Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 517.955.8

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Л. Н. Бондарь

Аннотация: Исследуется асимптотическое поведение на бесконечности решения задачи Коши для одной системы соболевского типа. Установлен вид предельной вектор-функции и получена скорость сходимости.

Ключевые слова: система соболевского типа, асимптотическое поведение решения, функция Бесселя.

1. Введение

Рассматривается задача Коши для следующей системы дифференциальных уравнений соболевского типа:

$$\begin{gathered}\Delta u^1_t - u^1_{x_1x_2} - u^2_{x_2x_2} - u^2_{x_3x_3} = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}_3, \\ \Delta u^2_t + u^1_{x_1x_1} + u^1_{x_3x_3} + u^2_{x_1x_2} = 0, \quad \Delta u^3_t - u^1_{x_2x_3} + u^2_{x_1x_3} = 0, \\ u^k|_{t=0} = u^k_0(x), \quad k = 1,2,3,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где Δ — оператор Лапласа по x, $u^k_0(x) \in C^\infty_0(\mathbb{R}_3)$. К изучению этой задачи можно свести исследование задачи Коши для системы Соболева [1]:

$$u_t - [u,\omega] + \nabla P = 0, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \omega = (0,0,1),$$

применяя теорему об изоморфизме [2] для некоторого класса матричных эллиптических операторов. Из работы [3] следует, что задача (1.1) однозначно разрешима в классе

$$\begin{gathered}u^k(t,x) \in C^1\big([0,\infty); W^1_{p,1}(\mathbb{R}_3)\big), \quad D^\beta_x u^k(t,x) \in C^1([0,\infty); L_p(\mathbb{R}_3)), \\ 1 < p < 3/2, \quad |\beta| = 2, \quad k = 1,2,3.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Поскольку $u^k_0(x) \in C^\infty_0(\mathbb{R}_3)$, нетрудно показать, что

$$D^\beta_x u^k(t,x) \in C^l([0,\infty); L_p(\mathbb{R}_3)), \quad |\beta| > 2,\ l \geq 1,\ 1 < p < 3/2,\ k = 1,2,3.$$

Наша цель — изучение асимптотического поведения решения задачи Коши (1.1) при $t \to \infty$.

В работе доказана следующая

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00529).

Теорема. *На любом компакте $K \subset \mathbb{R}_3$ для решения задачи Коши* (1.1) *при $t \to \infty$ имеет место равномерная сходимость*

$$u^j(t,x) \to u^{0j}(x'),\ j = 1,2, \quad u^3(t,x) \to u^{03}(x), \tag{1.3}$$

где

$$u^{01}(x') = \frac{\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}_2} e^{ix'\xi'} \frac{\xi_2}{i|\xi'|} \widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi', 0)\, d\xi',$$

$$u^{02}(x') = -\frac{\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}_2} e^{ix'\xi'} \frac{\xi_1}{i|\xi'|} \widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi', 0)\, d\xi',$$

$$u^{03}(x', x_3) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{0} \operatorname{div} u_0(x', x_3 + \zeta_3)\, d\zeta_3 - \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\infty} \operatorname{div} u_0(x', x_3 + \zeta_3)\, d\zeta_3,$$

при этом скорость сходимости порядка $O\big(\frac{1}{t^{1/2}}\big)$ для $j = 1, 2$, $O\left(\frac{1}{t^{1/3}}\right)$ для $j = 3$.

2. Построение решения задачи Коши

С помощью преобразования Фурье по x нетрудно выписать формулы для решения задачи (1.1) из класса (1.2):

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}_3} e^{ix\xi} \left(\frac{1}{|\xi|} \sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right) \begin{pmatrix} \xi_3 \widehat{u}_0^2(\xi) - \xi_2 \widehat{u}_0^3(\xi) \\ -\xi_3 \widehat{u}_0^1(\xi) + \xi_1 \widehat{u}_0^3(\xi) \\ \xi_2 \widehat{u}_0^1(\xi) - \xi_1 \widehat{u}_0^2(\xi) \end{pmatrix} + \cos\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right) \widehat{u}_0(\xi) \right) d\xi$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}_3} e^{ix\xi} \frac{1}{i|\xi|} \int\limits_0^t \sin\left(\frac{s\xi_3}{|\xi|}\right) ds \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi) \end{pmatrix} d\xi$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}_3} e^{ix\xi} \frac{1}{i|\xi|\xi_3} \sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right) \begin{pmatrix} \xi_2 \widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi) \\ -\xi_1 \widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi) \\ 0 \end{pmatrix} d\xi. \tag{2.1}$$

Как и в работе В. Н. Масленниковой [4], представим первое и второе слагаемые из (2.1) в виде интегралов со слабыми особенностями ядер. Для этого достаточно посчитать три ядра:

$$K_1(x-y,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}_3} e^{i(x-y)\xi} \frac{1}{|\xi|^2} \cos\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right) d\xi, \tag{2.2}$$

$$K_2(x-y,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}_3} e^{i(x-y)\xi} \frac{1}{|\xi|\xi_3} \sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right) d\xi,$$

$$K_3(x-y,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}_3} e^{i(x-y)\xi} \frac{1}{|\xi|\xi_3} \sin\left(\frac{s\xi_3}{|\xi|}\right) d\xi ds.$$

Интеграл типа (2.2) вычисляется в [5] с помощью формул Сонина для бесселевых функций и равен

$$K_1(x-y,t) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} J_0\left(\frac{r't}{r}\right), \quad r \neq 0, \tag{2.3}$$

где
$$r'^2 = \sum_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2, \quad r^2 = r'^2 + (x_3 - y_3)^2,$$
$J_0(\eta)$ — функция Бесселя нулевого порядка. В силу (2.3)
$$K_2(x-y,t) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r'}\int\limits_0^{\frac{r't}{r}} J_0(\eta)\,d\eta, \tag{2.4}$$
$$K_3(x-y,t) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r'}\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{\frac{r's}{r}} J_0(\eta)\,d\eta ds. \tag{2.5}$$
Воспользовавшись (2.1), (2.3)–(2.5), получим, что решение задачи (1.1) представимо в виде
$$\begin{aligned} u(t,x) &= \tilde{u}(t,x) + v(t,x) + w(t,x) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}_3}\left\{\frac{1}{r'}\int\limits_0^{\frac{r't}{r}} J_0(\eta)\operatorname{rot} D_{y_3}u_0(y)\,d\eta - \frac{1}{r}J_0\left(\frac{r't}{r}\right)\Delta u_0(y)\right\}dy \\ &\quad - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}_3}\int\limits_0^t \frac{1}{r'}\int\limits_0^{\frac{r's}{r}} J_0(\eta)\,d\eta ds \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_{y_3}\operatorname{div} u_0(y)\end{pmatrix} dy \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}_3} e^{ix\xi}\frac{1}{i|\xi|\xi_3}\sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)\begin{pmatrix} \xi_2\widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi) \\ -\xi_1\widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi) \\ 0\end{pmatrix} d\xi. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Отметим, что в случае соленоидальных начальных условий решение задачи Коши имеет вид
$$u(t,x) = \tilde{u}(t,x).$$
Асимптотическое поведение вектор-функции $\tilde{u}(t,x)$ при $t \to \infty$ изучено в работе [4]. В частности, в [4] установлено, что
$$\tilde{u}(t,x) = O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \to \infty. \tag{2.7}$$

В следующих двух параграфах мы изучим асимптотическое поведение вектор-функций $v(t,x)$ и $w(t,x)$ при $t \to \infty$.

3. Асимптотическое поведение вектор-функции $v(t,x)$

Вначале рассмотрим второе слагаемое в (2.6). Очевидно,
$$v(t,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v^3(t,x)\end{pmatrix}.$$

Проведем оценку функции $v^3(t,x)$ при $t \gg 1$. Для этого представим функцию в другом виде. Интегрируя по частям по y_3, будем иметь
$$v^3(t,x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}_3}\frac{(x_3-y_3)}{r^3}\int\limits_0^t sJ_0\left(\frac{r's}{r}\right)ds\operatorname{div} u_0(y)\,dy.$$

Сделав для удобства замену переменных интегрирования $y = x + \zeta$, получим

$$v^3(t,x) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}_3} \frac{\zeta_3}{r^3} \int\limits_0^t sJ_0\left(\frac{r's}{r}\right) ds \operatorname{div} u_0(x+\zeta)\, d\zeta. \tag{3.1}$$

Воспользуемся уравнением Бесселя для $J_0(\eta)$

$$J_0''(\eta) + \frac{J_0'(\eta)}{\eta} + J_0(\eta) = 0 \tag{3.2}$$

и перейдем в (3.1) к цилиндрическим координатам

$$\zeta_1 = r'\cos\varphi, \quad \zeta_2 = r'\sin\varphi, \quad \zeta_3 = \zeta_3.$$

Тогда

$$v^3(t,x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_3}{r^2} \left[\int\limits_0^t J_0'\left(\frac{r's}{r}\right) ds + \int\limits_0^t \frac{r's}{r} J_0''\left(\frac{r's}{r}\right) ds \right] \operatorname{div} u_0 \, d\zeta_3 dr' d\varphi.$$

Применяя ко второму слагаемому формулу интегрирования по частям по переменной s, получим

$$v^3(t,x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_3}{r^2} t J_0'\left(\frac{r't}{r}\right) \operatorname{div} u_0 \, d\zeta_3 dr' d\varphi.$$

Разобьем $v^3(t,x)$ на четыре слагаемых следующим образом:

$$\begin{aligned} v^3(t,x) &= v_1^3(t,x) + v_2^3(t,x) + v_3^3(t,x) + v_4^3(t,x) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty} \frac{\zeta_3}{r^2} t J_0'\left(\frac{r't}{r}\right) \operatorname{div} u_0 \, d\zeta_3 dr' d\varphi \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{-t^{-\frac{1}{3}}} \frac{\zeta_3}{r^2} t J_0'\left(\frac{r't}{r}\right) \operatorname{div} u_0 \, d\zeta_3 dr' d\varphi \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\eta}^{\infty} \int\limits_{-t^{-\frac{1}{3}}}^{t^{-\frac{1}{3}}} \frac{\zeta_3}{r^2} t J_0'\left(\frac{r't}{r}\right) \operatorname{div} u_0 \, d\zeta_3 dr' d\varphi \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\eta} \int\limits_{-t^{-\frac{1}{3}}}^{t^{-\frac{1}{3}}} \frac{\zeta_3}{r^2} t J_0'\left(\frac{r't}{r}\right) \operatorname{div} u_0 \, d\zeta_3 dr' d\varphi, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\eta > 0$ — достаточно маленькое фиксированное число. Будем оценивать каждое слагаемое отдельно.

Лемма 1. *На любом компакте $K \subset \mathbb{R}_3$ имеет место следующая оценка:*

$$\sup_{x\in K} \left| v_1^3(t,x) + \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} \operatorname{div} u_0(x', x_3 + \zeta_3)\, d\zeta_3 \right| \le \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t \gg 1,$$

где $c > 0$ — *константа, зависящая от* $\operatorname{diam} K, u_0(x)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $v_1^3(t,x)$ из (3.3). Интегрируя по частям по r', получим

$$v_1^3(t,x) = -\frac{1}{2}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty} \operatorname{div} u_0(x', x_3+\zeta_3)\,d\zeta_3$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} J_0\left(\frac{r't}{r}\right)\left[\frac{r'}{r\zeta_3}\operatorname{div} u_0 + \frac{r}{\zeta_3} D_{r'}\operatorname{div} u_0\right] dr' d\zeta_3 d\varphi = I_1 + I_2 + I_3.$$

Очевидно, что при больших t для I_1 справедлива оценка

$$\sup_{x\in K}\left| I_1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\operatorname{div} u_0(x', x_3+\zeta_3)\,d\zeta_3\right| \le \frac{c}{t^{1/3}},$$

где c — положительная константа.

Оценим слагаемое I_2. Используя уравнение Бесселя (3.2), получим

$$I_2 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} J_0\left(\frac{r't}{r}\right)\frac{r'}{r\zeta_3}\operatorname{div} u_0\,dr' d\zeta_3 d\varphi$$
$$= \frac{1}{4\pi t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} J_0'\left(\frac{r't}{r}\right)\frac{1}{\zeta_3}\operatorname{div} u_0\,dr' d\zeta_3 d\varphi$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} J_0''\left(\frac{r't}{r}\right)\frac{r'}{r\zeta_3}\operatorname{div} u_0\,dr' d\zeta_3 d\varphi.$$

Учитывая равенство

$$J_0''\left(\frac{r't}{r}\right) = \frac{r^3}{\zeta_3^2 t} D_{r'} J_0'\left(\frac{r't}{r}\right)$$

и интегрируя по частям по r' во втором слагаемом, имеем

$$I_2 = \frac{1}{4\pi t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} J_0'\left(\frac{r't}{r}\right)\frac{1}{\zeta_3}\operatorname{div} u_0\,dr' d\zeta_3 d\varphi$$
$$-\frac{1}{4\pi t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\zeta_3^3} J_0'\left(\frac{r't}{r}\right)\left[r^2\operatorname{div} u_0 + 2r'^2\operatorname{div} u_0 + r'r^2 D_{r'}\operatorname{div} u_0\right] dr' d\zeta_3\,d\varphi.$$

Нетрудно показать, что

$$\sup_{x\in K}\left|I_2\right| \le \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t \gg 1.$$

Чтобы оценить I_3, разобьем его на два слагаемых и оценим каждое отдельно:

$$I_3 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} J_0\left(\frac{r't}{r}\right)\frac{r}{\zeta_3}D_{r'}\operatorname{div} u_0\,dr'd\zeta_3 d\varphi$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty}\int\limits_0^{t^{-\frac{1}{3}}} J_0\left(\frac{r't}{r}\right)\frac{r}{\zeta_3}D_{r'}\operatorname{div} u_0\,dr'd\zeta_3 d\varphi$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty} J_0\left(\frac{r't}{r}\right)\frac{r}{\zeta_3}D_{r'}\operatorname{div} u_0\,dr'd\zeta_3 d\varphi = I_3^1 + I_3^2. \quad (3.4)$$

Оценим I_3^1. Воспользуемся формулой Бесселя (см., например, [6])

$$J_0(\eta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(\eta\sin\theta)\,d\theta.$$

Тогда при $t \gg 1$ имеем

$$I_3^1 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty}\int\limits_0^{t^{-\frac{1}{3}}} J_0\left(\frac{r't}{r}\right)\frac{r}{\zeta_3}D_{r'}\operatorname{div} u_0\,dr'd\zeta_3 d\varphi$$

$$= -\frac{1}{4(\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty}\int\limits_0^{t^{-\frac{1}{3}}}\int\limits_0^{\pi}\cos\left(\frac{r't}{r}\sin\theta\right)\frac{r}{\zeta_3}D_{r'}\operatorname{div} u_0\,d\theta dr'd\zeta_3 d\varphi$$

$$= -\frac{1}{4(\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty}\int\limits_0^{t^{-\frac{1}{3}}}\left(\int\limits_0^{t^{-\frac{1}{3}}} + \int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\pi-t^{-\frac{1}{3}}} + \int\limits_{\pi-t^{-\frac{1}{3}}}^{\pi}\right)\cos\left(\frac{r't}{r}\sin\theta\right)$$

$$\times\frac{r}{\zeta_3}D_{r'}\operatorname{div} u_0\,d\theta dr'd\zeta_3 d\varphi = I_3^{1,1} + I_3^{1,2} + I_3^{1,3}. \quad (3.5)$$

Очевидно, при больших t

$$\sup_{x\in K}\left|I_3^{1,1} + I_3^{1,3}\right| \le \frac{c\ln t}{t^{2/3}}. \quad (3.6)$$

Оценим $I_3^{1,2}$. Поскольку $\frac{1}{t^{1/3}} \le \theta \le \pi - \frac{1}{t^{1/3}}$, можно преобразовать интеграл по r' следующим образом:

$$\int\limits_0^{t^{-\frac{1}{3}}}\cos\left(\frac{r't}{r}\sin\theta\right)\frac{r}{\zeta_3}D_{r'}\operatorname{div} u_0\,dr' = \int\limits_0^{t^{-\frac{1}{3}}} D_{r'}\sin\left(\frac{r't}{r}\sin\theta\right)\frac{r^4}{\zeta_3^3 t\sin\theta}D_{r'}\operatorname{div} u_0\,dr'.$$

Интегрируя по частям по r', будем иметь

$$I_3^{1,2} = -\frac{1}{4(\pi)^2 t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\pi-t^{-\frac{1}{3}}}\sin\left(\frac{r't}{\sqrt{r'^2+\zeta_3^2}}\sin\theta\right)$$

$$\times \frac{\left(r'^2+\zeta_3^2\right)^2}{\zeta_3^3\sin\theta} D_{r'} \operatorname{div} u_0\bigg|_{r'=t^{-\frac{1}{3}}} d\theta d\zeta_3 d\varphi$$

$$+\frac{1}{4(\pi)^2 t}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\infty}\int\limits_{t^{-\frac{1}{3}}}^{\pi-t^{-\frac{1}{3}}}\int\limits_0^{t^{-\frac{1}{3}}} \sin\left(\frac{r't}{r}\sin\theta\right)\frac{1}{\zeta_3^3\sin\theta}$$

$$\times\left[4r^2 r' D_{r'} \operatorname{div} u_0 + r^4 D_{r'}^2 \operatorname{div} u_0\right] dr' d\theta d\zeta_3 d\varphi.$$

Поскольку при больших t выполнено неравенство

$$\left|\sin\theta\right| \geq \frac{1}{2t^{1/3}}, \quad \theta\in\left[\frac{1}{t^{1/3}}, \pi-\frac{1}{t^{1/3}}\right],$$

получим оценку

$$\sup_{x\in K}\left|I_3^{1,2}\right| \leq \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t\gg 1. \tag{3.7}$$

Из (3.5)–(3.7) следует, что

$$\sup_{x\in K}\left|I_3^{1}\right| \leq \frac{2c}{t^{1/3}}, \quad t\gg 1. \tag{3.8}$$

Рассмотрим второе слагаемое из (3.4). Рассуждая так же, как при получении оценки для I_2, имеем

$$\sup_{x\in K}\left|I_3^{2}\right| \leq \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t\gg 1. \tag{3.9}$$

В силу (3.4), (3.8), (3.9) получим

$$\sup_{x\in K}\left|I_3\right| \leq \frac{3c}{t^{1/3}}, \quad t\gg 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *На любом компакте $K\subset\mathbb{R}_3$ имеет место оценка*

$$\sup_{x\in K}\left|v_2^3(t,x)-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}\operatorname{div} u_0(x', x_3+\zeta_3)\,d\zeta_3\right| \leq \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t\gg 1,$$

где $c>0$ — константа, зависящая от $\operatorname{diam} K$, $u_0(x)$.

Доказательство леммы 2 проводится дословным повторением рассуждений из доказательства леммы 1.

Лемма 3. *На любом компакте $K\subset\mathbb{R}_3$ имеет место оценка*

$$\sup_{x\in K}\left|v_3^3(t,x)\right| \leq \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t\gg 1, \tag{3.10}$$

где c — константа, зависящая от $\operatorname{diam} K, u_0(x)$.

Доказательство. Оценим $v_3^3(t,x)$ из (3.3). Поскольку в рассматриваемом интеграле $r'\geq\eta$, можно проинтегрировать по частям по ζ_3. Тогда

$$v_3^3(t,x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\eta}^{\infty}\int\limits_{-t^{-\frac{1}{3}}}^{t^{-\frac{1}{3}}}\frac{\zeta_3}{r^2}tJ_0'\left(\frac{r't}{r}\right)\operatorname{div} u_0\, d\zeta_3 dr' d\varphi$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\eta^\infty \frac{\sqrt{r'^2+t^{-\frac{2}{3}}}}{r'} J_0\biggl(\frac{r't}{\sqrt{r'^2+t^{-\frac{2}{3}}}}\biggr)$$

$$\times\,[\operatorname{div} u_0(x'+\zeta'(r',\varphi), x_3+t^{-\frac{1}{3}}) - \operatorname{div} u_0(x'+\zeta'(r',\varphi), x_3-t^{-\frac{1}{3}})]\,dr'd\varphi$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\eta^\infty\int\limits_{-t^{-\frac{1}{3}}}^{t^{-\frac{1}{3}}} J_0\left(\frac{r't}{r}\right)\left[\frac{\zeta_3}{r'r}\operatorname{div} u_0 + \frac{r}{r'}D_{\zeta_3}\operatorname{div} u_0\right] d\zeta_3\,dr'd\varphi.$$

Воспользовавшись уравнением Бесселя (3.2), получим

$$v_3^3(t,x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\eta^\infty \frac{r'^2+t^{-\frac{2}{3}}}{r'^2 t} J_0'\biggl(\frac{r't}{\sqrt{r'^2+t^{-\frac{2}{3}}}}\biggr)$$

$$\times\,[\operatorname{div} u_0(x'+\zeta', x_3+t^{-\frac{1}{3}}) - \operatorname{div} u_0(x'+\zeta', x_3-t^{-\frac{1}{3}})]\,dr'd\varphi$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\eta^\infty \frac{\sqrt{r'^2+t^{-\frac{2}{3}}}}{r'} J_0''\biggl(\frac{r't}{\sqrt{r'^2+t^{-\frac{2}{3}}}}\biggr)$$

$$\times\,[\operatorname{div} u_0(x'+\zeta', x_3+t^{-\frac{1}{3}}) - \operatorname{div} u_0(x'+\zeta', x_3-t^{-\frac{1}{3}})]\,dr'd\varphi$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\eta^\infty\int\limits_{-t^{-\frac{1}{3}}}^{t^{-\frac{1}{3}}} J_0\left(\frac{r't}{r}\right)\left[\frac{\zeta_3}{r'r}\operatorname{div} u_0 + \frac{r}{r'}D_{\zeta_3}\operatorname{div} u_0\right] d\zeta_3\,dr'd\varphi$$

$$= I_1 + I_2 + I_3. \qquad (3.11)$$

Оценим каждый интеграл отдельно. Учитывая свойства функции Бесселя J_0, очевидно, имеем

$$\sup_{x\in K}\bigl|I_1+I_3\bigr| \le \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t \gg 1, \qquad (3.12)$$

где c — положительная константа.

В интеграле I_2 проинтегрируем по частям по r', тогда придем к оценке

$$\sup_{x\in K}\bigl|I_2\bigr| \le \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t \gg 1. \qquad (3.13)$$

В силу (3.11)–(3.13) получим неравенство (3.10).

Лемма 4. *На любом компакте $K \subset \mathbb{R}_3$ имеет место следующая оценка:*

$$\sup_{x\in K}\bigl|v_4^3(t,x)\bigr| \le \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t \gg 1, \qquad (3.14)$$

где c — константа, зависящая от $\operatorname{diam} K, u_0(x)$.

Доказательство. Перепишем четвертое слагаемое в (3.3) следующим образом:

$$v_4^3(t,x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^\eta\int\limits_{-t^{-\frac{1}{3}}}^{t^{-\frac{1}{3}}} \frac{\zeta_3}{r^2} t J_0'\left(\frac{r't}{r}\right)\operatorname{div} u_0\,d\zeta_3 dr'd\varphi$$

$$
= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\eta}\int\limits_{-t^{-\frac{1}{3}}}^{t^{-\frac{1}{3}}} \frac{\zeta_3}{r^2} t J_0'\left(\frac{r't}{r}\right)[\operatorname{div} u_0(x_1 + r'\cos\varphi, x_2 + r'\sin\varphi, x_3 + \zeta_3)
$$

$$
-\operatorname{div} u_0(x_1, x_2, x_3)]\, d\zeta_3\, dr'd\varphi + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\eta}\int\limits_{-t^{-\frac{1}{3}}}^{t^{-\frac{1}{3}}} \frac{\zeta_3}{r^2} t J_0'\left(\frac{r't}{r}\right)\operatorname{div} u_0(x_1, x_2, x_3)\, d\zeta_3 dr' d\varphi. \tag{3.15}
$$

Последний интеграл в (3.15) равен нулю из-за нечетности подынтегральной функции по ζ_3. Оценим первый интеграл. К разности в квадратных скобках применим формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Обозначив $\operatorname{div} u_0$ через f, имеем

$$
\begin{aligned}
&f(x_1 + r'\cos\varphi, x_2 + r'\sin\varphi, x_3 + \zeta_3) - f(x_1, x_2, x_3)\\
&\quad = D_{x_1} f(x_1, x_2, x_3) r'\cos\varphi + D_{x_2} f(x_1, x_2, x_3) r'\sin\varphi + D_{x_3} f(x_1, x_2, x_3)\zeta_3\\
&- \int\limits_0^1 (z-1)\big[D^2_{x_1} f(x_1 + zr'\cos\varphi, x_2 + zr'\sin\varphi, x_3 + z\zeta_3) r'^2\cos^2\varphi + D^2_{x_1x_2} f r'^2 \sin 2\varphi\\
&\quad + D^2_{x_2} f r'^2\sin^2\varphi + D^2_{x_3} f\zeta_3^2 + 2D^2_{x_1x_3} f r'\zeta_3\cos\varphi + 2D^2_{x_2x_3} f r'\zeta_3\sin\varphi\big]\, dz.
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

В силу (3.16) формулу (3.15) можно переписать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
v_4^3(t,x) &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\eta}\int\limits_{-t^{-\frac{1}{3}}}^{t^{-\frac{1}{3}}} \frac{\zeta_3}{r^2} t J_0'\left(\frac{r't}{r}\right)\Bigg[D_{x_3} f(x_1, x_2, x_3)\zeta_3 - \int\limits_0^1 (z-1)\\
&\times \big[D^2_{x_1} f(x_1 + zr'\cos\varphi, x_2 + zr'\sin\varphi, x_3 + z\zeta_3) r'^2\cos^2\varphi + D^2_{x_1x_2} f r'^2\sin 2\varphi\\
&+ D^2_{x_2} f r'^2\sin^2\varphi + D^2_{x_3} f\zeta_3^2 + 2D^2_{x_1x_3} f r'\zeta_3\cos\varphi + 2D^2_{x_2x_3} f r'\zeta_3\sin\varphi\big]\, dz\Bigg] d\zeta_3\, dr' d\varphi\\
&= \sum_{j=1}^{7} I_j.
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Оценим каждое из слагаемых I_j отдельно.

Разобьем I_1 на два слагаемых:

$$
I_1 = \frac{1}{2} D_{x_3} f(x_1, x_2, x_3) \int\limits_{-t^{-\frac{1}{3}}}^{t^{-\frac{1}{3}}} \left(\int\limits_0^{t^{-1}} \frac{\zeta_3^2}{r^2} t J_0'\left(\frac{r't}{r}\right) dr' + \int\limits_{t^{-1}}^{\eta} \frac{\zeta_3^2}{r^2} t J_0'\left(\frac{r't}{r}\right) dr'\right) d\zeta_3 = I_1^1 + I_1^2.
$$

Очевидно,

$$
\sup_{x\in K} \big|I_1^1\big| \le \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t \gg 1, \tag{3.18}
$$

где c — положительная константа.

Интегрируя в I_1^2 по частям по r', нетрудно получить следующую оценку:

$$\sup_{x\in K}\left|I_1^2\right| \le \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t \gg 1. \tag{3.19}$$

Оценим теперь I_2. Обозначая для удобства

$$-\int\limits_0^1 (z-1)D_{x_1}^2 f(x_1 + zr'\cos\varphi, x_2 + zr'\sin\varphi, x_3 + z\zeta_3)\,dz$$

через $f_1(x, r', \varphi, \zeta_3)$, имеем

$$I_2 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{t^{-1}} + \int\limits_{t^{-1}}^{\eta}\right)\int\limits_{-t^{-\frac13}}^{t^{-\frac13}} \frac{\zeta_3}{r^2} tJ_0'\left(\frac{r't}{r}\right) f_1(x, r', \varphi, \zeta_3) r'^2\cos^2\varphi\,d\zeta_3 dr' d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{t^{-1}}\int\limits_{-t^{-\frac13}}^{t^{-\frac13}} \frac{\zeta_3}{r^2} tJ_0'\left(\frac{r't}{r}\right) f_1(x, r', \varphi, \zeta_3) r'^2\cos^2\varphi\,d\zeta_3 dr' d\varphi$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-1}}^{\eta}\int\limits_{-t^{-\frac13}}^{t^{-\frac13}} r' r D_{\zeta_3} J_0\left(\frac{r't}{r}\right) f_1 \cos^2\varphi\,d\zeta_3 dr' d\varphi$$

$$= I_2^1 - \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-1}}^{\eta} J_0\left(\frac{r't}{\sqrt{r'^2 + t^{-2/3}}}\right)$$

$$\times\, r'\sqrt{r'^2 + t^{-2/3}}[f_1(x, r', \varphi, t^{-1/3}) - f_1(x, r', \varphi, -t^{-1/3})]\cos^2\varphi\,dr' d\varphi$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-1}}^{\eta}\int\limits_{-t^{-1/3}}^{t^{-1/3}} r' J_0\left(\frac{r't}{r}\right)\left(rD_{\zeta_3} f_1 + \frac{\zeta_3}{r} f_1\right)\cos^2\varphi\,d\zeta_3 dr' d\varphi$$

$$= I_2^1 + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-1}}^{\eta} \frac{r'^2 + t^{-2/3}}{t} J_0'\left(\frac{r't}{\sqrt{r'^2 + t^{-2/3}}}\right)$$

$$\times\, [f_1(x, r', \varphi, t^{-1/3}) - f_1(x, r', \varphi, -t^{-1/3})]\cos^2\varphi\,dr' d\varphi$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-1}}^{\eta} r'\sqrt{r'^2 + t^{-2/3}} J_0''\left(\frac{r't}{\sqrt{r'^2 + t^{-2/3}}}\right)$$

$$\times\, [f_1(x, r', \varphi, t^{-1/3}) - f_1(x, r', \varphi, -t^{-1/3})]\cos^2\varphi\,dr' d\varphi$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{t^{-1}}^{\eta}\int\limits_{-t^{-1/3}}^{t^{-1/3}} r' J_0\left(\frac{r't}{r}\right)\left(rD_{\zeta_3} f_1 + \frac{\zeta_3}{r} f_1\right)\cos^2\varphi\,d\zeta_3 dr' d\varphi$$

$$= I_2^1 + I_2^2 + I_2^3 + I_2^4. \tag{3.20}$$

Оценим каждый интеграл отдельно. Очевидно, что

$$\sup_{x\in K}\left|I_2^1\right| \le \frac{c}{t^{1/3}}, \quad \sup_{x\in K}\left|I_2^2\right| \le \frac{c}{t}, \quad \sup_{x\in K}\left|I_2^4\right| \le \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t \gg 1. \tag{3.21}$$

Рассмотрим I_2^3. Интегрируя по частям по переменной r', получим оценку

$$\sup_{x\in K}\left|I_2^3\right| \le \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t \gg 1. \tag{3.22}$$

В силу (3.20)–(3.22) имеем

$$\sup_{x\in K}\left|I_2\right| \le \frac{4c}{t^{1/3}}, \quad t \gg 1. \tag{3.23}$$

Повторяя те же рассуждения, что и для I_2, выводим неравенство для I_3, I_4:

$$\sup_{x\in K}\left|I_3+I_4\right| \le \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t \gg 1. \tag{3.24}$$

Оценки I_5, I_6 и I_7 можно провести по той же схеме, что и для I_1, при этом

$$\sup_{x\in K}\left|I_5\right| \le \frac{c}{t^{2/3}}, \quad \sup_{x\in K}\left|I_6+I_7\right| \le \frac{c}{t^{1/3}}, \quad t \gg 1. \tag{3.25}$$

В силу (3.17)–(3.19) и (3.23)–(3.25) приходим к требуемой оценке (3.14).

4. Асимптотическое поведение вектор-функции $w(t,x)$

Теперь оценим третье слагаемое в (2.6). Очевидно,

$$w(t,x) = \begin{pmatrix} w^1(t,x) \\ w^2(t,x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим $w^1(t,x)$.

Лемма 5. *На любом компакте $K \subset \mathbb{R}_3$ имеет место оценка*

$$\sup_{x\in K}\left|w^1(t,x) - \frac{\pi}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}_2} e^{ix'\xi'}\frac{\xi_2}{i|\xi'|}\widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi',0)\,d\xi'\right| \le \frac{c}{t^{1/2}}, \quad t \gg 1,$$

где $c > 0$ — константа, зависящая от $\operatorname{diam} K, u_0(x)$.

Доказательство. Из (2.6) имеем

$$\begin{aligned} w^1(t,x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}_3} e^{ix\xi}\frac{\xi_2}{i|\xi|\xi_3}\sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)\widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{|\xi|\le 1} e^{ix\xi}\frac{\xi_2}{i|\xi|}\sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)\left[\int\limits_{\mathbb{R}_3} e^{-iy'\xi'}\int\limits_0^1 e^{-i\alpha y_3\xi_3}\,d\alpha(-iy_3)\operatorname{div} u_0(y)\,dy\right]d\xi \\ &+ \frac{(-1)^3}{(2\pi)^3}\int\limits_{|\xi|>1} e^{ix\xi}\frac{\xi_2}{i|\xi|^7}\sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)\left[\int\limits_{\mathbb{R}_3} e^{-iy'\xi'}\int\limits_0^1 e^{-i\alpha y_3\xi_3}\,d\alpha(-iy_3)\Delta^3\operatorname{div} u_0(y)\,dy\right]d\xi \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}_3} e^{ix\xi}\frac{\xi_2}{i|\xi|\xi_3}\sin\left(\frac{t\xi_3}{|\xi|}\right)\widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi',0)\,d\xi = w_1^1(t,x)+w_2^1(t,x)+w_3^1(t,x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Аналогично рассуждениям из книги [7, § 3.9] можно получить оценку

$$\sup_{x\in K}\left|w_1^1(t,x)+w_2^1(t,x)\right| \le \frac{c}{t^{3/2}}, \quad t \gg 1, \tag{4.2}$$

где c — положительная константа.

Рассмотрим $w_3^1(t,x)$. Перейдем к сферическим координатам

$$\xi_1 = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2, \quad \xi_2 = \rho\sin\theta_1\cos\theta_2, \quad \xi_3 = \rho\cos\theta_1.$$

Тогда $w_3^1(t,x)$ перепишется в следующем виде:

$$w_3^1(t,x) = \frac{1}{i(2\pi)^{3/2}}\int\limits_0^\infty \rho \int\limits_0^{2\pi}\cos\theta_2\int\limits_0^\pi e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin^2\theta_1}{\cos\theta_1}\sin(t\cos\theta_1) \\ \times \widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi'(\rho,\theta),0)\,d\theta_1 d\theta_2 d\rho. \quad (4.3)$$

Рассмотрим следующий интеграл при $t \gg 1$:

$$J_1 = \int\limits_0^\pi e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin^2\theta_1}{\cos\theta_1}\sin(t\cos\theta_1)\widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi'(\rho,\theta),0)\,d\theta_1$$
$$= \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-t^{-1/2}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-t^{-1/2}}^{\frac{\pi}{2}+t^{-1/2}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}+t^{-1/2}}^{\pi}\right) e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin^2\theta_1}{\cos\theta_1}\sin(t\cos\theta_1)\widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi'(\rho,\theta),0)\,d\theta_1 \\ = J_1^1 + J_1^2 + J_1^3. \quad (4.4)$$

Поскольку оба интеграла J_1^1, J_1^3 оцениваются по одной схеме, рассмотрим, например, J_1^1. Интегрируя по частям по θ_1, получим

$$J_1^1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-t^{-1/2}} e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin\theta_1}{t\cos\theta_1}D_{\theta_1}\cos(t\cos\theta_1)\widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi'(\rho,\theta),0)\,d\theta_1$$
$$= e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin\theta_1\cos(t\cos\theta_1)}{t\cos\theta_1}\widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi'(\rho,\theta),0)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-t^{-1/2}}$$
$$- \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-t^{-1/2}} e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\cos(t\cos\theta_1)}{t}\left[\frac{iD_{\theta_1}(x\xi(\rho,\theta))\sin\theta_1}{\cos\theta_1}\widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi'(\rho,\theta),0)\right.$$
$$\left. + \widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi'(\rho,\theta),0) + \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}D_{\theta_1}\widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi'(\rho,\theta),0)\right]d\theta_1$$
$$- \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-t^{-1/2}} e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\cos(t\cos\theta_1)}{t}\frac{\sin^2\theta_1}{\cos^2\theta_1}\widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi'(\rho,\theta),0)\,d\theta_1 \\ = J_1^{1,1} + J_1^{1,2} + J_1^{1,3}.$$

В силу того, что при больших t выполнено неравенство

$$\left|\cos\theta_1\right| \geq \frac{1}{2t^{1/2}}, \quad \theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{t^{1/2}}\right],$$

будем иметь

$$\left|J_1^{1,1} + J_1^{1,2}\right| \leq \frac{c(\rho,\theta_2)}{t^{1/2}}, \quad t \gg 1.$$

Оценим третье слагаемое в J_1^1:

$$J_1^{1,3} = -\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}-t^{-1/2}}\right) e^{ix\xi(\rho,\theta)} \frac{\cos(t\cos\theta_1)}{t} \frac{\sin^2\theta_1}{\cos^2\theta_1} \widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi'(\rho,\theta),0)\,d\theta_1$$
$$= J_1^{1,3,1} + J_1^{1,3,2},$$

где $\delta > 0$ — достаточно малое фиксированное число такое, что

$$\left|\cos\theta_1\right| \ge \frac{\frac{\pi}{2}-\theta_1}{2}, \quad \theta_1 \in \left[\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}-\frac{1}{t^{1/2}}\right].$$

Очевидно,

$$\left|J_1^{1,3,1}\right| \le \frac{c(\rho,\theta_2)}{t}, \quad \left|J_1^{1,3,2}\right| \le \frac{c(\rho,\theta_2)}{t^{1/2}}, \quad t \gg 1.$$

Следовательно,

$$\left|J_1^1\right| \le \frac{3c(\rho,\theta_2)}{t^{1/2}}, \quad t \gg 1. \tag{4.5}$$

Аналогично получаем, что

$$\left|J_1^3\right| \le \frac{c(\rho,\theta_2)}{t^{1/2}}, \quad t \gg 1. \tag{4.6}$$

Рассмотрим J_1^2 из (4.4). Используя явные выражения для функции $\xi(\rho,\theta)$, имеем

$$\begin{aligned}
J_1^2 &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}-t^{-1/2}}^{\frac{\pi}{2}+t^{-1/2}} e^{ix\xi(\rho,\theta)} \frac{\sin^2\theta_1}{\cos\theta_1} \sin(t\cos\theta_1) \widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi'(\rho,\theta),0)\,d\theta_1 \\
&= \int\limits_{-t^{-1/2}}^{t^{-1/2}} e^{i(x_1\rho\cos\theta_1\sin\theta_2 + x_2\rho\cos\theta_1\cos\theta_2 - x_3\rho\sin\theta_1)} \frac{\cos^2\theta_1}{\sin\theta_1} \sin(t\sin\theta_1) \\
&\qquad \times \widehat{\operatorname{div} u_0}(\rho\cos\theta_1\sin\theta_2, \rho\cos\theta_1\cos\theta_2, 0)\,d\theta_1 \\
&= \int\limits_{-t^{-1/2}}^{t^{-1/2}} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{\sin\theta_1} \big[e^{i(x_1\rho\cos\theta_1\sin\theta_2 + x_2\rho\cos\theta_1\cos\theta_2 - x_3\rho\sin\theta_1)} \cos^2\theta_1 \\
&\qquad \times \widehat{\operatorname{div} u_0}(\rho\cos\theta_1\sin\theta_2, \rho\cos\theta_1\cos\theta_2, 0) \\
&\qquad - e^{i(x_1\rho\sin\theta_2 + x_2\rho\cos\theta_2)} \widehat{\operatorname{div} u_0}(\rho\sin\theta_2, \rho\cos\theta_2, 0)\big]\,d\theta_1 \\
&\quad + \int\limits_{-t^{-1/2}}^{t^{-1/2}} e^{i(x_1\rho\sin\theta_2 + x_2\rho\cos\theta_2)} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{\sin\theta_1} \widehat{\operatorname{div} u_0}(\rho\sin\theta_2, \rho\cos\theta_2, 0)\,d\theta_1 \\
&= J_1^{2,1} + J_1^{2,2}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Разложим разность в квадратных скобках в J_1^2 по формуле Тейлора по переменной θ_1 с остаточным членом в интегральной форме. Фиксируя параметры ρ, θ_2, введем обозначение

$$f(\theta_1) = e^{i(x_1\rho\cos\theta_1\sin\theta_2 + x_2\rho\cos\theta_1\cos\theta_2 - x_3\rho\sin\theta_1)}$$
$$\times \cos^2\theta_1 \widehat{\operatorname{div} u_0}(\rho\cos\theta_1\sin\theta_2, \rho\cos\theta_1\cos\theta_2, 0).$$

Очевидно,

$$f(\theta_1) - f(0) = f'(0)\theta_1 + \int\limits_0^{\theta_1} f''(s)(\theta_1 - s)\,ds. \tag{4.8}$$

Заметим, что последний член в (4.8) есть $O(\theta_1^2)$ при $t \to \infty$. Используя (4.8), перепишем интеграл $J_1^{2,1}$ в виде

$$J_1^{2,1} = \int\limits_{-t^{-1/2}}^{t^{-1/2}} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{\sin\theta_1}\left[f'(0)\theta_1 + \int\limits_0^{\theta_1} f''(s)(\theta_1 - s)\,ds\right]d\theta_1.$$

Первый интеграл в последнем выражении равен нулю в силу нечетности подынтегральной функции по θ_1. Отсюда получим следующее неравенство:

$$\left|J_1^{2,1}\right| \le \frac{c(\rho,\theta_2)}{t^{1/2}}, \quad t \gg 1. \tag{4.9}$$

Оценим $J_1^{2,2}$ из (4.7). Для этого рассмотрим интеграл вида

$$\int\limits_{-t^{-1/2}}^{t^{-1/2}} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{\sin\theta_1}\,d\theta_1.$$

Справедлива следующая оценка (см. [7, § 3.9]):

$$\int\limits_{-t^{-1/2}}^{t^{-1/2}} \left|\frac{\sin(t\sin\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin(t\theta)}{\theta}\right| d\theta \le \frac{c}{t^{1/2}}, \quad t \gg 1.$$

Учитывая эту оценку и неравенство для интеграла Дирихле

$$\left|\int\limits_{-t^{-1/2}}^{t^{-1/2}} \frac{\sin(t\theta)}{\theta}\,d\theta - \pi\right| \le \frac{c}{t^{1/2}}, \quad t \gg 1,$$

получим

$$\left|\int\limits_{-t^{-1/2}}^{t^{-1/2}} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{\sin\theta_1}\,d\theta_1 - \pi\right| \le \frac{2c}{t^{1/2}}, \quad t \gg 1.$$

Используя последнюю оценку, имеем

$$\left|J_1^{2,2} - \pi e^{i(x_1\rho\sin\theta_2 + x_2\rho\cos\theta_2)}\widehat{\operatorname{div} u_0}(\rho\sin\theta_2, \rho\cos\theta_2, 0)\right| \le \frac{c(\rho,\theta_2)}{t^{1/2}}, \quad t \gg 1. \tag{4.10}$$

В силу (4.3)–(4.7), (4.9), (4.10) при больших t имеет место неравенство

$$\left| w_3^1(t,x) - \frac{\pi}{i(2\pi)^{3/2}} \int\limits_0^\infty \rho \int\limits_0^{2\pi} \cos\theta_2 e^{i(x_1\rho\sin\theta_2 + x_2\rho\cos\theta_2)} \times \widehat{\operatorname{div} u_0}(\rho\sin\theta_2, \rho\cos\theta_2, 0)\,d\theta_2 d\rho \right| \le \frac{c}{t^{1/2}}. \tag{4.11}$$

Сделав замену переменных в (4.11)

$$s_1 = \rho \sin\theta_2, \quad s_2 = \rho\cos\theta_2,$$

получим

$$\left| w_3^1(t,x) - \frac{\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}_2} e^{ix's} \frac{s_2}{i|s|} \widehat{\operatorname{div} u_0}(s,0)\, ds \right| \le \frac{c}{t^{1/2}}, \quad t \gg 1. \tag{4.12}$$

Учитывая представление (4.1) и неравенства (4.2), (4.12), приходим к требуемой оценке. Лемма доказана.

Лемма 6. *На любом компакте $K \subset \mathbb{R}_3$ имеет место следующая оценка:*

$$\sup_{x\in K} \left| w^2(t,x) + \frac{\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}_2} e^{ix'\xi'} \frac{\xi_1}{i|\xi'|} \widehat{\operatorname{div} u_0}(\xi',0)\, d\xi' \right| \le \frac{c}{t^{1/2}}, \quad t \gg 1,$$

где $c > 0$ — константа, зависящая от $\operatorname{diam} K$, $u_0(x)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5.

5. Доказательство теоремы

Решение задачи Коши (1.1) имеет вид (2.6):

$$u^j(t,x) = \tilde{u}^j(t,x) + w^j(t,x),\ j = 1,2, \quad u^3(t,x) = \tilde{u}^3(t,x) + v^3(t,x),$$

где функция $v^3(t,x)$ представима в виде (3.3). Оценки для каждого из слагаемых установлены в леммах 1–6. Суммируя их и учитывая (2.7), получаем соответствующие неравенства для каждой компоненты решения, из которых вытекает сходимость (1.3) при $t \to \infty$, а также скорость сходимости.

Автор выражает благодарность Г. В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Т. 1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал «Гео» Изд-ва СО РАН, 2003.
2. *Демиденко Г. В.* Изоморфные свойства одного класса дифференциальных операторов и их приложения // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1036–1056.
3. *Демиденко Г. В.* О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}_n$ // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1028–1037.
4. *Масленникова В. Н.* Оценки в L_p и асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для системы Соболева // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1968. Т. 103. С. 117–141.
5. *Гальперн С. А.* Задача Коши для уравнения С. Л. Соболева // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 4. С. 758–774.
6. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963.
7. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.

Статья поступила 2 июня 2006 г.

Бондарь Лина Николаевна
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
b_lina@ngs.ru