) = 1$, L — силовская подгруппа в G. Это влечет $L \leq T$. Пусть L_1 — максимальная в L подгруппа. Тогда согласно условию $A = L_1E_1 = E_1L_1$. Легко видеть, что $|G : A| = pq$ и $A_G = 1$. Следовательно, в группе G имеется такая подгруппа T_1, что $AT_1 = G$ и каждая подгруппа из T_1 является L-перестановочной с A. Пусть Q — силовская q-подгруппа в T_1. Тогда для некоторого $x \in L$ имеет место $B = Q^xA = AQ^x$. Но $|G : B| = p$ и поэтому $LB = G$. Следовательно, $|L| \neq |L \cap B| \neq 1$ и $L \cap B \trianglelefteq G$, что противоречит минимальности L. Таким образом, не теряя общности, можем предполагать, что $r = q$.

Пусть K — максимальная в T подгруппа такая, что $|T : K| = p$. Поскольку группа G разрешима, T — $\{p, q\}$-группа ввиду минимальности T. Но $p < q$ и поэтому подгруппа K является нормальной в T. Предположим, что $D \nsubseteq K$. Тогда $KD = T$ и поэтому $G = E_1T = E_1DK = E_1K$. Но это невозможно, поскольку T — минимальное добавление к E_1 в G. Следовательно, $D \subseteq K$. Пусть x — элемент из L, для которого $V = E_1K^x = K^xE_1$. Так как $G = E_1T$, то $x = te$, где $e \in E_1$, $t \in T$, и поэтому $Y = V^{e^{-1}} = E_1K^t = K^tE_1 = E_1K$. Пусть Y_p — силовская p-подгруппа в Y, G_p — силовская подгруппа из G, которая содержит Y_p. Тогда $|G_p : Y_p| = ((|E_p||T_p|)/|D_p|) : ((|E_p||K_p|)/|D_p|) = p$, где E_p — силовская p-подгруппа в E_1. Теперь заметим, что поскольку $|G : LE_1| = q$, то $|G_p| = |L||E_p|$ и поэтому $L \nsubseteq Y$ и $L \cap Y \neq 1$. Но тогда $G = LY$ и подгруппа $Y \cap L$ нормальна в G, что противоречит минимальности L. Таким образом, мы должны заключить, что группа G сверхразрешима.

$\Longleftarrow$ Предположим, что G — сверхразрешимая группа. Используя индукцию по $|G|$, покажем, что для каждой 2-максимальной подгруппы M группы G, имеющей непримарный индекс и не принадлежащей Σ, и для каждого минимального добавления T подгруппы M в G справедливо, что M G'-перестановочна со всеми подгруппами группы T. Пусть T_1 — подгруппа в T.

Прежде предположим, что $M_G \neq 1$. По индукции доказываемое утверждение верно для G/M_G. Заметим, что TM_G/M_G — минимальное добавление к M/M_G в G/M_G. Действительно, если $T_0/M_G \leq TM_G/M_G$ и $(T_0/M_G)(M/M_G) = G/M_G$, то $T_0 = T_0 \cap M_GT = M_G(T_0 \cap T)$ и поэтому $T_0M = G = (T_0 \cap T)M$. Следовательно, $T \subseteq T_0$. Значит, $T_0/M_G = TM_G/M_G$ — минимальное добавление к M/M_G в G/M_G. Таким образом, подгруппа M/M_G является $(G/M_G)'$-перестановочной с T_1M_G/M_G. Но $(G/M_G)' = G'M_G/M_G$ и поэтому согласно лемме 2.1 M G'-перестановочна с T_1.

Теперь предположим, что $M_G = 1$. Пусть $|G : M| = pq$, где $p > q$. Пусть $\pi = \pi(F(G))$ — множество всех простых делителей $|F(G)|$. Если $|\pi| > 2$ и R — силовская d-подгруппа в $F(G)$, где $q \neq d \neq p$, то $R \leq M_G$, что противоречит равенству $M_G = 1$. Значит, $\pi \subseteq \{p, q\}$. Поскольку группа G сверхразрешима, силовская r-подгруппа нормальна в G, где r — наибольший простой делитель $|G|$. Значит, $r = p$.

Прежде предположим, что $|F(G)| = p$. В этом случае $G = [F(G)]E$ для некоторой максимальной подгруппы E группы G и $C_G(F(G)) = F(G)$. Следовательно, E — циклическая группа. Не теряя общности, мы можем предполагать, что $M \leq E$. Покажем, что M G'-перестановочна с T_1. Если A — холловская p'-подгруппа в T_1, то $T_1 = PA$, где $P = T_1 \cap F(G)$ — силовская p-подгруппа в T_1. Для некоторого $x \in F(G) = G'$ имеет место $A^x \subseteq E$ и поэтому $MT_1^x = M(T_1 \cap F(G))A^x = (T_1 \cap F(G))A^xM$.

Пусть теперь $|\pi| = 2$, F_p и F_q — силовская p-подгруппа и силовская q-подгруппа в $F(G)$ соответственно. Понятно, что $G = F(G)M$. Пусть R — силовская r-подгруппа в $F(G)$. Предположим, что $|R| > r$. Тогда $D = R \cap M \neq 1$. Поскольку R — характеристическая подгруппа в $F(G)$, R нормальна в G. Понятно также, что $|R : D| = r$. Следовательно, D нормальна в G и поэтому $D = 1$, поскольку $M_G = 1$. Таким образом, $|F(G)| = pq$. Предположим, что q делит $|M|$ и что q, p делят $|T_1|$. Если $\{M_2, \dots, M_t\}$ — некоторая силовская база группы M и $\{D_1, D_2\}$ — некоторая силовская база группы T_1, то согласно [1, I, (4.8), (4.12)] G обладает такими силовскими базами $\Sigma = \{P_1, \dots, P_t\}$ и $\Sigma_1 = \{Q_1, \dots, Q_t\}$, что $M_i \subseteq P_i$ для всех $i = 2, \dots, t$ и $D_i \subseteq Q_i$ для $i = 1, 2$. Более того, найдется элемент $x \in G$ такой, что $Q_i^x = P_i$ для всех $i = 1, \dots, t$. Понятно, что $P_1 = D_1$ — силовская p-подгруппа в G и $M_3 = P_3, \dots, M_t = P_t$. Если $D_2^x \subseteq M_2$, то ${T_1}^xM = P_1M = MT^x$. С другой стороны, если $D_2^x \nsubseteq M_2$, то ввиду равенства $|G : M| = pq$ имеем $|P_2 : M_2| = q$ и поэтому $P_2 = D_2^xM_2$. Значит, $T_1^xM = G = MT_1^x$. Заметим, что согласно [1, VI, 11.10] имеет место $G = G'N_G(\Sigma_1)$ и поэтому $x = fn$, где $f \in G'$ и $n \in N_G(\Sigma_1)$. Следовательно, $MT_1^f = T_1^fM$. Аналогично рассматриваются случаи, когда либо $(|M|, q) = 1$, либо $(|T_1|, p) = 1$.

Наконец отметим, что поскольку группа G сверхразрешима, $G' \leq F(G)$ и поэтому $X = G'$. Следовательно, M X-перестановочна со всеми подгруппами из T. Теорема доказана.

Заметим, что в сверхразрешимой группе $G = S_3 \times Z_3$ имеется подгруппа порядка 3, которая не перестановочна ни с одной подгруппой порядка 2. Таким образом, условие «имеющей непримарный индекс и не принадлежащей Σ» в теореме 3.15 не может быть опущено.

Новые характеризации нильпотентных групп. Напомним, что подгруппа H группы G называется *абнормальной*, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для всех $x \in G$. Следующая лемма очевидна.

Лемма 3.16. *Если $K \trianglelefteq G$ и H — абнормальная подгруппа в G, то справедливы следующие утверждения:*

(i) *HK/K абнормальна в G/K;*

(ii) *если $H \leq T \leq G$, то H абнормальна в T;*

(iii) $H = N_G(H)$.

Теорема 3.17. *Группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда G имеет нильпотентную абнормальную подгруппу X такую, что любые две силовские подгруппы из G X-перестановочны.*

Доказательство. Достаточно лишь показать, что если любые две силовские подгруппы из G X-перестановочны, то G нильпотентна. Предположим, что это утверждение неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда

(1) *G/N нильпотентна для каждой неединичной нормальной подгруппы N из G.*

Пусть P/N и Q/N — силовская p-подгруппа и силовская q-подгруппа в G/N соответственно. Пусть также G_p — силовская p-подгруппа в P и G_q — силовская q-подгруппа в Q. Тогда G_p и G_q — силовские подгруппы группы G. По условию G_p и G_q X-перестановочны, поэтому по лемме 2.1 P/N (XN/N)-перестановочна с Q/N. Поскольку $XN/N \simeq X/N \cap X$ — нильпотентная подгруппа в G/N и по лемме 3.16 XN/N абнормальна в G/N, условие теоремы справедливо для G/N. Так как $|G/N| < |G|$, то по выбору группы G фактор-группа G/N нильпотентна.

(2) *$G = N_G(P)X$ для каждой силовской подгруппы P группы G.*

Согласно условию для каждого $x \in G$ существует такой элемент $h \in X$, что $P(P^x)^h = (P^x)^h P$ и поэтому $xh \in N = N_G(P)$. Значит, $G = NX$.

(3) *G — разрешимая группа.*

Пусть p — простой делитель $|X|$ и X_p — силовская p-подгруппа из X. Пусть P — силовская p-подгруппа из G. Согласно (2) $G = NX$, где $N = N_G(P)$, поэтому по лемме 3.3 $PX_p = X_pP$. Значит, $X_p \leq P \leq N$. Так как X нильпотентна, то $X_p \trianglelefteq X$ и поэтому $X_p^G = X_p^{NX} = X_p^N \leq P$. Значит, G имеет абелеву минимальную нормальную подгруппу. Ввиду (1) группа G разрешима.

(4) *$G = [R]M$, где M — нильпотентная максимальная подгруппа из G и $R = C_G(R) = O_p(G)$ — минимальная нормальная подгруппа из G, где $p \mid |R|$.*

Ввиду (1) и свойств класса всех нильпотентных групп видим, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, скажем R, и $R \not\subseteq \Phi(G)$. Таким образом, (4) следует из [1, A, (15.6)].

Заключительное противоречие.

По условию X абнормальна в G и поэтому согласно лемме 3.16 имеет место $N_G(X) = X$. Таким образом, X — картерова подгруппа в G. Ясно, что M также является картеровой подгруппой в G. Следовательно, для некоторого $x \in G$ имеем $X = M^x$. Пусть теперь Q — силовская q-подгруппа в M, где q — простой делитель $|M|$, отличный от p. Тогда $M = N_G(Q)$ и поэтому ввиду (2) $G = MX = MM^x$, что противоречит лемме 3.4. Теорема доказана.

Следствие 3.18. *Разрешимая группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда любые ее две силовские подгруппы X-перестановочны, где X — подгруппа Картера группы G.*

Теорема 3.19. *Пусть G — группа и $X = F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. Тогда G нильпотентна в том и только в том случае, когда для каждой 2-максимальной подгруппы E группы G, имеющей непримарный индекс в G, в* *группе G найдется нильпотентное добавление к E, все силовские подгруппы которого X-перестановочны с E.*

Доказательство. Предположим, что для каждой 2-максимальной подгруппы E группы G, имеющей непримарный индекс в G, в группе G найдется нильпотентное добавление к E, все силовские подгруппы которого X-перестановочны с E. Покажем, что в этом случае группа G нильпотентна. Предположим, что это неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка.

(1) *Группа G не проста.*

Предположим, что G — простая неабелева группа. Тогда $X = F(G) = 1$. Пусть M — произвольная максимальная в G подгруппа и T — некоторая максимальная подгруппа в M. Предположим, что M имеет непримарный индекс. Тогда согласно условию в G найдется такая нильпотентная подгруппа A, что $G = TA$ и все силовские подгруппы из A перестановочны с T. Пусть P — произвольная силовская подгруппа группы A. Понятно, что $PT = TP \neq G$. Покажем, что для всех $x \in G$ имеет место $P^xT = TP^x$. Пусть $x = at$, где $a \in A$ и $t \in T$. Тогда $P^xT = P^{at}T = P^tT = t^{-1}PTt = t^{-1}TPt = Tt^{-1}Pt = TP^x$ и поэтому согласно лемме 3.13 группа G не проста. Таким образом, $|G : M| = p^a$ для некоторого простого p. Понятно, что для некоторой максимальной в M подгруппы T имеет место $(p, |M : T|) = 1$, что, как и выше, приводит к противоречию.

(2) *В G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа, скажем L, и фактор-группа G/L нильпотентна* (см. доказательство теоремы 3.15).

(3) *Группа G разрешима.*

В силу (2) необходимо лишь показать, что L — абелева группа. Предположим, что это не так, и пусть $L \leq M$, где M — максимальная в G подгруппа. Понятно, что $X = F(G) = 1$. Согласно (2) $|G : M| = p$ — простое число. Для некоторой максимальной в M подгруппы T одновременно имеем $M = LT$ и $(|M : T|, p) = 1$ (см. доказательство теоремы 3.15). Согласно условию в группе G имеется такая нильпотентная подгруппа A, что $G = TA$ и каждая силовская подгруппа из A перестановочна с T. Поскольку $M = M \cap TA = T(M \cap A)$, в A найдется такая силовская подгруппа, скажем силовская q-подгруппа A_q, что $A_q \leq M$ и $A_q \nsubseteq T$. Значит, $M = TA_q$, и поэтому $|G : T| = pq^a = |A : A \cap T|$. Пусть A_p — силовская p-подгруппа группы A. Тогда $D = TA_p$ — подгруппа группы G такая, что $|G : D| = q^a$. Поскольку $|G : M| = p$ и $M = LT$, видим, что $L \nsubseteq D$. Тогда $D_G = 1$. Пусть E — максимальная в D подгруппа такая, что $(|D : E|, q) = 1$. Пусть A — нильпотентная подгруппа группы G такая, что $G = EA$ и каждая силовская подгруппа из A перестановочна с E. Поскольку $D = D \cap EA = E(D \cap A)$, в группе A найдется такая силовская подгруппа R, что $D = RE$. Заметим, что так как $G = DA$ и R нормальна в A, то $R^G = R^{DA} = R^D \leq D$. Значит, $D_G \neq 1$. Это противоречие завершает доказательство (3).

Заключительное противоречие.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда рассуждая, как и при доказательстве теоремы 3.15, можно показать, что $G = [L]E$, где E — нильпотентная максимальная в G подгруппа, и для некоторого простого p имеет место $L = C_G(L) = O_p(G)$. Это, в частности, означает, что L — силовская подгруппа в G. Понятно, что найдутся простое $q \neq p$ и максимальная в E подгруппа E_1 такие, что $|E : E_1| = q$. Следовательно, согласно условию группа G имеет нильпотентную подгруппу T такую, что $G = E_1T$. Заметим, что так как $|G : E_1| = p^a q$, где $|L| = p^a$, то $L \leq T$ и поэтому $T \leq L = C_G(L)$. Это противоречие завершает доказательство данного утверждения, а значит, и доказательство данной теоремы, поскольку в нильпотентной группе всякая ее 2-максимальная подгруппа, имеющая непримарный индекс, нормальна.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. *Ore O.* Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. 1939. V. 5. P. 431–460.
3. *Stonehewer S. E.* Permutable subgroups of infinite groups // Math. Z. 1972. V. 125, N 1. P. 1–16.
4. *Ito N., Szep J.* Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen // Act. Sci. Math. 1962. V. 23, N 1–2. P. 168–170.
5. *Maier R., Schmid P.* The embedding of quasinormal subgroups in finite groups // Math. Z. 1973. V. 131, N 3. P. 269–272.
6. *Kegel O.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. V. 78, N 1. P. 205–221.
7. *Deskins W. E.* On quasinormal subgroups of finite groups // Math. Z. 1963. V. 82, N 2. P. 125–132.
8. *Schmid P.* Subgroups permutable with all Sylow subgroups // J. Algebra. 1998. V. 207, N 1. P. 285–293.
9. *Поляков Л. Я.* Конечные группы с перестановочными подгруппами // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1966. С. 75–88.
10. *Maier R.* Endliche metanilpotente Gruppen // Arch. Math. 1972. V. 23, N 1. P. 139–144.
11. *Maier R.* Zur Vertauschbarkeit und Subnormalitat von Untergruppen // Arch. Math. 1989. V. 53, N 2. P. 110–120.
12. *Su H.* Semi-normal subgroups of finite groups // Math. Mag. 1988. V. 8, N 1. P. 7–9.
13. *Wang R.* Some sufficient conditions of a nilpotent group // J. Algebra. 1992. V. 148, N 2. P. 289–294.
14. *Foguel T.* On seminormal subgroups // J. Algebra. 1994. V. 165, N 3. P. 633–635.
15. *Подгорная В. В.* Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп // Весцi. НАН Беларуси, сер. физ.-мат. навук. 2000. Т. 4, № 4. С. 22–25.
16. *Skiba A. N.* H-permutable subgroups // Изв. Гомельского гос. ун-та имени Ф. Скорины. 2003. N 4. P. 37–39.
17. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* X-Permutable subgroups. Gomel, 2003. (Preprint/GGU im. F. Skoriny; N 61).
18. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Conditionally permutable subgroups. Gomel, 2002. (Preprint/GGU im. F. Skoriny; N 10).
19. *Го Веньбинь, Шам К. П., Скиба А. Н.* G-накрывающие системы подгрупп для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных конечных групп // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 75–92.
20. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups // SEAMS Bull Math. 2005. V. 29, N 2. P. 240–254.
21. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups // Publ. Math. Debrecen. 2006. V. 68, N 3–4. P. 433–449.
22. *Al-Sheikahmad A.* Finite groups with given c-permutable subgroups // Algebra Discrete Math. 2004. V. 3, N 3. P. 9–14.
23. *Hall P.* On the Sylow systems of a soluble group // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43, N 2. P. 507–528.
24. *Arad Z. Michael B. Ward* New criteria for the solvability of finite groups // J. Algebra. 1982. V. 77, N 1. P. 234–246.
25. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. III. Berlin; New York: Springer-Verl., 1982.

26. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
27. *Huppert B.* Zur Sylowstruktur auflosbarer Gruppen // Arch. Math. 1961. V. 12, N 1. P. 161–169.
28. *Skiba A. N.* Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. N 3. P. 12–31.
29. *Guo W., Shum K. P., Skiba A.* G-covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups // Israel J. Math. 2003. V. 138, N 3. P. 125–138.
30. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
31. *Kegel O.* Producte nilpotenter Gruppen // Arch. Math. 1961. V. 12, N 1. P. 90–93.
32. *Монахов В. С.* Произведение сверхразрешимой и циклической или примарной группы // Finite Groups (Тр. Гомельск. семинара. Гомель, 1975–1977). Минск: Наука и техника, 1978. С. 50–63.

Статья поступила 26 января 2006 г.

Wenbin Guo (Го Веньбинь)
Department of Mathematics, Xuzhou Normal University,
221009 Xuzhou, P.R. China
yzgwb@pub.yz.jsinfo.net

Kar-Ping Shum (Шам Кар-Пинг)
Department of Mathematics, The Chinese University of Hong Kong,
Shatin, Hong Kong, P.R. China (SAR)
kpshum@math.cuhk.edu.hk

Скиба Александр Николаевич
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, математический факультет,
Гомель 246019, Беларусь
skiba@gsu.unibel.by