Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 519.14

О СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ЛОКАЛЬНО $GQ(4,t)$ ГРАФАХ

А. А. Махнев

Аннотация. Неориентированный v-вершинный граф, в котором степени всех вершин равны k, каждое ребро принадлежит λ треугольникам и пересечение окрестностей любых двух вершин, находящихся на расстоянии 2, содержит μ вершин, называется вполне регулярным с параметрами (v,k,λ,μ). Вполне регулярный граф диаметра 2 называется сильно регулярным. Доказано несуществование вполне регулярных локально $GQ(4,t)$ графов для $(t,\mu)=(4,10)$ и (8,30). Тем самым проблема классификации сильно регулярных локально $GQ(4,t)$ графов редуцирована к изучению локально $GQ(4,6)$ графов с параметрами (726,125,28,20).

Ключевые слова: сильно регулярный граф, обобщенный четырехугольник, гиперовал.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $\Gamma(a)=\Gamma_1(a)$, $a^\perp=\{a\}\cup\Gamma(a)$. Если граф Γ зафиксирован, то вместо $\Gamma(a)$ будем писать $[a]$. Для множества вершин X графа Γ через $X^\perp$ обозначим $\bigcap\limits_{x\in X} x^\perp$. Если не оговорено иное, то слово «подграф» будет означать «индуцированный подграф».

Пусть $\mathscr{F}$ — некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально $\mathscr{F}$ графом*, если $[a]$ лежит в $\mathscr{F}$ для любой вершины a графа Γ. Если при этом класс $\mathscr{F}$ состоит из графов, изоморфных некоторому графу Δ, то граф Γ назовем *локально Δ графом*.

Пусть Γ — граф, $a,b\in\Gamma$, число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначается через $\mu(a,b)$ (через $\lambda(a,b)$), если a,b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a]\cap[b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным* с параметрами (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф* с параметрами (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00046), РФФИ–ГФЕН Китая (грант 05–01–39000), программы отделения математических наук РАН и программы совместных исследований с Сибирским отделением РАН.

любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Г. Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2. Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный многодольный граф $\{M_1; \dots; M_n\}$ с долями M_i порядка m_i. Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то указанный граф обозначается через $K_{n\times m}$.

Геометрия G *ранга* 2 — это система инцидентности с множеством точек P и множеством блоков $\mathscr{B}$, не имеющая кратных блоков. При этом каждый блок можно отождествить с множеством инцидентных ему точек и инцидентность становится обычным включением. Две точки из P называются *коллинеарными*, если они лежат в общем блоке. *Точечный граф* геометрии G — это граф на множестве точек P, в котором две точки смежны, если они различны и коллинеарны. Аналогично определяется блочный граф. Геометрию назовем *связной*, если связен ее точечный граф.

Для $a \in P$ *вычетом* G_a называется геометрия с множеством точек P_a, коллинеарных a, и множеством блоков $\mathscr{B}_a = \{B - \{a\} \mid a \in B \in \mathscr{B}\}$.

Пусть $a \in P$, $B \in \mathscr{B}$ и $a \notin B$ (пара (a, B) называется *антифлагом*). Число точек из B, коллинеарных a, обозначим через $f(a, B)$. Геометрия G называется *φ-однородной*, если $f(a, B)$ равна 0 или φ для любого антифлага (a, B); G называется *сильно φ-однородной*, если $f(a, B) = \varphi$ для любого антифлага (a, B). Если любые два блока из $\mathscr{B}$ пересекаются не более чем по одной точке, то множество блоков называется *множеством прямых* и обозначается через $\mathscr{L}$, а геометрия $(P, \mathscr{L})$ называется *частичным пространством прямых*. Частичное пространство прямых имеет порядок (s, t), если каждая прямая содержит $s + 1$ точек и каждая точка лежит на $t + 1$ прямых.

Сильно α-однородное частичное пространство прямых порядка (s, t) называется *α-частичной геометрией* и обозначается через $pG_\alpha(s, t)$. Если $\alpha = 1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается через $GQ(s, t)$. Коклика в точечном графе для $GQ(s, t)$, состоящая из $st + 1$ точек, называется *овоидом*. *Спредом* в $GQ(s, t)$ называется семейство из $st+1$ прямых, образующих разбиение множества точек. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t))$ сильно регулярен с $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = s - 1 + t(\alpha - 1)$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

Геометрия G называется *расширением* α-частичных геометрий, если она связна и вычет в каждой точке является $pG_\alpha(s, t)$ для подходящих (s, t) (обозначение EpG_α). Ввиду связности порядок геометрии (s, t) не зависит от выбора вычета, и такое расширение обозначается через $EpG_\alpha(s, t)$. Геометрия EpG_α называется *треугольной*, если любые три попарно коллинеарные точки лежат в общем блоке (необходимо единственном). Изучение треугольных расширений геометрий G из класса pG_α опирается на изучение связных локально $\Gamma(G_a)$ графов (и равносильно этому изучению в случае $\alpha = 1$).

В работе Бюкенхаута и Юбо [1] рассматривается задача классификации локально полярных пространств, в частности, локально $GQ(s, t)$ графов. Заметим, что для любого фиксированного значения s задача классификации связных локально $GQ(s, t)$ графов алгоритмически разрешима. Действительно, для любого $s > 1$ существует лишь конечное число обобщенных четырехугольников $GQ(s, t)$ (по неравенству Хигмена имеем $t \le s^2$), и в [2] получена граница для диаметра связного локально $GQ(s, t)$ графа, зависящая только от s. Поэтому для данного $s > 1$ существует лишь конечное число связных локально $GQ(s, t)$

графов. Для $s=1$ и для любого t существует единственный обобщенный четырехугольник $GQ(1,t)$ (это множество вершин и ребер регулярного полного двудольного графа степени $t+1$), и число таких четырехугольников бесконечно. Однако любой связный локально $K_{t+1,t+1}$ граф совпадает с полным трехдольным графом $K_{3\times(t+1)}$. Таким образом, алгоритмически разрешима и задача классификации сильно регулярных локально $GQ(4,t)$ графов, рассматриваемая в данной работе.

В [1] получена классификация связных локально $GQ(s,t)$ графов в случае $s=2$.

Пример 1. Каждый локально $GQ(2,t)$ граф может быть получен с помощью следующей конструкции. Пусть $\mathscr{P}$ — полярное пространство ранга 3 и порядка 2, $\mathscr{H}$ — геометрическая гиперплоскость из $\mathscr{P}$ (см. [2, пример 9.6]). Удалив из $\mathscr{P}$ точки и прямые $\mathscr{H}$, получим геометрию $\mathscr{P}_{\mathscr{H}}$, являющуюся треугольным расширением $GQ(2,t)$. Пусть Γ — точечный граф геометрии $\mathscr{P}_{\mathscr{H}}$. В следующих случаях возникают сильно регулярные графы:

(1) $\mathscr{P}=Q_5^+(2)$ и $\mathscr{H}=x^\perp$ для некоторой точки $x\in\mathscr{P}$, Γ имеет параметры $(16,9,4,6)$ $(t=1)$;

(2) $\mathscr{P}=Q_6(2)$ и $\mathscr{H}=Q_5^-(2)$, Γ имеет параметры $(36,15,6,6)$ $(t=2)$;

(3) $\mathscr{P}=Q_6(2)$ и $\mathscr{H}=Q_5^+(2)$, Γ имеет параметры $(28,15,6,10)$ $(t=2)$;

(4) $\mathscr{P}=Q_7^-(2)$ и $\mathscr{H}=x^\perp$ для некоторой точки $x\in\mathscr{P}$, Γ имеет параметры $(64,27,10,12)$ $(t=4)$.

Описание связных локально $GQ(3,t)$ графов следует из работ Браувера и Блокхейса [3], автора [4, 5], автора и Д. В. Падучих [6]. Отметим также работы Д. В. Пасечника [7, 8], описавшего локально $GQ(3,3)$ и локально $GQ(3,9)$ графы с помощью компьютерных вычислений, и статью автора [9], в которой доказано несуществование псевдогеометрического графа для $GQ(3,6)$.

Пример 2. Пусть Γ является сильно регулярным локально $GQ(3,t)$ графом. Тогда Γ — один из следующих графов:

(1) частное графа Джонсона $\overline{J}(8,4)$ $(t=1)$;

(2) локально $W(3)$ граф с группой автоморфизмов $U_5(2).2$ (граф ранга 3 для $U_5(2)$, $t=3$);

(3) граф МакЛафлина $(t=9)$.

В данной работе задача описания сильно регулярных локально $GQ(4,t)$ графов редуцируется к изучению графов с параметрами $(726,125,28,20)$ и неглавными собственными значениями 15 и -7 кратностей 225 и 500 соответственно.

Предложение 1. *Пусть Γ — сильно регулярный локально $GQ(4,t)$ граф с параметрами (v,k,λ,μ). Тогда пара (t,μ) совпадает с одной из пар:* $(1,4)$, $(2,10)$, $(2,18)$, $(4,10)$, $(4,34)$, $(6,20)$, $(8,30)$ *или* $(8,66)$.

Если $(t,\mu)=(1,4)$, то по теореме 1 из [3] Γ является частным графа Джонсона $\overline{J}(10,5)$. Существование и единственность локально $GQ(4,2)$ графа с параметрами $(126,45,12,18)$ см. в [10, с. 400]. Это граф на множестве векторов нормы 1 в 6-мерном ортогональном пространстве над $GF(3)$ типа «$-$» с отношением смежности, задаваемым ортогональностью, имеющий группу автоморфизмов $PO_6^-(3)$. По теореме 2 в [11] не существует вполне регулярных локально $GQ(4,2)$ графов с $\mu=10$. По предложению 9 в [1] $GQ(4,4)$ не содержит 34-точечных гиперовалов. Несуществование локально $GQ(4,8)$ графа с параметрами $(486,165,36,66)$ доказано автором в [12].

Теорема. *Не существует вполне регулярных локально $GQ(4,t)$ графов с параметрами (v,k,λ,μ), где $(t,\mu)=(4,10)$ или $(8,30)$.*

В § 1 приведены некоторые вспомогательные результаты, в конце параграфа доказано предложение 1. В § 2 рассмотрены сильно регулярные локально $GQ(t,t)$ графы с $\mu=2t+2$ и установлено несуществование сильно регулярных локально $GQ(4,4)$ графов с $\mu=10$. Случай $(t,\mu)=(8,30)$ рассмотрен в § 3 (выяснено строение гиперовалов) и § 4.

Подмножество Λ обобщенного четырехугольника называется *гиперовалом*, если любая прямая пересекает Λ по 0 или 2 точкам, т. е. гиперовал в $GQ(s,t)$ — это регулярный подграф без треугольников степени $t+1$, имеющий четное число вершин. Известно (см. [1]), что μ-подграфы в локально $GQ(s,t)$ графах являются гиперовалами. Для подграфа Δ графа Γ через $X_i(\Delta)$ обозначим множество всех вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных с i вершинами из Δ, и положим $x_i(\Delta)=|X_i(\Delta)|$. Для двудольного подграфа Δ обобщенного четырехугольника прямую L назовем *секущей, касательной* и *внешней прямой*, если $L\cap\Delta$ содержит две, одну и нуль вершин соответственно; точку, смежную с ребром Δ, назовем *реберной*.

§ 1. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Пусть Γ — локально $GQ(s,t)$-граф. Тогда максимальные клики из Γ состоят из $s+2$ точек (такие клики мы будем называть блоками), каждая точка лежит в $(t+1)(st+1)$ блоках, любые две смежные точки лежат в $t+1$ общих блоках и любые два блока пересекаются не более чем по двум точкам.*

Доказательство. Все утверждения следуют из определения расширения и свойств GQ [13].

Лемма 1.2. *Пусть Λ является гиперовалом в обобщенном четырехугольнике $GQ(s,t)$, $\mu=|\Lambda|$. Тогда μ четно и верны неравенства $\mu_*\le\mu\le\mu^*$, где $\mu_*=\max\{2(t+1),(s+1)(t+2-s)\}$, $\mu^*=2(st+1)$. Далее, если $\mu=(s+1)(t+2-s)$ ($\mu=\mu^*$), то для любой точки $a\notin\Lambda$ точно $(t+2-s)/2$ прямых из $a^\perp$ (любая прямая) пересекает Λ по двум точкам.*

Доказательство. Оценки для μ и четность μ следуют из лемм 3.9, 3.11 в [2]. Если $\mu=(s+1)(t+2-s)$, то из доказательства леммы 3.11 в [2] следует, что для $a\notin\Lambda$ число прямых из $a^\perp$, не пересекающих Λ, равно $(s+t)/2$.

Если $\mu=\mu^*$, то по лемме 3.9(b) из [2] каждая прямая пересекает Λ (естественно по двум точкам).

Лемма 1.3. *Если Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v,k,λ,μ), то*

(1) *$k(k-\lambda-1)=\mu(v-k-1)$ (прямоугольное соотношение);*

(2) *кратности отличных от k собственных значений $r>0$ и $l<0$ равны*

$$f=\frac{-k(l+1)(k-l)}{(k+rl)(r-l)}\quad\text{и}\quad g=\frac{k(r+1)(k-r)}{(k+rl)(r-l)}\quad\text{соответственно}$$

(требование, что данные дроби должны быть натуральными числами, называется условием целочисленности);

(3) *либо Γ имеет параметры $(4\mu+1,2\mu,\mu-1,\mu)$ (половинный случай), либо $(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)=n^2$ для подходящего натурального числа n ($n=r-l$) и собственные значения r и l целые.*

Доказательство. Все утверждения леммы хорошо известны и могут быть найдены, например в [10, гл. 1].

Лемма 1.4. *Пусть Γ — связный граф, в котором μ-подграфы регулярны одной и той же степени, не являются кликами и имеют одно и то же число вершин. Тогда Γ — регулярный граф.*

Доказательство. Пусть a, b — пара смежных вершин из Γ, c — произвольная вершина из $[a] - [b]$. Если $\mu = |[b] \cap [c]|$ и α – степень μ-графа $[b] \cap [c]$, то вершина c смежна с $\mu - \alpha - 1$ вершинами из $[b] - a^{\perp}$. Теперь число ребер из $[b] - a^{\perp}$ в $[a] - b^{\perp}$ равно $|[b] - a^{\perp}|(\mu - \alpha - 1)$, а число ребер из $[a] - b^{\perp}$ в $[b] - a^{\perp}$ равно $|[a] - b^{\perp}|(\mu - \alpha - 1)$. Отсюда $|[b] - [a]| = |[a] - [b]|$ и, следовательно, $|[a]| = |[b]|$.

Лемма 1.5. *Пусть Γ — связный граф, в котором μ-подграфы изоморфны $K_{2\times u}$ для некоторой константы $u \geq 2$. Тогда Γ — вполне регулярный граф и каждая пара несмежных вершин из Γ содержится в единственном $K_{3\times u}$-подграфе из Γ.*

Доказательство. По лемме 1.4 Γ — регулярный граф. Пусть $a \in \Gamma$, $\Lambda = \Gamma(a)$. По лемме 1.4 Λ является регулярным графом степени λ_a. Так как для $b \in \Lambda$ степень a в графе $\Gamma(b)$ совпадает с λ_a, то $\lambda_a = \lambda_b$ и в силу связности Γ — реберно регулярный граф.

Пусть a_1, a_2 — несмежные вершины из Γ, $\{b_1, \ldots, b_u\}$ и $\{c_1, \ldots, c_u\}$ — различные доли $K_{2\times u}$-подграфа $[a_1] \cap [a_2]$. Если $u = 2$, то $\{a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2\}$ — единственный $K_{3\times u}$-подграф из Γ, содержащий a_1, a_2.

Пусть $u \geq 3$ и $\{a_1, \ldots, a_u\}$ и $\{c_1, \ldots, c_u\}$ — различные доли $K_{2\times u}$-подграфа $[b_1] \cap [b_2]$. Тогда $\{a_1, \ldots, a_u; b_1, \ldots, b_u\}$ — μ-подграф любой пары вершин из $\{c_1, \ldots, c_u\}$. Отсюда $\{a_1, \ldots, a_u; b_1, \ldots, b_u; c_1, \ldots, c_u\}$ является $K_{3\times u}$-подграфом из Γ. Единственность следует из замкнутости этого подграфа относительно взятия μ-подграфов.

Лемма 1.6. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ), Δ — индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и степенями вершин $d_1, \ldots, d_N$. Тогда $(v - N) - (kN - 2M) + \left(\lambda M + \mu\left(\binom{N}{2} - M\right) - \sum\limits_{i=1}^{N} \binom{d_i}{2}\right) = x_0 + \sum\limits_{i=3}^{N} \binom{i-1}{2} x_i$, где $x_i = x_i(\Delta)$.*

Доказательство см. в [9, лемма 1].

Лемма 1.7. *Точечный граф обобщенного четырехугольника порядка $(4, t)$ не содержит $K_{4,6}$-подграфов.*

Доказательство см. в [13, теорема и следствие].

Лемма 1.8. *Пусть псевдогеометрический граф Γ для обобщенного четырехугольника порядка $(4, t)$ содержит $K_{4,n}$-подграф $\Delta = \{a_1, \ldots, a_4; b_1, \ldots, b_n\}$, $X_i = X_i(\Delta)$, $x_i = |X_i|$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = t(n-4)(n-5)/2 - 3(n-1)(n-6)/2$;
(2) *если* $n = 5$ *и* $x_0 \neq 0$, *то* $t = 4$;
(3) $n < 7$, *и если* $n = 6$, *то* $t = 6$.

Доказательство. Число вершин N подграфа Δ равно $4 + n$, а число его ребер — $M = 4n$, степени вершин равны $d_1 = \cdots = d_4 = n$, и $d_i = 4$ для $i > 4$. По лемме 1 имеем $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = t(n-4)(n-5)/2 - 3(n-1)(n-6)/2$.

Если $n = 5$ и $w \in K_0$, то $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = 6$. Число 2-путей с началом w и концом в Δ равно $9(t+1)$. С другой стороны, число таких 2-путей не больше $4 + 3 \cdot 2 + 2(4t+1)$, если $[w]$ содержит точку из K_4, и не больше $3 \cdot 5 + 2(4t-1)$, если $[w]$ не пересекает K_4. Отсюда $9t + 9 \le 8t + 13$ и $t \le 4$. Утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) следует из теоремы [13].

Лемма 1.9. *Пусть обобщенный четырехугольник порядка $(4,t)$ содержит $K_{4,n}$-подграф Δ, $n \ge 5$, $X_i = X_i(\Delta)$, $x_i = x_i(\Delta)$. Тогда $n = 5$, $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = 6$ и $x_0 = x_4 = 0$.*

Доказательство. Все утверждения, кроме равенства $x_4 = 0$, следуют из лемм 1.7, 1.8.

Пусть точка $w \in X_4$ смежна с $b_1, \dots, b_4$. Положим $\Sigma = \Delta - \{b_5\}$, $L_i = X_i(\Sigma)$ и $y_i = |L_i|$. По лемме 1.6 $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 9$. Точка w смежна с четырьмя вершинами, лежащими на касательных к Δ из $b_5^\perp$. Симметрично b_5 смежна с четырьмя вершинами, лежащими на касательных к Δ из $w^\perp$. Поэтому $t \ge 8$. Если $t \ge 11$, то $[w] \cap [b_5]$ содержит по крайней мере 4 точки из L_0; противоречие с тем, что $y_0 + \sum \binom{i-1}{2} y_i = 9$. Итак, $t = 8$ и $[w] \cap [b_5]$ содержит единственную точку u из L_0. Если u' — другая точка из L_0, то она не смежна с вершиной z из $\{w, b_5\}$ и подграф $[u'] \cap [z]$ содержит по крайней мере 4 точки из L_1. Поэтому $[u']$ содержит не менее четырех точек из $Y_3 \cup Y_4$; противоречие. Отсюда $y_3 = 2$, $x_4 = 1$ и $x_3 = 3$.

Пусть $\Omega = \Delta \cup \{w\}$, $M_i = X_i(\Omega)$, $z_i = |M_i|$. По лемме 1.6 имеем $z_0 + \sum \binom{i-1}{2} z_i = 10$. С другой стороны, M_3 содержит по 4 вершины, лежащие на прямых $\{w, b_i\}^\perp$ и $\{a_j, b_5\}^\perp$, и 3 вершины из K_3; противоречие.

Лемма 1.10. *Пусть обобщенный четырехугольник Γ порядка $(4,t)$ содержит $K_{m,n}$-подграф Δ, $X_i = X_i(\Delta)$ и $x_i = |X_i|$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $m = n = 5$, то каждая точка из $\Gamma - \Delta$ смежна с двумя вершинами из Δ;*

(2) *если $m = 3$, то $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = 3n^2 - 28n + 81$, $n \le 9$, причем в случае $n = 9$ параметр t равен 8 и $x_2 = 81$, $x_3 = 72$;*

(3) *если $m = 4$, то $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = t(n-4)(n-5)/2 - 3(n-1)(n-6)/2$, причем в случае $n = 4$ и $x_0 = 9$ получим $x_1 = 8(t-3)$, $x_2 = 12(t+1)$ и в Γ имеются 2 овоида, каждый из которых содержит X_0, долю из Δ и все точки из X_1, смежные с вершинами другой доли.*

Доказательство. По лемме 1.4.1 из [14] $(m-1)(n-1) \le s^2$, причем в случае равенства либо $m = n = s + 1$ и каждая точка из $\Gamma - \Delta$ смежна с двумя вершинами из Δ, либо $s < t$, $n = 1 + t$, $m = 1 + s^2/t$.

Поэтому в случае $s = 4$ равенство $m = 3$ влечет $n \le 9$. По лемме 1.6 $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = 3n^2 - 28n + 81$. Пусть $n = 9$. По лемме 1.4.1 из [14] $t = 8$, поэтому $x_2 = 81$ и $x_3 = 72$.

Пусть $m = 4$. По лемме 1.6 $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = t(n-4)(n-5)/2 - 3(n-1)(n-6)/2$. Допустим, что $x_0 = 9$. Тогда $\sum x_i = 20t - 3$ и $\sum i x_i = 32t$. Отсюда $x_1 = 8(t-3)$, $x_2 = 12(t+1)$. Далее, прямая, пересекающая X_1, содержит 2 точки из X_1, смежные с вершинами из разных долей Δ. Таким образом, Γ содержит 2 овоида T_1, T_2, в каждом из которых лежат X_0, доля из Δ и все точки из X_1, смежные с вершинами другой доли. Лемма доказана.

Будем говорить, что *пара овоидов* из утверждения (3) леммы 1.10 *отвечает $K_{4,4}$-подграфу* Δ.

Лемма 1.11. *Пусть Γ — регулярный граф без треугольников степени k на $2k+2$ вершинах. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Γ *получается удалением из $K_{2\times(k+1)}$ максимального паросочетания;*

(2) Γ *является 2-кокликовым расширением пятиугольника;*

(3) $k=3$ *и Γ — однозначно определенный граф, в котором $\Gamma_2(a)$ является 3-путем для любой вершины a.*

Доказательство. Если $\Gamma_3(a)$ содержит некоторую вершину a^*, то $a^\perp \cup b^\perp$ содержит все вершины из Γ и выполняется утверждение (1).

Пусть Γ — граф диаметра 2. Предположим, что $[a]=[b]$ для различных вершин $a,b\in\Gamma$. Положим $\Sigma=\Gamma-(a^\perp\cup b^\perp)$. Тогда $|\Sigma|=k$, причем $[c]\cap\Sigma$ является $(k-2)$-кокликой из Σ для $c\in[a]$. Поэтому $|\Sigma(x)|\le 2$ для любой вершины $x\in\Sigma$. Значит, $[x]$ содержит не менее $k-2$ вершин из $[a]$. С другой стороны, число ребер между $[a]$ и Σ равно $k(k-2)$, поэтому Σ — регулярный граф степени 2. Если xy — ребро из Σ, то $[x]\cap[y]$ не пересекает $[a]$ (иначе получится треугольник), следовательно, $2(k-2)\le k$. Отсюда $k=4$, причем легко понять, что Γ является 2-кокликовым расширением пятиугольника.

Пусть теперь $|[a]=[b]|<k$ для несмежных вершин $a,b\in\Gamma$. Так как $[c]\cap\Gamma_2(a)$ является $(k-1)$-кокликой для любой вершины $c\in[a]$, то $|[x]\cap\Gamma_2(a)|\le 2$ для любой вершины $x\in\Gamma_2(a)$. Пусть β_i — число вершин степени i в $\Gamma_2(a)$. Тогда $\beta_1+\beta_2=k+1$, $(k-1)\beta_1+(k-2)\beta_2=k(k-1)$, поэтому $\beta_1=2$, $\beta_2=k-1$. Пусть xy — ребро из $\Gamma_2(a)$, где $|[x]\cap\Gamma_2(a)|=1$. Тогда $[x]\cap[y]$ не пересекает $[a]$ и $2k-3\le k$. Отсюда $k=3$ и $\Gamma_2(a)$ является 3-путем для любой вершины a. Лемма доказана.

Докажем предложение 1. Пусть Γ является сильно регулярным локально $GQ(4,t)$ графом с параметрами (v,k,λ,μ) и наименьшим собственным значением $-m$. Тогда $k=20t+5$, $\lambda=4t+4$ и ввиду прямоугольного соотношения параметр μ делит $80(4t+1)t$. Далее, Γ не является графом в половинном случае, поэтому $(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)=(4t-\mu+6)^2+64t=n^2$ для некоторого натурального числа n.

Если $t=1$, то получим следующие возможности для (μ,n,m): (4,10,3) или (10,8,5). Однако в случае $n=8$ нарушено условие целочисленности: 80 не делит $25\cdot 28\cdot 2$. Если $t=2$, то имеем только следующие возможности для (μ,n,m): (10,12,7) или (18,12,9). Если $t=4$, то (μ,n,m) может быть либо (10,20,5), либо (34,20,17).

Если $t=6$, то имеем такие возможности для (μ,n,m): (20,22,7), (40,22,17) или (50,28,25). В случаях $\mu=40$ или 50 нарушено условие целочисленности. Если $t=8$, то мы получим следующие возможности для (μ,n,m): (30,24,9) или (66,36,33). Если $t=11$, то (μ,n,m) может быть только (90,48,45). Однако в этом случае нарушено условие целочисленности: $90\cdot 48$ не делит $225\cdot 270\cdot 44$.

Если $t=12$, то имеем следующие возможности для (μ,n,m): (70,32,25) (80,38,33) или (98,52,49). В каждом из этих случаев нарушено условие целочисленности. Если $t=16$, то имеем единственную возможность для (μ,n,m): (130,68,65), причем условие целочисленности нарушается: $130\cdot 68$ не делит $325\cdot 390\cdot 64$. Предложение 1 доказано.

§ 2. Локально $GQ(t,t)$ графы с $\mu = 2t+2$

Основным результатом параграфа является

Предложение 2. *Не существует вполне регулярных локально $GQ(4,4)$ графов с $\mu = 10$.*

Сначала будем предполагать, что вполне регулярный граф Γ является локально $GQ(t,t)$ графом с $\mu = 2t+2$. Ввиду леммы 1.2 диаметр Γ равен 2 и граф Γ сильно регулярен. По теореме 3.1 из [15] $t = 1, 2, 3, 4, 8$ или 13 и окрестность любой вершины изоморфна точечному графу обобщенного четырехугольника $W(t)$. Далее, каждый μ-подграф является $K_{2\times(t+1)}$-подграфом, а Γ имеет параметры $((t^5+3t^3)/2+t^2+t+2, (t+1)(t^2+1), t^2+t, 2t+2)$.

Лемма 2.1. *Любая пара $\{x,y\}$ несмежных точек из Γ содержится в единственном $K_{3\times(t+1)}$-подграфе $\Lambda(x,y)$ из Γ. Далее, для любой точки z из $\Lambda(x,y)$ каждая вершина из $[z]-\Lambda(x,y)$ смежна с единственным ребром графа $[z]\cap\Lambda(x,y)$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из леммы 1.5.

Второе утверждение леммы вытекает из леммы 1.2. Лемма доказана.

Выберем несмежные вершины a_1, a_2 и положим $\Lambda = \Lambda(a_1,a_2)$. Пусть Σ — подграф, состоящий из вершин в $\Gamma-\Lambda$, каждая из которых смежна хотя бы с одной вершиной из Λ, $\Omega = \Gamma-(\Lambda\cup\Sigma)$. Пусть $\{a_1,\dots,a_{t+1}\}$, $\{b_1,\dots,b_{t+1}\}$ и $\{c_1,\dots,c_{t+1}\}$ — различные доли графа Λ. *Главным ребром* в Σ назовем ребро из $B\cap\Sigma$, где B — блок из Γ, содержащий треугольник из Λ.

Лемма 2.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $|\Sigma| = (t+1)^3(t-1)$ *и каждая точка из Σ смежна с треугольником из Λ; обратно, для любого треугольника Δ из Λ подграф $\Delta^\perp$ является блоком из Γ и пересекает Σ по $(t-1)$-клике;*

(2) $|\Omega| = (t^2-1)t^2(t-2)/2$ *и каждая точка из Ω смежна с $2(t+1)^2$ точками из Σ.*

Доказательство. По лемме 2.1 каждая точка из Σ смежна с треугольником из Λ. С другой стороны, каждая точка из Λ смежна с $(t+1)(t^2-1)$ точками из Σ, поэтому $|\Sigma| = (t+1)^3(t-1)$. Обратно, для любого треугольника Δ из Λ по лемме 1.1 подграф $\Delta^\perp$ является блоком из Γ и пересекает Σ по $(t-1)$-клике. Утверждение (1) доказано.

В силу утверждения (1) $|\Omega| = (t^5+3t^3)/2+t^2+t+2-(t^2+2t+1)(t^2-1)-3t-3 = (t^2-1)t^2(t-2)/2$. Пусть $w\in\Omega$. Тогда каждый μ-подграф w и вершины из Λ состоят из $2t+2$ точек, лежащих в Σ, а каждая из этих точек смежна с тремя вершинами из Λ. Поэтому каждая точка из Ω смежна с $2(t+1)^2$ точками из Σ.

Лемма 2.3. *Для $w\in\Omega$ выполняются следующие утверждения:*

(1) *подграф $[w]\cap\Sigma$ имеет три разбиения $K_{2\times(t+1)}$-подграфами $[w]\cap[x_i]$ для $x\in\{a,b,c\}$;*

(2) *если $\{d,e\}$ — главное ребро из $[w]\cap\Sigma$, то блок B, содержащий w,d,e, пересекает Ω по t точкам; обратно, любой блок, пересекающий Ω по t точкам, содержит главное ребро из Σ.*

Доказательство. Так как $[w]$ не пересекает Λ, то различные подграфы $[w]\cap[x_i]$ и $[w]\cap[x_j]$ для $x\in\{a,b,c\}$ не пересекаются. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\{d,e\}$ — главное ребро из $[w]\cap\Sigma$, B — единственный блок, содержащий w,d,e. Без ограничения общности $[d]\cap[e]$ содержит a_1,b_1,c_1. Заметим, что

$[w] \cap \Sigma$ — регулярный граф степени $(t+1)+2t$, причем $[d]$ содержит t отличных от e вершин из $[w] \cap [x_1]$ для $x \in \{a, b, c\}$. Поэтому B пересекает Ω по t точкам.

Пусть B — блок из $w^\perp$, пересекающий Ω по t точкам. Тогда окрестность точки из $B \cap \Sigma$ содержит треугольник из Λ. Так как каждая из точек этого треугольника смежна с двумя точками из B, то $B \cap \Sigma$ — главное ребро. Лемма доказана.

Пусть $\mathscr{L}$ состоит из долей графов $\Lambda(x, y)$, где x, y пробегают множество всех несмежных пар вершин графа Γ. Тогда $(\Gamma, \mathscr{L})$ является частичным пространством прямых порядка $(t, t^2(t^2+1)/2)$. Элементы из $\mathscr{L}$ будем называть *гиперболическими прямыми*. Будем говорить, что точки a, b *коллинеарны*, если они лежат на гиперболической прямой. В этом случае через ab обозначим гиперболическую прямую, содержащую a и b. Пара $(X, \mathscr{M})$ называется *подпространством* из $(\Gamma, \mathscr{L})$, если X — некоторое подмножество вершин графа Γ, $\mathscr{M}$ состоит из всех гиперболических прямых, содержащихся в X, и для любых двух вершин $x, y \in X$, не смежных в Γ, гиперболическая прямая xy принадлежит $\mathscr{M}$.

Лемма 2.4. *Пусть L_1 и L_2 — гиперболические прямые, пересекающиеся в точке w. Если некоторая точка из L_1 смежна с точкой из L_2, то подпространство из $(\Gamma, \mathscr{L})$, порожденное L_1 и L_2, является двойственной аффинной плоскостью порядка t.*

Доказательство. Пусть точка x из L_1 смежна с точкой y из L_2. По лемме 2.1 $[y]$ содержит ребро $\{d, e\}$ из μ-подграфа $[w] \cap [x]$. Теперь множество точек подпространства $\mathscr{S} = \langle L_1, L_2 \rangle$ содержится в $[d] \cap [e]$, каждая точка из $\mathscr{S}$ лежит на t гиперболических прямых, каждая гиперболическая прямая содержит $t+1$ точек и число точек из $\mathscr{S}$ не больше $t(t+1)$. Значит, $\mathscr{S}$ является двойственной аффинной плоскостью порядка t. Лемма доказана.

Замечание. В случае $t = 3$ подграф $[w] \cap \Omega$ является $K_{2\times 4}$-подграфом, и подпространство из $(\Gamma, \mathscr{L})$, порожденное любой парой пересекающихся гиперболических прямых, является двойственной аффинной плоскостью порядка 3 или аффинной плоскостью порядка 4. Отсюда ввиду теоремы 1.5 из работы Кайперса [16] Γ является графом ранга 3 для группы $U_5(2)$ (если $t > 3$, то ситуация значительно сложнее). Далее, по обобщенному четырехугольнику $W(3)$ можно восстановить обобщенный четырехугольник $H_3(2^2)$ порядка (4,2). Точками нового четырехугольника являются $K_{2\times 4}$-подграфы из $W(3)$; две точки смежны, если соответствующие $K_{2\times 4}$-подграфы не пересекаются.

Пусть до конца параграфа $t = 4$ (возможно, приведенные рассуждения удастся распространить и на случаи $t = 8$ или 13). Зафиксируем вершину w из Ω. Пусть Ω_i состоит из точек в $\Omega(w)$, смежных с i 4-кликами из $\Sigma \cap [w]$, $x_i = |\Omega_i|$.

Лемма 2.5. *Число блоков в $\Omega \cap w^\perp$ равно 10, и верно одно из утверждений:*

(1) $x_2 = 15$, $x_1 = 20$, *подграф Ω_2 является обобщенным четырехугольником порядка $(2,2)$, а окрестность вершины в подграфе Ω_1 состоит из точки и трех изолированных ребер;*

(2) $x_0 = 10$, $x_2 = 25$, *подграф Ω_2 является обобщенным четырехугольником порядка $(4,1)$, а Ω_0 является $K_{2\times 5}$-подграфом.*

Доказательство. Так как $x_i = 0$ для $i > 2$, то $x_0 + x_1 + x_2 = 35$. Из подсчета числа главных ребер, смежных с точками из Ω_i, следует, что $5x_0 + 3x_1 + x_2 = 75$, поэтому $x_2 = 15 + x_0$ и $x_1 = 20 - 2x_0$. Теперь число блоков в $\Omega \cap w^\perp$ равно $(x_1 + 2x_2)/5 = 10$ и точка из Ω_i содержится в i блоках из $\Omega \cap w^\perp$.

Допустим сначала, что Ω_0 содержит несмежные точки d и e. Тогда $[d]\cap[e]$ не пересекает $[w]\cap\Sigma$, поэтому подграф $[d]\cap[e]\cap[w]$ содержится в Ω. Ввиду леммы 2.1 $\Lambda(d,e)$ содержится в Ω и $\Omega_0=\Lambda(d,e)\cap[w]$ является $K_{2\times 5}$-подграфом. Легко понять, что в этом случае подграф Ω_2 является обобщенным четырехугольником порядка $(4,1)$ (т. е. 5×5-решеткой).

Допустим, что Ω_0 является j-кликой. Если $j=3$, то $x_1=14$. С другой стороны, окрестность каждой вершины из Ω_0 содержит 6 точек из Ω_1 и 2 из Ω_2, поэтому $x_1\geq 18$; противоречие.

Если $j=2$, то $x_1=16$, $x_2=17$. Далее, окрестность каждой вершины из $\{d,e\}=\Omega_0$ содержит 8 точек из Ω_1 и 1 из Ω_2. Если $[d]\cap[e]$ содержит точку f из Ω_2, то для любой точки $u\in\Omega_1$ подграф $\Omega(w)\cap[u]$ содержит по одной точке из Ω_0, Ω_1 и 8 из Ω_2. С другой стороны, $f^\perp$ содержит 9 точек из Ω_2, причем $[u]$ содержит шесть точек из восьми, лежащих в $\Omega_2-f^\perp$. Если u,u' — смежные вершины из Ω_1, то $[u]\cap[u']$ содержит не менее четырех точек из $\Omega_2-f^\perp$; противоречие. Значит, $[d]\cap[e]$ содержит точку u из Ω_1. Блок из $\Omega\cap w^\perp$, содержащий u, пересекает Ω_2 по трем или четырем точкам. В первом случае имеется 6 блоков из $\Omega\cap w^\perp$, пересекающих $[u]-\{w\}$ по точке из Ω_2, а во втором — 5 блоков, 4 из которых пересекают $[u]-\{w\}$ по точке из Ω_2, а 1 — по точке из Ω_1. В любом случае $|\Omega(w)\cap[u]|=9$; противоречие.

Если $j=1$, то $x_1=18$, $x_2=16$. Пусть $\{d\}=\Omega_0$. Тогда $[d]\cap\Omega(w)$ содержит 10 точек из Ω_1. Далее, найдется блок из $\Omega\cap w^\perp$, содержащий единственную точку u из Ω_1. Имеется 5 блоков из $\Omega\cap w^\perp$, пересекающих $[u]-\{w\}$. Так как $|\Omega(w)\cap[u]|=10$, то $\Omega(w)\cap[u]$ содержит 1 точку из Ω_0, 5 из Ω_1 и 4 точки из Ω_2.

Далее, найдется блок из $\Omega\cap w^\perp$, содержащий точку u' из $\Omega_1-[d]$. Имеется не более шести блоков из $\Omega\cap w^\perp$, пересекающих $[u']-\{w\}$. Так как $|\Omega(w)\cap[u']|=10$, то $\Omega(w)\cap[u']$ содержит 7 точек из Ω_1 и 3 из Ω_2. Теперь число ребер между Ω_1 и Ω_2 равно $8\cdot 3+10\cdot 4=64$, причем любое такое ребро лежит в блоке из $\Omega\cap w^\perp$. С другой стороны, каждая точка из Ω_2 смежна не более чем с четырьмя точками из Ω_1, а точка из $\Omega_2\cap[u]$ смежна не более чем с тремя точками из Ω_1; противоречие.

Итак, можно считать, что $x_1=20$, $x_2=15$. Теперь каждый блок содержит 2 точки из Ω_1 и 3 точки из Ω_2. Точка u из Ω_2 смежна с точками в четырех блоках, не содержащих u, поэтому $[u]\cap\Omega(w)$ содержит две 4-клики и ребро из Ω_2. Поэтому подграф Ω_2 является обобщенным четырехугольником порядка $(2,2)$. Далее, $[u]\cap[w]$ содержит по одной 4-клике из Σ и из Ω и три 4-клики, пересекающие Σ и Ω по двум точкам. Значит, окрестность вершины в подграфе Ω_1 состоит из точки и трех изолированных ребер.

Лемма 2.6. *Случай* (2) *из заключения леммы* 2.5 *невозможен.*

Доказательство. Допустим, что $x_0=10$. По лемме 2.5 подграф Ω_2 является 5×5-решеткой. Теперь Ω_2 содержит 100 четырехугольников, каждый из которых лежит в единственном $K_{2\times 5}$-подграфе из $[w]$. Так как число $K_{2\times 5}$-подграфов из $[w]$ равно 136, то 36 из них не пересекают Ω_2.

С другой стороны, любая точка из $[w]$ лежит в 16 $K_{2\times 5}$-подграфах из $[w]$, 6 из которых не пересекают Ω_2. Теперь $[w]$ содержит Ω_0, 25 $K_{2\times 5}$-подграфов, пересекающих Ω_0 по ребру, но не пересекающих Ω_2, и 15 $K_{2\times 5}$-подграфов, лежащих в Σ. Таким образом, $[w]$ содержит 41 $K_{2\times 5}$-подграф, не пересекающий Ω_2; противоречие. Лемма доказана.

Изолированное ребро из Ω_1 назовем *тонкой прямой.* По лемме 2.5 любая точка из Ω_1 лежит на одной тонкой и трех толстых (трехточечных) прямых.

При этом Ω_1 разбивается десятью тонкими прямыми. Для $d \in \Omega_1$ через $\{d, d^*\}$ обозначим единственную тонкую прямую, содержащую d. Если точка e из Ω_1 смежна с d, то e^* необходимо смежна с d^* (рис. 1).

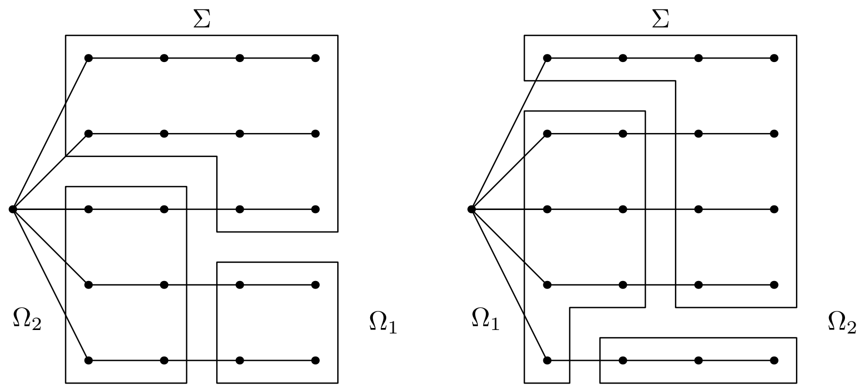

Рис. 1. Окрестности точек из Ω_i в графе $[w]$.

Лемма 2.7. *Для любой вершины $d \in \Omega_1$ подграф $\Omega_1 - d^\perp$ содержит по 6 точек, смежных с четырьмя и двумя вершинами из $\Omega_1(d)$ соответственно.*

Доказательство. Число ребер между $\Omega_1 - d^\perp$ и $\Omega_1(d)$ равно 36. Пусть y_i — число точек из $\Omega_1 - [d]$, смежных с i вершинами из $\Omega_1(d)$. Тогда $\sum y_i \le 12$, $\sum iy_i = 36$.

Покажем, что $y_3 = 0$. Пусть e — точка из $\Omega_1 - [d]$, смежная с тремя вершинами из $\Omega_1(d)$. Тогда $[d] \cap [e] \cap [w]$ содержит либо 2 точки из Σ, либо по точке из Σ и Ω_2. В первом случае подграф $\Lambda(d,e) \cap [w]$ содержит d^*, e^*, и поэтому пересекает Ω_1 по $K_{2\times 3}$-подграфу Δ. Но в этом случае $\Omega_1 - \Delta$ содержит 6 вершин, смежных с ребрами из Δ, и 12 вершин, каждая из которых смежна с единственной точкой из Δ; противоречие.

Во втором случае пусть $\Lambda(d,e) \cap [w]$ пересекает Ω_1 по подграфу Δ. Тогда Δ не содержит тонких прямых. Если $|\Delta| = 6$, то $\Omega_1 - \Delta$ содержит 9 вершин, смежных с ребрами из Δ, и 6 вершин, каждая из которых смежна с единственной точкой из Δ; противоречие. Если же $|\Delta| = 5$, то $\Omega_1 - \Delta$ содержит 6 вершин, смежных с ребрами из Δ, и 11 вершин, каждая из которых смежна с единственной точкой из Δ; снова противоречие.

Так как точка из $\Omega_1 - [d]$, смежная с четырьмя вершинами из $\Omega_1(d)$, необходимо смежна с d^*, то $y_4 \le 6$. Отсюда $y_2 = y_4 = 6$. Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *каждая тонкая прямая содержится в двух $K_{2\times 4}$-подграфах из Ω_1;*

(2) *Ω_1 содержит пять $K_{2\times 4}$-подграфов, отвечающих пяти спредам подграфа Ω_2;*

(3) *шестому спреду Ω_2 отвечает $K_{2\times 5}$-подграф, совпадающий с $[w] \cap [z]$ для некоторой точки $z \in \Lambda$.*

Доказательство. Пусть $\{d, d^*\}$ — тонкая прямая, $e \in \Omega_1(d^*) - \{d\}$. Тогда $[d] \cap [e] \cap [w]$ содержит 4 точки из Ω_1, в том числе d^*, e^*. Поэтому $\Lambda(d,e) \cap [w]$ является $K_{2\times 5}$-подграфом, содержащим ребро из Σ и 8 точек из Ω_1. Если $f \in \Omega_1(d^*) - \Lambda(d,e)$, то $\Lambda(d,f) \cap [w]$ является вторым $K_{2\times 5}$-подграфом, содержащим 8 точек из Ω_1. Итак, каждая пара тонких прямых, индуцирующая четырехугольник в Γ, содержится в единственном $K_{2\times 4}$-подграфе из Ω_1, а каждая тонкая прямая содержится в двух $K_{2\times4}$-подграфах из Ω_1. Утверждение (1) доказано.

Теперь число флагов, состоящих из $K_{2\times4}$-подграфа в Ω_1 и лежащей в нем тонкой прямой, равно 20, причем указанный $K_{2\times4}$-подграф содержит 4 тонких прямых. Поэтому Ω_1 содержит 5 $K_{2\times4}$-подграфов. По строению окрестностей в $[w]$ точек из Ω_1 четырем тонким прямым, лежащим в $K_{2\times4}$-подграфе из Ω_1, соответствует четверка попарно не пересекающихся прямых из обобщенного четырехугольника Ω_2. Оставшиеся три точки из Ω_2 образуют пятую прямую спреда. Утверждение (2) доказано.

Прямые шестого спреда из Ω_2 лежат в блоках из $w^\perp$, каждый из которых содержит главное ребро из Σ, причем эти главные ребра индуцируют $K_{2\times5}$-подграфы из Σ. Пусть $\{p,q\}$ — одно из таких главных ребер. Тогда $[p]\cap[q]$ состоит из пяти изолированных 4-клик. Пусть $\{a_i,b_j,c_k\}=\Lambda\cap[p]\cap[q]$, g — вершина из $\Gamma_2(w)$ такая, что $[w]\cap[g]$ содержит $K_{2\times4}$-подграф из Ω_1 и ребро $\{p,q\}$. Тогда $([p]\cap[q])-w^\perp$ состоит из 16 точек, лежащих на четырех гиперболических прямых wx для $x\in\{a_i,b_j,c_k,g\}$. Если h — вершина из $\Gamma_2(w)$ такая, что $[w]\cap[h]=\Delta$, то $wh=wz$ для подходящей точки $z\in\{a_i,b_j,c_k\}$. Лемма доказана.

Завершим доказательство предложения 2. Заметим, что точка w из Γ лежит на 136 гиперболических прямых. Поэтому общее число гиперболических прямых равно $2^4\cdot3^2\cdot7\cdot17$. Из них 272 прямые содержатся в $[w]$, $85\cdot120$ содержат по точке из $[w]$, следовательно, число гиперболических прямых, пересекающих $w^\perp$ равно $2^4\cdot3\cdot13\cdot17$. Итак, $2^7\cdot3\cdot17$ гиперболических прямых содержатся в $\Gamma_2(w)$. Им отвечают $2^7\cdot17$ подграфов из $[w]$, изоморфных $GQ(2,2)$. С другой стороны, $GQ(4,4)$ содержит $2^4\cdot5\cdot17$ подграфов, изоморфных $GQ(2,2)$. Таким образом, найдется $GQ(2,2)$-подграф из $[w]$, отвечающий двум разным тройкам гиперболических прямых. Без ограничения общности $\Omega_2=\Omega_2'$, где $\Lambda'=\Lambda(x,y)$ — подграф из $\Gamma_2(w)$, Ω' — подграф из Γ, состоящий из вершин, не смежных с точками из Λ', Ω_i' состоит из точек в $\Omega'(w)$, лежащих на i прямых из $[w]$, содержащихся в Ω'. Заметим сначала, что точка z из утверждения (3) в заключении леммы 2.8 принадлежит Λ'.

Пусть Δ — $K_{2\times5}$-подграф, отвечающий спреду Ω_2 и содержащий $K_{2\times4}$-подграф из Ω_1 и ребро $\{p,q\}$ из Σ. Тогда Δ содержит $K_{2\times4}$-подграф из Ω_1' и ребро $\{p',q'\}$ из Σ'. Так как $[z]\cap\Delta$ содержится в $\Sigma\cap\Sigma'$, то $\{p,q\}=\{p',q'\}$. Отсюда $\Omega_1=\Omega_1'$. Далее, блок, содержащий p,q,z, пересекает Λ и Λ' по трем точкам. Повторив эти рассуждения для всех спредов Ω_2, убедимся, что $\Lambda\cap\Lambda'$ содержит несмежные точки и $\Lambda=\Lambda'$; противоречие. Предложение 2 доказано.

§ 3. Строение гиперовалов в $GQ(4,8)$

В этом параграфе мы проясним строение 30-точечных гиперовалов в обобщенном четырехугольнике порядка (4,8). Пусть Γ — точечный граф обобщенного четырехугольника порядка (4,8). Зафиксируем 30-точечный гиперовал Λ. Для различных точек $x,y\in\Lambda$ через $\Lambda_{x,y}$ обозначим подграф $\Lambda-(x^\perp\cup y^\perp)$. Пусть a,b — точки из Λ такие, что $\Delta=\Lambda(a)\cap\Lambda(b)$ содержит наибольшее возможное число α точек из Λ. Пусть X_i — множество точек из $\Lambda_{a,b}-\Delta$, смежных с i вершинами из Δ, $x_i=|X_i|$.

Предложение 3. *Пусть Λ является 30-вершинным гиперовалом точечного графа для $GQ(4,8)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *Λ является двудольным графом и либо*

(a) $\alpha = 7$, $x_0 = 4$, $x_1 = x_2 = x_6 = x_7 = 0$, $\sum_{i>0} x_i = 13$ *и* $\sum ix_i = 49$,

либо

(b) $\alpha = 6$, $x_0 = 3$, $x_1 = x_6 = 0$, $\sum_{i>0} x_i = 13$ *и* $\sum ix_i = 42$*;*

(2) Λ *не содержит* $K_{3,6}$*-подграфов и для различных вершин* c, d *из одной доли графа* Λ *подграф* $\Lambda(c) \cap \Lambda(d)$ *содержит не менее четырех вершин;*

(3) *найдутся такие вершины* c, d *из* Λ*, что* $|\Lambda(c) \cap \Lambda(d)| = 4$.

Лемма 3.1. *Пусть* x, y *— смежные точки из* Λ*. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *подграф* $\Lambda_{x,y}$ *разбивается тремя парами изолированных ребер (в частности, он не содержит 7-коклик и* $K_{2,5}$*-подграфов), далее, степень любой вершины в* $\Lambda_{x,y}$ *не больше* 5*;*

(2) *если точка* z *из* $\Lambda - x^\perp$ *смежна с вершиной из* $\Lambda(x)$*, то* z *смежна по крайней мере с тремя вершинами из* $\Lambda(x)$*;*

(3) *если точка* z *из* $\Lambda_{x,y}$ *смежна с вершинами из* $\Lambda(x)$ *и из* $\Lambda(y)$*, то степень* z *в подграфе* $\Lambda_{x,y}$ *не больше* 3.

Доказательство. Пусть L — прямая из Γ, проходящая через x, y. Заметим, что $(s+1)(t+2-s) = 30$, и по лемме 1.2 L содержит три точки, смежные с тройками изолированных ребер из Λ. Поэтому подграф $\Lambda_{x,y}$ разбивается тремя парами изолированных ребер (и, в частности, не содержит 7-коклик). Если $\Lambda_{x,y}$ содержит $K_{2,5}$-подграф, то он не может разбиваться тремя парами изолированных ребер. Вершина из $\Lambda_{x,y}$ смежна с единственной вершиной в своей паре и не более чем с двумя вершинами в чужой паре. Утверждение (1) доказано.

Пусть точка z из $\Lambda - x^\perp$ смежна с вершиной y из $\Lambda(x)$. Тогда $\Lambda_{y,z}$ не содержит 7-коклик, поэтому z смежна по крайней мере с тремя вершинами из $\Lambda(x)$. Утверждение (2) доказано.

По утверждению (1) степень каждой вершины z в подграфе $\Lambda_{x,y}$ не меньше 1 и не больше 5. Если $[z]$ содержит по вершине из $\Lambda(x)$ и из $\Lambda(y)$, то по утверждению (2) степень z в подграфе $\Lambda_{x,y}$ не больше 3.

Лемма 3.2. *Пусть* x, y *— смежные точки из* Λ*. Если* $\Lambda_{x,y}$ *содержит точку* z*, не смежную с вершинами из* $\Lambda(x)$*,* $\beta = |[z] - \Lambda(y)|$*,* $\{p_1, \ldots, p_\beta\} = \Lambda_{x,y} \cap [z]$*, то выполняются следующие утверждения:*

(1) $[z]$ *содержит не менее четырех вершин из* $\Lambda(y)$ *для любой точки* $y \in \Lambda(x)$*;*

(2) *каждая точка* p_i *смежна по крайней мере с четырьмя вершинами из* $\Lambda(x)$*;*

(3) *если* $\beta \leq 3$*, то каждая точка* p_i *не смежна с вершинами из* $\Lambda(y)$.

Доказательство. Так как степень вершины z в подграфе $\Lambda_{x,y}$ не больше 5, то $[z]$ содержит не менее четырех вершин из $\Lambda(y)$ для любой точки $y \in \Lambda(x)$. Утверждение (1) доказано.

Степень точки x в графе Λ_{z,p_i} не больше 5, поэтому p_i смежна по крайней мере с четырьмя вершинами из $\Lambda(x)$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\beta \leq 3$. Тогда p_i смежна не более чем с двумя точками из $\Lambda(y)$. По лемме 3.1 p_i не смежна с вершинами из $\Lambda(y)$.

Лемма 3.3. *Параметр* α *не равен* 9.

Доказательство. Пусть $\alpha = 9$. Тогда число ребер между Δ и $\Lambda_{a,b}$ равно 63, причем $|\Lambda_{a,b}| = 19$. Ввиду утверждения (1) леммы 3.1 каждая точка из $\Lambda_{a,b}$ смежна с нулем или по крайней мере с тремя точками из Δ.

Если точки p, q смежны в $\Lambda_{a,b}$, то $[p] \cup [q]$ содержит не более семи точек из Δ, (прямая $\{p, q\}^{\perp}$ содержит по точке, смежной с a, b, и точку r такую, что $[p] \cup [q] \cup [r]$ содержит 7 точек из Δ).

Пусть точка z из $\Lambda_{a,b}$ смежна со всеми точками из Δ. Тогда каждая точка из $\Lambda_{a,b} - \{z\}$ смежна с тройкой вершин из Δ. Таким образом, $\Sigma = \Lambda_{a,b} - \{z\}$ является регулярным графом без треугольников степени 6 на 18 вершинах. Пусть $c \in \Sigma$. Тогда число ребер между $\Sigma(c)$ и $\Sigma - c^{\perp}$ равно 30. Далее, каждая вершина x из $\Sigma_2(c)$ смежна по крайней мере с тремя вершинами из $\Sigma(c)$, иначе для $y \in \Sigma(c) \cap [x]$ подграф $\Lambda_{x,y}$ содержит 7-коклику из $\{a, b, z\} \cup (\Sigma(c) - [x])$. Значит, $\Sigma_3(c)$ содержит некоторую вершину d. Теперь каждая вершина x из $\Sigma_2(c) \cap [d]$ смежна по крайней мере с четырьмя вершинами из $\Sigma(c)$, иначе для $y \in \Sigma(c) \cap [x]$ подграф $\Lambda_{x,y}$ содержит 7-коклику из $\{a, b, z, d\} \cup (\Sigma(c) - [x])$. Так как $\Sigma_3(c)$ — коклика, то $|\Sigma_2(c)| \leq 8$, поэтому $|\Sigma_3(c)| \geq 3$. Если $|\Sigma_3(c)| > 3$, то для $y \in \Sigma(c)$ подграф $\Lambda_{c,y}$ содержит 7-коклику из $\{a, b, z\} \cup \Sigma_3(c)$. Таким образом, $|\Sigma_3(c)| = 3$, $\Sigma_2(c)$ содержит 6 точек, смежных с четырьмя, и 2 точки, смежные с тремя вершинами из $\Sigma(c)$. Противоречие с тем, что степень в Σ точек второго типа из $\Sigma_2(c)$ не больше 4.

Покажем, что $x_0 = 0$. Пусть $d \in X_0$. Тогда каждая точка u из $\Lambda_{a,b} - d^{\perp}$ смежна по крайней мере с четырьмя вершинами из Δ, иначе для $w \in [u] \cap \Delta$ подграф $\Lambda_{u,w}$ содержит 7-коклику $\{d\} \cup (\Delta - [u])$. Далее, каждая точка e из $\Lambda(d)$ смежна по крайней мере с пятью точками из Δ, иначе $\Lambda_{d,e}$ содержит $K_{2,5}$-подграф.

Итак, $x_0 \neq 0$ влечет $x_3 = 0$. Теперь $\bigcup\limits_{i>0} X_i$ является кокликой и $x_4 = 0$. Но в этом случае число ребер между Δ и $\Lambda_{a,b}$ не меньше 65.

Таким образом, $x_0 = 0$, поэтому $x_i = 0$ для $i > 4$, $\Lambda_{a,b}$ содержит 6 точек из X_4 и 13 из X_3, причем X_4 является кокликой.

Пусть точка x из X_3 смежна с вершиной y из X_4, $L = \{x, y\}^{\perp}$. Тогда L содержит точку z, не смежную с вершинами из Δ. Далее, на любой прямой из $z^{\perp}$ необходимо должна быть точка, смежная с четырьмя вершинами из Δ; противоречие.

Лемма 3.4. *Параметр α не равен* 8.

Доказательство. Пусть $\alpha = 8$. Тогда число ребер между Δ и $\Lambda_{a,b}$ равно 56, причем $|\Lambda_{a,b}| = 18$. Для $x \in \{a, b\}$ через x^* обозначим единственную точку из $\Lambda(x) - \Delta$, смежную с x. Если $w \in ([a] \cap [b]) - \Lambda$, то $[w] \cap \Lambda$ содержит три изолированных ребра $\{a, a^*\}$, $\{b, b^*\}$ и $\{c, c^*\}$. По лемме 3.1 не более четырех точек из Δ попадает в Λ_{c,c^*}. Если точка a^* смежна с вершиной u из X_i, то степень b в графе $\Lambda_{a^*,u}$ не больше 5, поэтому $i \geq 3$ ($i \geq 4$, если $u \notin [b^*]$). Заметим, что точка из X_2 ввиду леммы 3.1 попадает в $[a^*] \cap [b^*]$, поэтому $x_2 = 0$.

Покажем, что $x_3 = 0$. Точка d из X_3 не смежна с вершинами из X_0, иначе для $e \in [d] \cap X_0$ подграф $\Lambda_{d,e}$ содержит $K_{2,5}$-подграф из $\{a, b; \Delta\}$. Если $x_0 \geq 2$ и $e \in [d] \cap \Delta$, то $\Lambda_{d,e}$ содержит 7-коклику из $\Delta \cup X_0$. Покажем, что $X_3 \subseteq [a^*] \cap [b^*]$. Для $d \in X_3 - ([a^*] \cup [b^*])$ и $e \in \Delta \cap [d]$ подграф $\Lambda_{d,e}$ содержит 7-коклику из $\{a^*, b^*\} \cup \Delta$; противоречие.

Итак, если $x_3 \neq 0$, то $X_0 = \{c^*\}$, $\sum\limits_{i>0} x_i = 17$, $\sum i x_i = 56$, поэтому $x_3 \geq 12$ (иначе число ребер между Δ и $\Lambda_{a,b}$ больше 56). Противоречие с тем, что $X_3 \subseteq [a^*] \cap [b^*]$.

Если точки $p \in X_i$, $q \in X_j$ смежны, то $i = j = 4$ и прямая $\{p, q\}^{\perp}$ содержит точку w. В этом случае $\{p, q\} = \{c, c^*\}$ и точка из $[c^*] \cap \Delta$ не смежна с вершинами из $[c]-\{c^*\}$; противоречие с утверждением (2) леммы 3.1.

Теперь $\bigcup\limits_{i>0} X_i$ является кокликой и $\sum\limits_{i>0} x_i \le 13$. С другой стороны, $\{a^*,b^*\}\cup\Delta\cup X_0$ также является кокликой, поэтому $x_0=5$ и $\sum\limits_{i>0} x_i=13$.

Пусть u — точка из $\Gamma-\Lambda$, не смежная с вершинами из $\{a,b\}\cup\Delta$. Прямая из $u^\perp$, пересекающая Λ, либо содержит точку w (и ребро $\{c,c^*\}$), либо точку из $\bigcup\limits_{i\ge 6} X_i$. Отсюда $c\in X_4$, точка u лежит на прямой $\{c,w\}^\perp$ и $[u]$ содержит 2 точки d,e из X_6. Поэтому $x_4=11$, $x_6=2$. С другой стороны, каждая проходящая через d прямая, не пересекающая Δ, содержит точку из $\Gamma-\Lambda$, не смежную с вершинами из $\{a,b\}\cup\Delta$; противоречие.

Отсюда $x_i=0$ для $i=6,7$, поэтому $x_4=9$ и $x_5=4$. Далее, X_4 содержит не менее восьми точек, не смежных с вершиной w из $([a]\cap[b])-\Delta$. Пусть $d\in X_4-[w]$ и L — прямая из $d^\perp$, не пересекающая $[a]\cup[b]$. Тогда L содержит по точке, смежной с a,b, каждая из которых смежна с единственной вершиной из Δ. Следовательно, $d\in[a^*]\cap[b^*]$. Противоречие с тем, что $[a^*]\cap[b^*]$ содержит a,b и не более семи вершин из X_4.

Лемма 3.5. *Если $\alpha=7$, то $x_0=4$, $x_i=0$ для $i=1,2,6,7$.*

Доказательство. Пусть $\alpha=7$. Тогда число ребер между Δ и $\Lambda_{a,b}$ равно 49 и $|\Lambda_{a,b}|=17$. Для $x\in\{a,b\}$ через $\{x',x''\}$ обозначим $\Lambda(x)-\Delta$. Если точка a' смежна с b', то $\Lambda_{a',b'}$ содержит 7-коклику Δ; противоречие. Поэтому $\{a',a'',b',b''\}$ является кокликой.

Если точка a' смежна с вершиной z из X_i, то степень b в графе $\Lambda_{a',z}$ не больше 5, поэтому $i\ge 2$ ($i\ge 3$, если $z\notin[b']\cap[b'']$). Любая точка e из X_2 смежна со всеми вершинами из $\{a',a'',b',b''\}$. Далее, прямая L из $e^\perp$, не пересекающая $\Delta\cup\{a',a'',b',b''\}$, содержит по точке, смежной с a, b, точку f из X_j и точку g из $\Gamma-\Lambda$, смежную с r вершинами из Δ, причем $3\le j+r\le 5$. Для $h\in[f]\cap\Delta$ подграф $\Lambda_{f,h}$ содержит коклику $(\Delta-[f])\cup\{a',a'',b',b''\}$, поэтому $j=5$. Теперь $[e]\cap X_5=\{f_1,f_2,f_3\}$ и мы имеем $K_{5,5}$-подграф $\Sigma=\{a,b,f_1,f_2,f_3;\Delta-[e]\}$. Противоречие с тем, что a' смежна с единственной вершиной этого подграфа (см. лемму 1.11). Итак, $x_2=0$.

Так как подграф $\Delta\cup\{a',a'',b',b''\}\cup X_0$ является кокликой, то $x_0\le 4$. Пусть точка e из X_3 смежна с вершиной f из X_j, $j>0$. Тогда $x_0\le 3$ и $\sum\limits_{i>3} x_i\le 7$ (иначе число ребер между Δ и $\Lambda_{a,b}$ больше 49).

Если $j=3$, то можно считать, что e смежна с a',b', а f смежна с a'',b''. В этом случае каждая из точек e,f смежна со всеми вершинами из X_0. Действительно, если e не смежна с вершиной из X_0, $g\in[e]\cap\Delta$, то $\Lambda_{e,g}$ содержит 7-коклику из $(\Delta-[e])\cup\{a'',b''\}\cup X_0$. Отсюда $x_0=0$ и число ребер между Δ и $\Lambda_{a,b}$ не меньше 51; противоречие. Значит, $j=4$, и прямая $\{e,f\}^\perp$ содержит либо по точке, смежной с a, b, и точку g, не смежную с вершинами из $[a]\cap[b]$, либо точку w из $[a]\cap[b]$. Но в первом случае $[e]\cup[g]$ содержит не менее четырех вершин из $\{a',a'',b',b''\}\cup X_0$. Во втором случае без ограничения общности $[w]\cap\Lambda$ содержит ребра $\{a,a'\}$ и $\{b,b'\}$, поэтому точка e смежна с a'',b'', а f не смежна с вершинами из $\{a',a'',b',b''\}$. Итак, в любом случае для $u\in[f]\cap\Delta$ подграф $\Lambda_{f,u}$ содержит 7-коклику; противоречие.

Таким образом, подграф $\bigcup\limits_{i>0} X_i$ является кокликой, $x_0=4$, $\sum\limits_{i>0} x_i=13$, $\sum ix_i=49$ и $x_3\ge 3$.

Пусть $c\in X_7$, $\Sigma=\{a,b,c;\Delta\}$. Тогда $X_0-[c]$ содержит 2 точки u,w, не смежные с вершинами из Σ. Положим $y_i = |X_i(\Sigma) \cap [u]|$, $y'_i = |X_i \cap [u]|$. Тогда $\sum y_i = 36$, $\sum iy_i = 90$, причем в $[u] - \Lambda$ нет точек, смежных с тремя вершинами Σ. Заметим, что $x_3 + x_4 + x_5 = 12$ и $3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 42$. Поэтому $\sum iy'_i \le 33$ и $\sum iy_i \le 33 + 2 \cdot 27$; противоречие.

Пусть $c \in X_6$, $\Sigma = \{a, b, c; \Delta \cap [c]\}$. Тогда $X_0 - [c]$ содержит единственную точку u, не смежную с вершинами Σ, $x_3 + x_4 + x_5 = 12$ и $3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 36$. Отсюда $x_3 = 12$. Положим $y_i = |X_i(\Sigma) \cap [u]|$. Тогда $\sum y_i = 36$, $\sum iy_i = 81$, причем в $[u] - \Lambda$ нет точек, смежных с тремя вершинами Σ, и вершина из $\Delta - [c]$ смежна по крайней мере с тремя вершинами из X_3. Отсюда $y_3 \le 6$ и $\sum iy_i \le 3 \cdot 6 + 2 \cdot 30$; противоречие.

Лемма 3.6. *Если $\alpha = 6$, то $x_0 = 3$ и $x_1 = x_6 = 0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = 6$. Тогда число ребер между Δ и $\Lambda_{a,b}$ равно 42 и $|\Lambda_{a,b}| = 16$. Для $z \in \{a, b\}$ через $\{z_1, z_2, z_3\}$ обозначим $\Lambda(z) - \Delta$. Если точка a_i смежна с b_j, то Λ_{a_i,b_j} содержит 6-коклику Δ, поэтому $\{a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3\}$ является $K_{3,3}$-подграфом и $[a_i] \cup [b_j]$ содержит X_0. Отсюда $x_0 = 0$. Если $d \in X_i$, $e \in [d] \cap \Delta$, то $\Lambda_{d,e}$ содержит $(9 - i)$-коклику из $\Lambda(a) \cup \Lambda(b)$, поэтому $i \ge 3$. Но теперь число ребер между Δ и $\Lambda_{a,b}$ не меньше 48; противоречие. Итак, подграф $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ является кокликой.

Если точка z из X_i смежна с вершиной a_j и с l вершинами из $\{b_1, b_2, b_3\}$, то степень b в графе $\Lambda_{a_j,z}$ не больше 5, поэтому $i + l \ge 4$. Отсюда, в частности, каждая точка из X_2 смежна по крайней мере с двумя вершинами из $\{a_1, a_2, a_3\}$ и X_2 является кокликой. Любая точка e из X_1 смежна со всеми вершинами из $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$. Далее, прямая L из $e^\perp$, не пересекающая $\Delta \cup \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$, содержит точку f из X_j. Если $j > 0$, то для $h \in [f] \cap \Delta$ подграф $\Lambda_{f,h}$ содержит 7-коклику из $(\Delta - [f]) \cup \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$; противоречие. Значит, $[e]$ содержит точку z из X_0 и $\Lambda_{e,z}$ содержит $K_{2,5}$-подграф из $\{a, b; \Delta\}$. Полученное противоречие показывает, что $x_1 = 0$.

Так как подграф $\Delta \cup \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\} \cup X_0$ является кокликой, то $x_0 \le 3$. Пусть точка e из X_2 смежна с вершиной f из X_j, $j > 0$. Тогда $x_0 \le 2$ и можно считать, что e смежна с a_1, a_2, b_1, b_2. Для $g \in [f] \cap \Delta$ подграф $\Lambda_{f,g}$ содержит коклику из $(\Delta - [f]) \cup \{a_1, a_2, b_1, b_2\} \cup X_0$. Значит, $f \in X_4$, и $[f]$ содержит X_0. Поэтому $[e] \cap X_4 = \{f_1, f_2, f_3\}$ и мы имеем $K_{3,7}$-подграф $\Sigma = \{f_1, f_2, f_3; \{a_3, b_3, e\} \cup (\Delta - [e])\}$. Противоречие с тем, что $\alpha = 6$. Итак, если $x_2 \ne 0$, то окрестность точки e из X_2 содержится в $\Delta \cup \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\} \cup X_0$.

Пусть точка e из X_3 смежна с вершиной f из X_3. Для $g \in [f] \cap \Delta$ подграф $\Lambda_{f,g}$ содержит коклику из $(\Delta - [f]) \cup \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\} \cup X_0$. Поэтому $[e]$ и $[f]$ содержат по три вершины из $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$, $X_0 \subset [e] \cap [f]$ и $x_0 = 0$. Но тогда число ребер между Δ и $\Lambda_{a,b}$ не меньше 48; противоречие.

Таким образом, $\bigcup\limits_{i>0} X_i$ является кокликой, $x_0 = 3$ и $\sum\limits_{i>0} x_i = 13$.

Пусть $c \in X_6$, $\Sigma = \{a, b, c; \Delta\}$. Тогда X_0 содержится в $[c]$, число ребер между Δ и $\bigcup\limits_{0<i<6} X_i$ равно 12, поэтому $x_3 = 12$. По определению α подграф $[u] \cap [w]$ содержит не более трех вершин из X_3 для любых различных $u, w \in \Delta$. Значит, $[u] \cup [w]$ содержит X_3. Тем самым $\Gamma - \Lambda$ не содержит вершин, смежных с тремя точками из Δ. Так как $[a] \cap [b] \cap [c]$ содержит не более трех вершин из $\Gamma - \Lambda$, то $x_3(\Sigma) \le 15$. По лемме 1.11 $x_0(\Sigma) + \sum \binom{i-1}{2} x_i(\Sigma) = 21$. Но если $z \in K_0(\Sigma)$, то число 2-путей с началом в z, концом в Σ и средней вершиной в $\Gamma - \Sigma$ равно 81. С другой стороны, $[z]$ содержит не более трех вершин из X_3, и число указанных 2-путей не превосходит $3 \cdot 6 + 2 \cdot 30$; противоречие.

Лемма 3.7. *Параметр* α *не равен* 5.

Доказательство. Пусть $\alpha = 5$. Тогда число ребер между Δ и $\Lambda_{a,b}$ равно 35 и $|\Lambda_{a,b}| = 15$. Для $z \in \{a, b\}$ через $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ обозначим $\Lambda(z) - \Delta$.

Покажем сначала, что Λ не содержит $K_{3.5}$-подграфов. Пусть $c \in X_5$, $\Lambda(c) - \Delta = \{c_1, \dots, c_4\}$. Тогда подграф $\{a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4, c_1, \dots, c_4\}$ не является кокликой. Пусть точка a_1 смежна с b_1. Так как Λ_{a_1,b_1} содержит 5-коклику Δ, точка b_1 смежна еще с одной вершиной a_i и $[a_1] \cap [a_i]$ содержит не менее шести точек из $\{b_1, \dots, b_4, c_1, \dots, c_4\}$. Противоречие с тем, что $\alpha = 5$.

Если точка a_1 смежна с b_1, то Λ_{a_1,b_1} содержит 5-коклику Δ и не более одной точки из X_0. Поэтому $[a_1]$ содержит не менее трех точек из $\{b_1, \dots, b_4\}$. Далее, по лемме 3.1 точка из Δ смежна по крайней мере с тремя точками из $\Lambda(a_1)$. Допустим, что $[a_1]$ содержит $\{b_1, \dots, b_4\}$. Тогда для $d \in X_i \cap [a_1]$, $i > 0$, $e \in [d] \cap \Delta$ подграф $\Lambda_{d,e}$ содержит $(9-i)$-коклику из $\Lambda(a) \cup \Lambda(b)$, поэтому $i \geq 3$. Отсюда $[d]$ содержит не более $5 - i$ точек из $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и не менее четырех точек из X_0. Но в этом случае найдутся точки b_j, b_l, не смежные с одной и той же точкой из $\{a_2, a_3, a_4\}$, и $[b_l] \cap [b_j]$ содержит b, три точки из $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и не менее двух точек из $X_0 \cap [d]$. Противоречие с тем, что $\alpha = 5$. Итак, подграф $\{a_1, \dots, a_4; b_1, \dots, b_4\}$ является либо $K_{4,4}$-подграфом с удаленным максимальным паросочетанием, либо объединением 2-коклики и $K_{3,3}$-подграфа. В любом случае Λ_{a_1,b_1} содержит 7-коклику. Мы показали, что $\{a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4\}$ является кокликой.

Если точка z из X_0 смежна с вершиной a_j, но не смежна с b_i, то степень b_i в графе $\Lambda_{a_j,z}$ не больше 5, поэтому $[z]$ содержит $\{b_1, \dots, b_4\}$. Симметрично $[z]$ содержит $\{a_1, \dots, a_4\}$. Далее, $x_0 \leq 2$, так как $\Lambda_{a_j,z}$ содержит коклику $\Delta \cup (X_0 - \{z\})$. Если $u \in [z] - \{a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4\}$, $e \in [u] \cap \Delta$, то $\Lambda_{u,e}$ содержит 8-коклику $\{a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4\}$; противоречие. Итак, $\Delta \cup X_0 \cup \{a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4\}$ является кокликой, в частности, $x_0 \leq 2$.

Допустим, что $\bigcup\limits_{i>0} X_i$ содержит смежные точки p и q. Тогда $x_0 \leq 1$. Если $p \in X_1$, то p смежна не менее чем с тремя вершинами из $\{a_1, \dots, a_4\}$ и из $\{b_1, \dots, b_4\}$. Противоречие с тем, что для $f \in \Delta - [p]$ подграф $[p] \cap [f]$ содержит не менее трех точек из $X_3 \cup X_4$. Значит, точка из X_1 не смежна с вершинами из $\bigcup\limits_{i>0} X_i$. Отсюда, в частности, следует, что $x_4 = 0$. Действительно, точка d из X_4 смежна не более чем с одной вершиной из $\{a_1, \dots, a_4\}$ и из $\{b_1, \dots, b_4\}$, не более чем с двумя точками из X_0 и с вершиной e из X_1; противоречие.

Пусть $p \in X_2$. Тогда p смежна не менее чем с двумя вершинами из $\{a_1, \dots, a_4\}$ и из $\{b_1, \dots, b_4\}$. По лемме 3.1 для $f \in \Delta - [p]$ подграф $[p] \cap [f]$ содержит не менее трех точек из $\bigcup\limits_{i>0} X_i$. Отсюда $[p]$ содержит три точки $q_1 = q, q_2, q_3$ из X_3, и мы имеем $K_{3,5}$-подграф $\{\Delta - [p]; a, b, q_1, q_2, q_3\}$; противоречие.

Таким образом, $\bigcup\limits_{i>0} X_i$ является кокликой, $x_0 = 2$, $x_2 = 4$ и $x_3 = 9$. Далее, окрестность точки из X_3 содержит по две вершины из $\{a_1, \dots, a_4\}$, $\{b_1, \dots, b_4\}$ и из X_0. Противоречие с тем, что тогда $\{X_0; X_3\}$ является $K_{2,9}$-подграфом.

Лемма 3.8. *Параметр* α *больше* 4.

Доказательство. Так как для $w \in \Lambda$ число ребер между $\Lambda(w)$ и $\Lambda_2(w)$ равно 72, а $|\Lambda - w^\perp| = 20$, то $\alpha \geq 4$.

Пусть $\alpha = 4$. Тогда число ребер между Δ и $\Lambda_{a,b}$ равно 28 и $|\Lambda_{a,b}| = 14$. Для $z \in \{a, b\}$ через $\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$ обозначим $\Lambda(z) - \Delta$.

Если точка a_1 смежна с b_1, то Λ_{a_1,b_1} содержит 4-коклику Δ и не более двух точек из X_0. Поэтому $[a_1]$ содержит не менее трех точек из $\{b_1,\dots,b_5\}$. Если a_1 смежна с точкой z из X_0, то подграф $\Lambda_{a_1,z}$ содержит 7-коклику из $\Delta\cup\{b_1,\dots,b_5\}$; противоречие. Отсюда, в частности, $x_0\le 2$. Покажем, что в рассматриваемом случае $x_1=0$. Точка d из X_1 смежна по крайней мере с тремя точками из $\{a_1,\dots,a_5\}$ и из $\{b_1,\dots,b_5\}$, поэтому $\Lambda(d)$ содержит ребро; противоречие.

Далее, по лемме 3.1 точка из Δ смежна по крайней мере с тремя точками из $\Lambda(a_1)$. Допустим, что $[a_1]$ содержит четыре точки из $\{b_1,\dots,b_5\}$, скажем $\{b_1,\dots,b_4\}$. Тогда для $d\in X_i\cap[a_1]$, $i>0$, $e\in[d]\cap\Delta$ подграф $\Lambda_{d,e}$ содержит $(8-i)$-коклику из $\Lambda(a)\cup\Lambda(b)$, поэтому $i\ge 2$. Отсюда, $[d]$ содержит не более $4-i$ точек из $\{a_1,\dots,a_5\}$, не более двух точек из X_0, быть может точку b_5 и не менее двух точек из $\bigcup\limits_{i>0} X_i$. Итак, $i=2$, и если $x_0>0$, то для $f\in X_0\cap[d]$ степень вершины b в подграфе $\Lambda_{d,f}$ не меньше 6; противоречие. Значит, $x_0=0$ и $[d]$ содержит не менее четырех точек из X_2. Противоречие с тем, что в этом случае $\{\Delta-[d];\{a,b\}\cup(X_2\cap[d])\}$ содержит $K_{2,6}$-подграф.

Итак, степень каждой вершины в подграфе $\{a_1,\dots,a_5;b_1,\dots,b_5\}$ равна 0 или 3. Поэтому $\{a_1,\dots,a_5;b_1,\dots,b_5\}$ является либо регулярным графом степени 3, либо объединением 2-коклики с $K_{4,4}$-подграфом без максимального паросочетания, либо объединением 4-коклики и $K_{3,3}$-подграфа. Но в двух последних случаях Λ_{a_1,b_1} содержит 7-коклику. Таким образом, $\{a_1,\dots,a_5;b_1,\dots,b_5\}$ является регулярным графом степени 3.

Теперь $x_0=0$, в противном случае для $z\in X_0$ подграф Λ_{a_1,b_1} содержит 7-коклику $\{a_i,a_j,z\}\cup\Delta$, где $a_i,a_j\notin[b_1]$; противоречие. Таким образом, $x_2=14$, и точка d из X_2 смежна по крайней мере с двумя вершинами из $\{a_1,\dots,a_5\}$ и из $\{b_1,\dots,b_5\}$. Без ограничения общности $[d]$ содержит a_4,a_5,b_4,b_5. Тогда $[a_4]\cap[a_5]$ содержит b_1,b_2,b_3, поэтому $[d]$ содержит по 2 вершины из $\{a_1,\dots,a_5\}$ и из $\{b_1,\dots,b_5\}$ и 3 точки из X_2. Противоречие с тем, что $\{\Delta-[d];\{a,b\}\cup(X_2\cap[d])\}$ содержит $K_{2,5}$-подграф. Мы показали, что $\{a_1,\dots,a_5,b_1,\dots,b_5\}$ является кокликой. Теперь легко понять, что Λ не содержит $K_{3,4}$-подграфов. Действительно, если $c\in X_4$, $\{c_1,\dots,c_5\}=\Lambda(c)-\Delta$, то $\{a_1,\dots,a_5,b_1,\dots,b_5,c_1,\dots,c_5\}\cup\Delta$ является 19-кокликой; противоречие.

Пусть точка z из X_0 смежна с вершиной a_j. Так как степень b в графе $\Lambda_{a_j,z}$ не больше 5, то $[z]$ содержит 4 точки из $\{b_1,\dots,b_5\}$. Симметрично $[z]$ содержит 4 точки из $\{a_1,\dots,a_5\}$. Пусть для определенности точка z не смежна с a_5 и b_5. Ясно, что z — единственная точка из X_0, смежная с вершиной из $\{a_1,\dots,a_5,b_1,\dots,b_5\}$. Далее, $x_0=1$, так как $\Lambda_{a_1,z}$ содержит коклику $\Delta\cup\{a_5,b_5\}\cup(X_0-\{z\})$. Если $u\in[z]-\{a_1,\dots,a_4,b_1,\dots,b_4\}$, $e\in[u]\cap\Delta$, то $\Lambda_{u,e}$ содержит 8-коклику $\{a_1,\dots,a_4,b_1,\dots,b_4\}$; противоречие. Итак, $\Delta\cup X_0\cup\{a_1,\dots,a_5,b_1,\dots,b_5\}$ является кокликой, в частности, $x_0\le 1$.

Покажем, что $x_1=0$. Если $p\in X_1$, то p смежна с тремя вершинами из $\{a_1,\dots,a_5\}$ и из $\{b_1,\dots,b_5\}$, не более чем с одной точкой из X_0 и с двумя вершинами d,e из X_3. Противоречие с тем, что тогда $\{\Delta-[p];a,b,d,e\}$ является $K_{3,4}$-подграфом. Отсюда, в частности, следует, что $x_3=0$. Действительно, точка d из X_3 смежна с единственной вершиной из $\{a_1,\dots,a_4\}$ и из $\{b_1,\dots,b_4\}$, не более чем с одной точкой из X_0 и с вершиной e из X_1; противоречие. Таким образом, $x_2=14$, $x_0=0$.

Пусть $p\in X_2$. Тогда p смежна с двумя вершинами из $\{a_1,\dots,a_4\}$ и из $\{b_1,\dots,b_4\}$ и с тремя точками q_1,q_2,q_3 из X_2. Противоречие с тем, что $\{\Delta-$

$[p]; a, b, q_1, q_2, q_3\}$ является $K_{2,5}$-подграфом. Лемма доказана.

Для доказательства предложения 5 осталось установить справедливость утверждений (2), (3). Допустим, что c, d — различные вершины из одной доли O графа Λ. Пусть $O^* = \Lambda - O$, w — вершина из $(\Gamma(c) \cap \Gamma(d)) - \Lambda$. Тогда $[w] \cap \Lambda$ состоит из трех изолированных ребер. Поэтому O^* содержит вершину вне $[c] \cup [d]$ и $|\Lambda(c) \cap \Lambda(d)| \geq 4$. Утверждение (2) доказано.

В леммах 3.9–3.12 предполагается, что для любых двух вершин x, y графа Λ верно неравенство $|\Lambda(x) \cap \Lambda(y)| \neq 4$. Пусть O и O^* — различные доли графа Λ, причем $a, b \in O$, $\Delta = [a] \cap [b] \cap O^*$, X_i — множество всех вершин из $O - \{a, b\}$, смежных с i вершинами из Δ, $x_i = |X_i|$. Тогда $\sum x_i = 13$, $\sum ix_i = 7\alpha$. Пусть Y_j — множество всех вершин из O^*, смежных с j вершинами из $\{a, b\}$, $y_i = |Y_i|$.

Лемма 3.9. *Для вершины u из O выполняется одно из двух утверждений:*

(a) *число точек в $[u] \cap [w] \cap O^*$ равно 7 для единственной вершины w из $O - \{u\}$ и равно 5 для любой из оставшихся 13 вершин;*

(b) *число точек в $[u] \cap [w_i] \cap O^*$ равно 7 для двух вершин w_1, w_2 из $O - \{u\}$ и равно 5 для любой из оставшихся 12 вершин.*

Доказательство. Число ребер между $[u] \cap O^*$ и $O - \{u\}$ равно 72. Отсюда следуют все утверждения леммы.

Лемма 3.10. *Параметр α равен* 6.

Доказательство. Если $\alpha = 7$, то $y_0 = y_1 = 4$, $y_2 = 7$ и любая вершина из $O - \{a, b\}$ смежна с пятью точками из $[a] \cap O^*$ и по крайней мере с тремя точками из Δ. Поэтому $x_3 + x_4 + x_5 = 13$, $3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 49$ и $x_3 - x_5 = 3$.

Допустим, что $c \in X_5$. Тогда $[c] \cap O^*$ содержит Y_0 и не пересекает Y_1. Для вершин s_1, s_2 из $\Delta - [c]$ подграф $[s_1] \cup [s_2]$ не пересекает X_3, иначе для вершины d из $([s_1] \cup [s_2]) \cap X_3$ подграф $[c] \cap [d] \cap O^*$ содержит не более двух вершин из Y_2 и две из Y_0; противоречие. Теперь подграф $O - ([s_1] \cup [s_2])$ содержит c и не менее четырех вершин из X_3. Противоречие с тем, что тогда $|[s_1] \cap [s_2] \cap O| \geq 8$.

Значит, $x_5 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 10$. Для $c \in X_4$ подграф $[c] \cap O^*$ содержит 3 вершины из Y_0 и по одной вершине из Y_1, смежной с a, b соответственно. Пусть $\{r_1, r_2\} = [a] \cap Y_1$. Тогда $[r_1] \cap [r_2]$ не пересекает X_4; противоречие.

Лемма 3.11. *Пусть $\Delta = [c] \cap [d] \cap O^*$ для некоторых вершин $c, d \in O$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $|\Delta| = 5$, то $|[e] \cap \Delta| \geq 2$ для любой вершины e из $\Delta - \{c, d\}$;*

(2) *если $|[e] \cap \Delta| = 2$ для некоторой вершины e из $\Delta - \{c, d\}$, то $[u] \cap [w]$ содержит 6 вершин из O^* для некоторых $u, w \in \{c, d, e\}$.*

Доказательство. Пусть $e \in \Delta - \{c, d\}$ и $[e] \cap \Delta$ состоит из единственной вершины r. Тогда $[e]$ содержит по 4 вершины из $([c] - [d]) \cap O^*$ и $([d] - [c]) \cap O^*$. Для $\{u, w\} = O^* - ([c] \cup [d])$ подграф $[u] \cap [w]$ содержит 6 вершин из O. Если вершина f из $[u] \cap [w] \cap O$ не смежна с r, то $[f] \cap O^*$ содержит не более четырех вершин в одной из окрестностей $[c]$, $[d]$, $[e]$. Поэтому Λ содержит $K_{3,6}$-подграф $\{r, u, w; [u] \cap [w] \cap O\}$; противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть $|[e] \cap \Delta| = 2$ для некоторой вершины e из $\Delta - \{c, d\}$ и $[u] \cap [w]$ содержит 5 вершин из O^* для любых двух вершин $u, w \in \{c, d, e\}$. Тогда O^* содержит по точке, смежной с единственной вершиной из $\{c, d, e\}$, и $|O^*| = 16$; противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 3.9, 3.10 следует, что $O - \{a, b\}$ содержит единственную вершину a^* (вершину b^*), смежную с шестью вершинами из $[a] \cap O^*$ (из $[b] \cap O^*$). Положим

$Y_0 = \{r, u, w\}$.

Лемма 3.12. *Выполняются утверждения:*

(1) $x_5 = 0$ *и* Λ *не содержит* $K_{3,5}$*-подграфов;*

(2) *можно считать, что* $\Delta' = [u] \cap [w] \cap O$ *состоит из 6 точек, причем вершина* r *из* $Y_0 - \{u, w\}$ *смежна с двумя точками* d_1, d_2 *из* Δ'*;*

(3) X_2 *содержит единственную вершину* c*, смежную с* r*,* $X_4 = \{a^*, b^*, d_1, d_2\}$*,* a^*, b^* *смежны с* r *и* $|[s_1] \cap [s_2] \cap O| = 5$.

Доказательство. Так как число ребер между Y_2 и $O - \{a, b\}$ равно 42, то верны равенства $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13$ и $2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 42$, причем $X_5 \subset \{a^*, b^*\}$. Если $a^*, b^* \in X_5$, то $[a^*] \cap [b^*] \cap O^*$ содержит Y_0 и не менее четырех вершин из Y_2; противоречие с тем, что $\alpha = 6$. Пусть $a^* \in X_5$. Тогда $x_2 + x_3 + x_4 = 12$ и $2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 37$. Если $c \in X_4$, то $[c]$ содержит Y_0 и $|[a^*] \cap [d] \cap O^*| = 5$ для любой вершины d из $O - \{a, c\}$. В этом случае $x_2 + x_3 = 11$ и $2x_2 + 3x_3 = 33$, поэтому $x_2 = 0$ и $x_3 = 11$. Для вершин $e \in Y_2 - [a^*]$ и $d \in (X_3 - \{b^*\}) \cap [e]$ подграф $[a^*] \cap [d] \cap O^*$ содержит 2 точки из Y_2 и по одной из Y_0, Y_1; противоречие. Значит, $x_4 = 0$, $x_2 + x_3 = 12$ и $2x_2 + 3x_3 = 37$; снова противоречие. Итак, $x_5 = 0$, $x_2 + x_3 + x_4 = 13$, $2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 42$ и $x_4 - x_2 = 3$.

Предположим, что Λ содержит $K_{3,5}$, подграф $\{a_1, a_2, a_3; b_1, \ldots, b_5\}$. Без ограничения общности $a_1, a_2, a_3 \in O$. Если $[a_1] \cap [a_2]$ содержит 6 точек из O^*, то $[a_3]$ содержит 5 точек из $[a_1] \cap [a_2] \cap O^*$; противоречие с тем, что $x_5 = 0$. Поэтому $[a_i] \cap [a_j]$ содержит 5 точек из O^* для $i \neq j$ и $O^* - \{b_1, \ldots, b_5\}$ содержит по 4 точки, смежные с a_1, a_2, a_3 соответственно. Противоречие с тем, что тогда $|O^*| \geq 17$. Утверждение (1) доказано.

Если c, d — различные вершины из X_2, то $[c] \cap [d] \cap O^*$ содержит 6 точек из Y_1. В этом случае пусть X_i' — множество всех вершин из $O - \{c, d\}$, смежных с i точками из Y_1. Тогда $x_4 = 5$, $x_3 = 6$, $a^*, b^* \in X_4 \cap X_3'$ и $X_3 \subset X_4'$; противоречие.

Значит, $x_2 \leq 1$. Пусть $\Delta' = [u] \cap [w] \cap O$ состоит из 6 точек. Тогда $O - ([u] \cup [w])$ состоит из трех точек a, b, c. Далее, $[r] \cap \Delta'$ содержит 2 или 3 точки, причем в последнем случае $c = a^* = b^*$; противоречие. Допустим, что $[u] \cap [r] \cap O$ состоит из 5 точек. Тогда $O \cap [w]$ содержит либо по три точки из $[u] \cap [r]$, $[u] - [r]$, $[r] - [u]$, либо две точки из $[u] \cap [r]$, четыре из $[u] - [r]$, и три точки из $[r] - [u]$. В любом случае можно считать, что Δ' состоит из 6 точек. Утверждение (2) доказано.

Итак, $[r] \cap \Delta' = \{d_1, d_2\}$, и r смежна с c. Ясно, что $[c] \cap \Delta$ содержит 2 вершины s_1, s_2, поэтому $x_2 = 1$, $x_3 = 8$ и $x_4 = 4$. Если $d \in X_4 - \{a^*, b^*\}$, то $[c] \cap [d]$ содержит r, s_1, s_2 и 2 вершины из Y_1. Отсюда $X_4 = \{a^*, b^*, d_1, d_2\}$. Симметрично каждая из вершин s_1, s_2 смежна с четырьмя вершинами из Δ'.

Если $a^* \in [u] \cap [w]$, то вершина a^* не смежна с r и $[c] \cap [a^*]$ содержит 3 вершины из Y_1 и s_1, s_2. В этом случае $\Delta' - ([s_1] \cup [s_2])$ содержит некоторую вершину e. Противоречие с тем, что $[c] \cap [e]$ содержит не менее пяти вершин из O^*. Значит, a^*, b^* смежны с r. Теперь $[r] \cap ([s_1] \cup [s_2])$ содержит две вершины из X_3, имеющие по 6 общих с c соседей в O^*. Поэтому $|[s_1] \cap [s_2] \cap O| = 5$. Лемма доказана.

Завершим доказательство предложения 3. Пусть $\Delta' = [s_1] \cap [s_2] \cap O = \{a, b, c, d_1, d_2\}$, Z_i — множество всех вершин из $O - \{d_1, d_2\}$, смежных с i точками из Δ'. Тогда $u, w \in Z_2$. Ввиду леммы 3.11 один из подграфов $[s_1] \cap [u]$ или $[s_2] \cap [u]$ содержит 6 точек из O. Противоречие с тем, что $[s_i] \cap O$ содержит a, b, c, 4 точки из $[u] \cup [w]$ и по одной из $[u] - [w]$, $[w] - [u]$. Предложение 3 доказано.

§ 4. Случай $t = 8$, $\mu = 30$

В этом параграфе мы докажем предложение 4 и следствие.

Предложение 4. *Пусть Γ — локально $GQ(4,8)$ граф, в котором $\mu(p,q) = 30$, O и O^* — непересекающиеся 15-коклики из $[p] \cap [q]$. Если c, d — точки из O такие, что $O^* - ([c] \cup [d])$ содержит единственную вершину e, и $\mu(c,d) = 30$, то $\mu(c,e)$ и $\mu(d,e)$ больше 30.*

Следствие. *Не существует вполне регулярных локально $GQ(4,8)$ графов с $\mu = 30$.*

Пусть Γ удовлетворяет условиям предложения 4, $\Lambda = [p] \cap [q]$ и $\mu(c,e) = 30$. Тогда $[c] \cap [d]$ содержит p, q и по 5 вершин из $[p] - \Lambda$ и $[q] - \Lambda$, необходимо смежных с e. Пусть $\Sigma = [c] \cap [d] \cap [e]$, O_1, O_1^* — доли графа $[c] \cap [d]$, где $p, q \in O_1$, и O_2, O_2^* — доли графа $[c] \cap [e]$.

Покажем, что вершины p, q лежат в разных долях графа $[c] \cap [e]$. Предположим, что $p, q \in O_2$. Заметим, что $[p] \cap [q]$ содержит 4 вершины из $O_1^* - [e]$. Далее, $O_1^* \cap O_2^*$ содержит по 5 вершин, смежных с p, q соответственно. Пусть $g \in (O_1^* \cap [p] \cap [q]) - [e]$. Тогда $[g] \cap [c] \cap [e]$ содержит p, q, не более одной вершины из $O_2^* - ([p] \cup [q])$ и 2 точки из $O_2^* \cap [p] \cap [q]$; противоречие с тем, что $[g] \cap [c] \cap [e]$ состоит из трех изолированных ребер.

Пусть $p \in O_2$, $q \in O_2^*$. Любая из пяти вершин в $\{a_1, \ldots, a_5\} = [p] \cap \Sigma$ не смежна ни с одной точкой из $[q] \cap \Sigma$. Поэтому $[a_1] \cap [a_2]$ содержит не менее восьми вершин из O_2; противоречие с предложением 3. Значит, $\mu(c,e) \neq 30$, и ввиду леммы 1.2 имеем $\mu(c,e) > 30$. Аналогично доказывается, что $\mu(d,e)$ больше 30. Предложение 4 доказано.

Докажем следствие. Пусть Γ — вполне регулярный локально $GQ(4,8)$ граф с $\mu = 30$. Для вершин p, q, находящихся на расстоянии 2, положим $\Lambda = [p] \cap [q]$. Через O, O^* обозначим различные доли из Λ. Ввиду предложения 4 можно считать, что в O найдутся такие вершины c, d, что $|[c] \cap [d] \cap O^*| = 4$. Тогда $O^* - ([c] \cup [d])$ содержит единственную вершину e; противоречие с предложением 4. Следствие доказано.

Из предложения 2 и следствия получаем заключение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Buekenhout F., Hubaut X.* Locally polar spaces and related rank 3 groups // J. Algebra. 1977. V. 45, N 2. P. 391–434.
2. *Cameron P., Hughes D. R., Pasini A.* Extended generalized quadrangles // Geom. Dedicata. 1990. V. 35, N 1–3. P. 193–228.
3. *Blokhuis A., Brouwer A. E.* Locally 4-by-4 grid graphs // J. Graph Theory. 1989. V. 13, N 2. P. 229–244.
4. *Махнев А. А.* Конечные локально GQ(3,3)-графы // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 6. С. 1314–1324.
5. *Махнев А. А.* Локально GQ(3,5)-графы и геометрии с короткими прямыми // Дискрет. математика. 1998. Т. 10, № 2. С. 72–86.
6. *Махнев А. А., Падучих Д. В.* О структуре локально GQ(3,9) графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1998. Т. 5, № 2. С. 61–77.
7. *Pasechnik D. V.* The triangular extensions of a generalized quadrangle of order (3,3) // Bull. Belg. Math. Soc. 1995. V. 2, N 5. P. 509–518.
8. *Pasechnik D. V.* The extensions of the generalized quadrangle of order (3,9) // European J. Combin. 1996. V. 17, N 8. P. 751–755.
9. *Махнев А. А.* О псевдогеометрических графах некоторых частичных геометрий // Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во Гомельск. ун-та, 1997. Вып. 11. С. 60–67.

10. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular graphs. Berlin etc.: Springer-Verl., 1989.

11. *Махнев А. А.* Расширения GQ(4,2), сильно регулярный случай // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 1. С. 124–130.

12. *Махнев А. А.* О несуществовании сильно регулярных графов с параметрами (486, 165, 36, 66) // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 941–949.

13. *Махнев А. А. (мл.), Махнев А. А.* Овоиды и двудольные подграфы в обобщенных четырехугольниках // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 6. С. 878–885.

14. *Payne S., Thas J.* Finite generalized quadrangles. Boston: Pitman, 1984. (Research Notes in Math.; V. 110).

15. *Fisher P. H., Hobart S. A.* Triangular extended generalized quadrangles // Geom. Dedicata. 1991. V. 37, N 3. P. 339–344.

16. *Cuypers H.* On a generalization of Fisher spaces // Geom. Dedicata. 1990. V. 34, N 1. P. 67–88.

Статья поступила 9 июня 2006 г.

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620219
makhnev@imm.uran.ru