Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2008. Том 49, № 2

УДК 510.5

О e–ГЛАВНЫХ НУМЕРАЦИЯХ

А. Н. Дегтев, М. Л. Платонов

Аннотация. Доказывается существование вычислимых семейств конечных множеств и общерекурсивных функций, не имеющих e-главных нумераций. Приводится серия примеров e-степеней, среди p-степеней вычислимых нумераций которых нет наибольшей.

Ключевые слова: частично рекурсивная функция, рекурсивно перечислимое множество, вычислимая нумерация, e-сводимость, p-сводимость.

Пусть ν и μ — произвольные нумерации непустого не более чем счетного множества S. Будем говорить, что нумерация ν *e-сводима к нумерации* μ, и обозначать $\nu \leq_e \mu$, если существует отображение Φ такое, что

$$(\forall s \in S)(\nu^{-1}(s) = \Phi(\mu^{-1}(s))).$$

Отображение $\Phi : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ называется *e-оператором*, если существует рекурсивно перечислимое множество (РПМ) W такое, что

$$(\forall X \subseteq \mathbb{N})(\Phi(X) = \{x : (\exists y)(\langle x, y\rangle \in W \wedge D_y \subseteq X)\}),$$

где $\langle x, y\rangle$ — канторовский номер пары (x, y) натуральных чисел x и y, D_y — конечное подмножество множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ с каноническим номером y, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ — множество всех подмножеств множества натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Отображение $\Phi : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ называется *p-оператором*, если существует общерекурсивная функция (ОРФ) f такая, что

$$(\forall X \subseteq \mathbb{N})(\Phi(X) = \{x : (\exists y)(y \in D_{f(x)} \wedge D_y \subseteq X)\}).$$

В дальнейшем в случае e-сводимости нумераций будем отождествлять e-оператор Φ с РПМ W, подразумевая при этом, что нумерация ν e-сводима к нумерации μ посредством РПМ W. Аналогично в случае p-сводимости нумераций будем отождествлять p-оператор Φ с ОРФ f, подразумевая при этом, что нумерация ν e-сводима к нумерации μ посредством ОРФ f.

Классы e-эквивалентных (вычислимых) нумераций множества S образуют e-степени, и все они вместе с частичным порядком, индуцируемым отношением $\leq_e$, в свою очередь, образуют верхнюю полурешетку $\mathscr{L}_e(S)$ (вычислимых) нумераций, верхней гранью которой является нумерация $\mu(x) \oplus \nu(x)$. Аналогичным образом определяются p-степени нумераций множества S и верхняя полурешетка $\mathscr{L}_p(S)$. Известно, что p-сводимость «сильнее» e-сводимости. Поэтому e-степень состоит, вообще говоря, из нескольких p-степеней. Соответствующие результаты определены в работе [1], в которой описаны полурешетки $\mathscr{L}_e(\mathscr{S})$ конечных семейств РПМ $\mathscr{S}$ и приведен пример вычислимого семейства РПМ, не имеющего e-главной нумерации.

Семейство РПМ $\mathscr{R}$ называется *дискретным*, если существует семейство конечных РПМ $\mathscr{F}$ такое, что выполнены следующие условия:

(1) для любого $D \in \mathscr{F}$ существует не более одного $R \in \mathscr{R}$ такого, что $D \subseteq R$;

(2) для любого $R \in \mathscr{R}$ существует $D \in \mathscr{F}$ такое, что $D \subseteq R$.

Дискретное семейство РПМ $\mathscr{R}$ называется *эффективно дискретным*, если для некоторой ОРФ f существует сильно перечислимое семейство конечных множеств $\mathscr{F}$ такое, что $\mathscr{F} = \{D_{f(0)}, D_{f(1)}, \dots\}$.

В [2] доказано, что все вычислимые нумерации эффективно дискретного семейства РПМ $\mathscr{R}$ являются m-эквивалентными и образуют одноэлементную полурешетку $\mathscr{L}_e(\mathscr{R})$.

Предложение 1. *Существует дискретное, но не эффективно дискретное семейство конечных множеств $\mathscr{R}$ такое, что полурешетка $\mathscr{L}_e(\mathscr{R})$ одноэлементна.*

Доказательство. Пусть R — нерекурсивное РПМ. Рассмотрим семейство $\mathscr{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_n, \dots\}$ попарно не пересекающихся множеств:

$$R_0 = [0, a_0], R_1 = (a_0, a_1], \dots, R_n = (a_{n-1}, a_n], \dots,$$

где $\{a_n\}_{n \geq 0}$ — прямой пересчет дополнения R. Семейство $\mathscr{R}$ является вычислимым.

Действительно, нумерация

$$\nu(x) = \begin{cases} [0, a_0], & \text{если } x \leq a_0, \\ (a_n, a_{n+1}], & \text{если } x \in (a_n, a_{n+1}], \end{cases}$$

является вычислимой. Покажем это. По шагам будем перечислять нерекурсивное РПМ R. На шаге $t = 1$ полагаем, что $\nu^1(x) = \{x\}$. Если на шаге $t \geq 1$ элементы a и b окажутся соответственно наименьшим и наибольшим элементами нумерации $\nu^t(x)$ и к этому шагу в R вычислены элементы $a - 1$ или b, то полагаем, что $\nu^{t+1}(x) = \nu^t(x) \cup \{a - 1\}$ или $\nu^{t+1}(x) = \nu^t(x) \cup \{b + 1\}$.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о том, является ли семейство $\mathscr{R}$ эффективно дискретным.

Предположим, что для семейства $\mathscr{R}$ существует сильно вычислимое семейство конечных множеств $\mathscr{F}$, подтверждающее эффективную дискретность семейства $\mathscr{R}$. Так как семейство $\mathscr{R}$ состоит из попарно не пересекающихся множеств, то можно считать, что все множества семейства $\mathscr{F}$ одноэлементны. Это означает, что существует вычислимая последовательность элементов $a_0, a_1, \dots$ такая, что для каждого $x \in R$ существует и единственно число $n \in \mathbb{N}$, для которого $a_n \in \nu(x)$. Перечисляем элементы нумерации $\nu(x)$ до тех пор, пока для элемента a_n не обнаружим такие элементы a_k, a_l, b_k, b_l, y и z, что $a_k \leq a_l$ и $b_k \leq b_l$. Пусть на некотором шаге t элементы $a_k \in \nu^t(y)$, $b_k \in \nu^t(y)$, $a_k \in \nu^t(z)$, $b_k \in \nu^t(z)$, $a_n \in (b_k, b_l)$, а также все элементы из интервала (b_k, b_l), кроме одного, скажем w, вычислены в R. Понятно, что $w \in \mathbb{N} \setminus R$. Поэтому дополнение нерекурсивного РПМ R оказывается рекурсивно перечислимым множеством, что по теореме Поста противоречит нерекурсивности РПМ R.

В заключение пусть μ — другая вычислимая нумерация семейства $\mathscr{R}$. Для всех $x \geq 0$ перечисляем элементы нумераций $\nu(x)$ и $\mu(x)$, пока не найдется такого элемента y, что $\mu(x) \cap \nu(y) \neq \varnothing$. Очевидно, что $\mu(x) = \nu(y)$ и ОРФ $f(x) = y$ осуществляет сведение нумерации μ к нумерации ν. В данном случае любая нумерация μ семейства $\mathscr{R}$ является позитивной, вследствие того, что все множества семейства $\mathscr{R}$ являются попарно не пересекающимися. Точнее, отношение $x \eta y \Leftrightarrow \mu(x) = \nu(y)$ есть позитивная эквивалентность. $\square$

Пусть $\mathscr{F}$ — некоторое семейство ОРФ. *Предельной точкой* для семейства $\mathscr{F}$ будем называть такую ОРФ f, если для любого $n \in \mathbb{N}$ в семействе $\mathscr{F}$ существует ОРФ g, для которой

$$(\forall x \leq n)(f(x) = g(x)).$$

Если семейство $\mathscr{F}$ не содержит предельных точек, то оно дискретно.

Предложение 2. *Для каждого нерекурсивного* РПМ R *можно определить дискретное семейство* ОРФ $\mathscr{F}$ *такое, что полурешетка* $\mathscr{L}_e(\mathscr{F})$ *имеет наибольший элемент и счетное число минимальных элементов.*

Доказательство. Пусть ОРФ f перечисляет РПМ R без повторений. Для всех $n \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\nu_{2n}(x) = n,$$

$$\nu_{2n+1}(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x = 0 \text{ или } n \notin \{f(y) : y \leq x\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $\nu_n(x)$ — значение ОРФ f с номером n, вычисленное в точке x. Понятно, что нумерация ν есть вычислимая нумерация некоторого дискретного семейства ОРФ $\mathscr{F}$, не являющаяся позитивной. Иначе РПМ R оказалось бы рекурсивным, потому что $n \in \overline{R} \Leftrightarrow \nu_{2n} = \nu_{2n+1}$.

Если μ — другая нумерация дискретного семейства ОРФ $\mathscr{F}$, то $\mu \leq_e \nu$ посредством e-оператора Φ, состоящего из чисел

(1) $\langle x, y\rangle$ таких, что $D_y = \{2\mu_x(0)\}$;

(2) $\langle x, z\rangle$ таких, что $D_z = \{2\mu_x(0) + 1\}$.

Естественно, все это имеет место при условии существования такого числа m, что $\mu_x(m) = 0$. Поэтому нумерация ν семейства $\mathscr{F}$ будет e-главной нумерацией, а e-степень нумерации ν является наибольшим элементом полурешетки $\mathscr{L}_e(\mathscr{F})$. С другой стороны, полурешетка $\mathscr{L}_m(\mathscr{F})$ всех m-эквивалентных степеней вычислимых нумераций семейства $\mathscr{F}$ нетривиальна вследствие того, что семейство $\mathscr{F}$ всегда имеет однозначную вычислимую нумерацию. Поэтому семейство $\mathscr{F}$ имеет счетное число попарно m-несравнимых однозначных нумераций [3], которые являются попарно m-несравнимыми, потому что $\mu \leq_e \nu$, $\mu =_m \nu$ и ν — позитивная нумерация. □

Напомним, что $\mathscr{L}_m(\mathscr{F})$ — нетривиальная полурешетка, не имеющая m-главной нумерации [3]. Существуют вычислимые нумерации рекурсивно перечислимых множеств, которым e-эквивалентны невычислимые нумерации. Поэтому наибольший интерес представляют примеры вычислимых нумераций, не являющиеся позитивными, к которым e-сводимы вычислимые нумерации.

Пусть $\mathscr{S}$ — бесконечное семейство непустых РПМ, имеющее однозначную вычислимую нумерацию, R — нерекурсивное РПМ и f — ОРФ, перечисляющая R без повторений.

Определим вычислимую нумерацию ν_R семейства $\mathscr{S}' = \mathscr{S} \cup \{\varnothing\}$ следующим образом:

$$\nu_R(x) = \begin{cases} \nu(y), & \text{если } x \in R, \text{ где } y = \min\{z : f(z) = x\}, \\ \varnothing, & \text{если } x \notin R. \end{cases}$$

Понятно, что ν_R не является позитивной нумерацией вследствие того, что $\nu_R^{-1}(\varnothing)$ — дополнение нерекурсивного РПМ R.

Предложение 3. *e-Степень нумерации ν_R состоит только из вычислимых нумераций семейства $\mathscr{S}'$.*

Доказательство. Достаточно показать, что если μ — некоторая нумерация семейства $\mathscr{S}'$ и $\mu \leq_e \nu_R$, то μ — вычислимая нумерация. Если Φ является e-оператором, осуществляющим сведение нумерации μ к нумерации ν_R, то для всякого $s \in \mathscr{S}$

$$\mu^{-1}(s) = \big\{x : (\exists y)\big(\langle x, y\rangle \in W \wedge D_y \subseteq \nu_R^{-1}(s)\big)\big\}.$$

По определению нумерации ν_R если $s \in \mathscr{S}'$ и $s \neq \varnothing$, то существует единственное число y такое, что $\nu_R(y) = s$.

Определим вычислимую нумерацию μ' некоторого семейства $\mathscr{S}_0 \subseteq \mathscr{S}'$ следующим образом:

$$\mu'(x) = \begin{cases} \nu_R(z), & \text{если } (\exists y)(\langle x, y\rangle \in \Phi \wedge D_y = \{z\}),\\ \varnothing, & \text{если } (\forall y)(\langle x, y\rangle \in \Phi \Rightarrow |D_y| \geq 2). \end{cases}$$

Теперь понятно, что $\mu = \mu'$. $\square$

Пусть ν и μ — две вычислимые нумерации некоторого семейства РПМ. Обозначим через $\nu^t(n)$ и $\mu^t(n)$ конечные множества элементов, вычисленные в нумерациях $\nu(n)$ и $\mu(n)$ к шагу t соответственно. Будем говорить, что нумерация ν *p-сводима к нумерации μ на шаге t в точке x посредством частично рекурсивной функции* (ЧРФ) φ_n *с высотой m*, если выполнены следующие условия:

(1) значение $\varphi_n(x)$ вычислено к шагу t и $\varphi_n(x) = y$;

(2) существует число $z \in D_y$ такое, что для всякого $v \in D_z$

$$\{u \leq m : u \in \mu^t(v)\} = \{u \leq m : u \in \nu^t(x)\};$$

(3) не существует числа $z \in D_y$ такого, что для любых чисел $v_1, v_2 \in D_z$

$$\{u \leq m : u \in \mu^t(v_1)\} = \{u \leq m : u \in \mu^t(v_2)\} \neq \{u \leq m : u \in \nu^t(x)\}.$$

Определим счетчик F, полагая

$$F(n, 0) = 0, \dots, F(n, t+1) = \max\{F(n, t), F(n, t+1)\},$$

где $F(n, t)$ — значение счетчика, равное наибольшему числу m такому, что для всякого $x \leq m$ нумерация ν p-сводима к нумерации μ на шаге t в точке x посредством ЧРФ φ_n с высотой m. Нетрудно проверить, что $F(n, t)$ — монотонная по t ОРФ и

$$\lim_{t\to\infty} F(n, t) = \infty \Leftrightarrow \varphi_n \text{ — ОРФ и } \nu \leq_p \mu \text{ посредством } \varphi_n.$$

Следующая лемма аналогична предложению из [2] для обычной сводимости нумераций.

Лемма 1. *Пусть семейство* РПМ $\mathscr{S}$ *имеет p-главную нумерацию и ρ — вычислимая нумерация некоторого подсемейства семейства $\mathscr{S}$ такая, что*

$$\rho(0) \subseteq \rho(1) \subseteq \dots \subseteq \rho(n) \dots.$$

Тогда множество $R = \bigcup\limits_{n\geq 0} \rho(n)$ принадлежит семейству $\mathscr{S}$.

Доказательство. Предположим, что $R \notin \mathscr{S}$ и μ — произвольная нумерация семейства $\mathscr{S}$. Построим вычислимую нумерацию ν некоторого подсемейства семейства $\mathscr{S}$ такую, что $\nu \nleq_p \mu$ для любой ОРФ g. Тогда $\nu \oplus \mu \nleq_p \mu$ и μ не

является p-главной нумерацией семейства $\mathscr{S}$. А именно, для всех натуральных n полагаем
$$\nu^0(n) = \varnothing, \ldots, \nu^{t+1}(n) = \bigcup_{k \le F(n,t)} \rho^{t+1}(k).$$

Из монотонности определенного выше счетчика $F(n,t)$ по t и свойства $\rho^t(k) \subseteq \rho^{t+1}(k)$ следует, что $\nu^t(n) \subseteq \nu^{t+1}(n)$.

Счетчик $F(n,t)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ обладает следующим свойством:
$$\lim_{t\to\infty} F(n,t) < \infty.$$
В противном случае из свойств счетчика $F(n,t)$ для некоторого натурального n следует, что $\nu \le_p \mu$ посредством φ_n и $\nu(n) = \bigcup_{k\ge 0} \rho(k) = R$. Поэтому, учитывая предположение о том, что $R \notin \mathscr{S}$, получаем
$$\lim_{t\to\infty} F(n,t) < \infty.$$

Обозначая этот предел через $f(n)$, получим, что $\nu(n) = \bigcup_{k \le f(n)} \rho(k) = \rho(f(k))$ и $\nu(n) \in \mathscr{S}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Итак, ν — вычислимая нумерация некоторого подсемейства семейства $\mathscr{S}$, причем $\nu \not\le_p \mu$. Осталось сослаться на замечание выше. $\square$

Следствие 1. *Существует e-степень вычислимой нумерации некоторого семейства конечных множеств, среди p-степеней вычислимых нумераций которой нет наибольшей p-степени.*

Доказательство. Рассмотрим сильно перечислимое семейство конечных множеств $\{0\} \subset \{0,1\} \subset \cdots \subset \{0,1,\ldots,n\} \subset \ldots$. Это семейство имеет e-главную нумерацию [1], но по лемме 1 не имеет p-главной нумерации. Поэтому e-степень этой e-главной нумерации будет искомой. $\square$

Пусть A и B — рекурсивно перечислимые множества, причем $\overline{B} \not\le_e \overline{A}$ посредством e-оператора Φ. Для множества A существует ОРФ f [4] такая, что
$$(\forall n \in \mathbb{N})(D_n \cap A \ne \varnothing \Leftrightarrow f(n) \in A). \qquad (*)$$

Определим новый e-оператор Ψ. Для каждого $x \in \mathbb{N}$ по шагам перечисляем значения Φ, A, B и относим к Ψ число $\langle x, 2^{f(y_1)}\rangle$, где $\langle x, 2^{y_1}\rangle$ — первое число, вычисленное в Φ. Если на некотором шаге, большем чем t, выясняется, что $f(y_1) \in A^t$, $x \notin B^t$ и к шагу t в Φ вычислено новое число $\langle x, 2^{y_2}\rangle$, то число $\langle x, 2^{f(y_2)}\rangle$ относим к Ψ, и т. д.

Заметим, что оператор Ψ обладает следующими свойствами:

(1) множество $E_x = \{y : \langle x, y\rangle \in \Psi\}$ конечно для каждого $x \in \mathbb{N}$;

(2) $E_x \subseteq A$, если $x \in B$;

(3) множество $E_x \cap \overline{A}$ одноэлементно, если $x \notin B$.

Действительно, как только на подходящем шаге выяснится, что $x \in B$, на последующих шагах числа $\langle x, 2^y\rangle$ к оператору Ψ относиться больше не будут, а по свойству $(*)$ $\langle x, 2^y\rangle \in \Psi \Rightarrow y \in A$. Если же $x \notin B$, то $\langle x, 2^y\rangle \in \Phi$ и $D_y \subseteq \overline{A}$ для некоторого y. Тогда некоторое число $\langle x, 2^{f(y)}\rangle$ будет отнесено к Ψ, $f(y) \in \overline{A}$, после чего числа вида $\langle x, 2^z\rangle$ также не будут относиться к оператору Ψ. В частности, $\overline{B} \le_e \overline{A}$ посредством e-оператора Ψ.

Как отмечено выше, сильно перечислимое семейство конечных множеств имеет e-главную нумерацию [1].

В работе [1] поставлен вопрос: нельзя ли условие сильной перечислимости заменить условием вычислимости? Оказывается, ответ на этот вопрос отрицателен.

Теорема 1. *Существует вычислимое семейство конечных множеств, не имеющее e-главной нумерации.*

Доказательство. Известно [4, 5], что полурешетка $\mathscr{T}$ рекурсивно перечислимых степеней не является решеткой и каждая такая степень содержит полурекурсивное РПМ. Пусть A_0 и B_0 — два РПМ, T-степени которых не имеют в полурешетке $\mathscr{T}$ точной нижней грани и $0 \in A_0$. Рассмотрим следующие множества:

$$A = \{2x : x \in A_0\} \cup \{2x+1 : x \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{2x : x \in \mathbb{N}\} \cup \{2x+1 : x \in B_0\}.$$

Очевидно, что $A =_T A_0$ и $B =_T B_0$, причем

$$A \cap B = \{2x : x \in A_0\} \cup \{2x+1 : x \in B_0\}, \quad 0 \in A \cap B.$$

Пусть $\{a_i\}_{i \geq 0}$ и $\{b_i\}_{i \geq 0}$ — прямые пересчеты множеств $\{2x : x \in \mathbb{N}\} \setminus A$ и $\{2x+1 : x \in \mathbb{N}\} \setminus B$ соответственно.

Определим нумерации множеств A и B следующим образом:

$$\nu_A(n) = \{2n, 2n+2, \ldots, a_k\}, \quad \nu_B(n) = \{2n+1, 2n+3, \ldots, b_l\},$$

где $k = \min\{i : a_i \geq 2n\}$ и $l = \min\{j : b_j \geq 2n+1\}$.

Понятно, что ν_A и ν_B — вычислимые нумерации некоторых семейств конечных множеств, состоящих из четных и нечетных чисел соответственно, причем, $\nu_A(n) \cap \overline{A}$ и $\nu_B(n) \cap \overline{B}$ суть одноэлементные множества для каждого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\nu_0(\langle x, y\rangle) = \nu_A(x) \cup \nu_B(y)$ будет вычислимой нумерацией некоторого семейства конечных множеств, причем множества $\nu_0(n) \cap \overline{A}$ и $\nu_0(n) \cap \overline{B}$ будут одноэлементными для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Семейство конечных множеств

$$\mathscr{S} = \{D \cup \{0\} : D \subseteq A \cap B \wedge |D| < \infty\} \cup \{\nu_0(n) \cup D \setminus \{0\} : D \subseteq A \cap B \wedge |D| < \infty\}$$

имеет некоторую вычислимую нумерацию ν, обладающую следующим свойством: для всякого $n \in \mathbb{N}$ либо $\nu(n) \subseteq A \cap B$ и $0 \in \nu(n)$, либо $\nu(n) \cap \overline{A}$ и $\nu(n) \cap \overline{B}$ — одноэлементные множества и $0 \notin \nu(n)$. Тогда $C_0 = \{n : 0 \in \nu(n)\}$ — РПМ, причем $\overline{C}_0 \leq_e \overline{A}$ ($n \in \overline{C}_0 \Leftrightarrow \nu(n) \cap \overline{A} \neq \varnothing$) и $\overline{C}_0 \leq_e \overline{B}$ ($n \in \overline{C}_0 \Leftrightarrow \nu(n) \cap \overline{B} \neq \varnothing$). Точнее, $\overline{C_0} \leq_e \overline{A}$ и $\overline{C}_0 \leq_e \overline{B}$ посредством одного и того же e-оператора

$$\Phi = \{\langle x, y\rangle : x \in \mathbb{N} \wedge D_y \subseteq \nu(x)\}.$$

По выбору РПМ A и B существует РПМ C такое, что $C_0 <_T C$, $C \leq_T A$, $C \leq_T B$. Это равносильно тому, что $\overline{C} \leq_e \overline{A}$, $\overline{C} \leq_e \overline{B}$ посредством подходящих e-операторов Ψ_0 и Ψ_1, удовлетворяющих условиям (1)–(3), определенным выше, с заменой в них множества B на C, множества A на B, оператора Ψ на Ψ_0 (Ψ_1).

Определим вычислимую нумерацию ν_1 некоторого подсемейства семейства $\mathscr{S}$ следующим образом:

$$\nu_1(x) = \begin{cases} y : \langle x, y\rangle \in \Psi_0\} \cup \{y : \langle x, y\rangle \in \Psi_1\} \cup \{0\}, & \text{если } x \in C, \\ \{y : \langle x, y\rangle \in \Psi_0\} \cup \{y : \langle x, y\rangle \in \Psi_1\}, & \text{если } x \in \overline{C}. \end{cases}$$

Можно считать, что если $\langle x, y\rangle \in \Psi_0$ или $\langle x, y\rangle \in \Psi_1$, то $y \neq 0$. Поэтому $C = \{x : 0 \in \nu_1(x)\}$ и $\nu <_e \mu$ вследствие того, что $C_0 <_T C_1$, где $\mu = \nu \oplus \nu_1$ и $C_1 = \{x : 0 \in \mu(x)\} = C_0 \oplus C$. $\square$

Пусть W — конечное непустое множество и $\{1\} \notin W$. Назовем ОРФ f *подходящей* для множества W, если

$$(Rf = W \cup \{1\}) \wedge (\forall n \in W)(|x : f(x) = n| = 1),$$

где Rf — область значений ОРФ f и $|D|$ — число элементов множества D.

Лемма 2. *Семейство всех подходящих* ОРФ *для конечного непустого множества W вычислимо.*

Доказательство. Пусть $d_0, d_1, d_2 \ldots$ — различные элементы множества W, появляющиеся при некотором рекурсивном перечислении множества W на соответствующих шагах $t_0 = 0 < t_1 < t_2 \ldots$. Хотя число элементов W неизвестно, в силу конечности W существует шаг t_e такой, что $W = \{d_0, d_1, \ldots, d_e\}$. Для элемента d_0 начинаем определять последовательность ОРФ $f_0^{(0)}, f_1^{(0)}, \ldots$ по шагам $t \geq 0$, полагая для $i, x \leq t$

$$f_i^{(0)}(x) = \begin{cases} d_0, & \text{если } x = i, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если на шаге t_1 появилось число d_1, то для $i \leq t_1$ полагаем $f_i^{(0)}(t_1) = d_1$ и при $t > t_1$ — $f_i^{(0)}(t) = 1$.

Построение последовательности ОРФ $f_i^{(0)}$ обрывается на шаге t_1. Начинаем по шагам $t > t_1$ определять последовательность ОРФ $f_0^{(1)}, f_1^{(1)}, \ldots$ полагая для $i, x < t$

$$f_i^{(1)}(x) = \begin{cases} d_0, & \text{если } x = x_i, \\ d_1, & \text{если } x = y_i, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где i — номер пары $\langle x_i, y_i \rangle$ при эффективном перечислении всех пар $\langle x, y \rangle$ при $x \neq y$.

Если на шаге t_2 появилось число d_2, то полагаем $f_i^{(0)}(t_2) = d_2$ для $i \leq t_1$, $f_i^{(1)}(t_2) = d_2$ для $i \leq t_2$ и считаем шаг t_1 достаточно большим, а перечисление пар $\langle x_i, y_i \rangle$ таким, что $\max\{x_i, y_i\} < t_2$ при $i < t_2$.

Например, лексикографическое упорядочение таких пар удовлетворяет этому условию: $\langle 0, 1 \rangle = 0$, $\langle 1, 0 \rangle = 1$, $\langle 0, 2 \rangle = 2$, $\langle 1, 2 \rangle = 3$, $\langle 2, 0 \rangle = 4, \ldots$.

Далее, будем при $t > t_2$ полагать $f_i^{(0)}(t) = 1$ и $i \leq t_1$ и $f_i^{(1)}(t) = 1$ для $i \leq t_2$. Построение ОРФ $f_i^{(1)}$ на шаге t_2 обрывается.

Начинаем по шагам $t > t_2$ определять последовательность ОРФ $f_0^{(2)}, f_1^{(2)}, \ldots$, полагая для $i, x < t$

$$f_i^{(2)}(x) = \begin{cases} d_0, & \text{если } x = x_i, \\ d_1, & \text{если } x = y_i, \\ d_2, & \text{если } x = z_i, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где i — номер тройки $\langle x_i, y_i, z_i \rangle$ в эффективном лексикографическом упорядочении всех таких троек $\langle x, y, z \rangle$, в которых x, y, z — попарно различные числа. Заметим, что после шага t_e начинается построение последовательности всех подходящих ОРФ для множества W. С другой стороны, построенные конечные семейства ОРФ $\{f_i^{(0)}\}_{i \leq t_1}, \ldots, \{f_i^{(e-1)}\}_{i \leq t_e}$ также будут подходящими для множества W. $\square$

Теорема 2. *Существует вычислимое дискретное семейство* ОРФ, *не имеющее e-главной нумерации.*

Доказательство. По вычислимой нумерации ν семейства конечных множеств $\mathscr{S}$, определенной в доказательстве теоремы 1, определим для каждого натурального n вычислимую нумерацию $\mu(n)$ всех подходящих ОРФ для нумерации ν, используя лемму 2. Без потери общности можно считать, что $\{1\} \notin S$ для всякого $S \in \mathscr{S}$ и $\mu(\langle x, y\rangle) = \mu_x(y)$.

Вычислимая нумерация $\mu(n)$ обладает согласно теореме 1 следующим свойством: для всякого $n \in \mathbb{N}$ либо $R\mu(n) \subseteq A \cap B$ и $0 \in R\mu(n)$, либо множества $R\mu(n) \cap \overline{A}$ и $R\mu(n) \cap B$ одноэлементны и $0 \in R\mu(n)$. Тогда $C_0 = \{n : 0 \in \mu(n)\}$ — РПМ, причем $\overline{C}_0 \leq_e \overline{B}$ ($n \in \overline{C}_0 \Leftrightarrow R\mu(n) \cap \overline{A} \neq \varnothing$) и $\overline{C}_0 \leq_e \overline{B}$ ($n \in \overline{C}_0 \Leftrightarrow R\mu(n) \cap \overline{B} \neq \varnothing$). Точнее, $\overline{C}_0 \leq_e \overline{A}$ и $\overline{C}_0 \leq_e B$ посредством одного и того же e-оператора

$$\Phi = \{\langle x, y\rangle : x \in \mathbb{N} \wedge D_y \subseteq R\mu(n)\}.$$

По выбору РПМ A и B существует РПМ C такое, что $C_0 <_T C$ и $C \leq_T A$, $C \leq_T B$. Это означает, что $\overline{C} \leq_e \overline{A}$ и $\overline{C} \leq_e \overline{B}$ посредством подходящих e-операторов Ψ_0 и Ψ_1, удовлетворяющих условиям (1), (2) и (3), определенных выше, с заменой B на C, множества A на B, оператора Ψ на Ψ_0 (Ψ_1).

По вычислимой нумерации ν_1 некоторого подсемейства семейства $\mathscr{S}$, построенной в доказательстве теоремы 1, определим вычислимую нумерацию μ'_n всех подходящих ОРФ для нумерации ν_1. Пусть $\mu'(\langle x, y\rangle) = \mu'_x(y)$. Заметим, что множество $C_1 = \{n : 0 \in R\mu'(n)\}$ m-эквивалентно множеству C. Тогда $\mu <_e \mu' \oplus \mu$ вследствие того, что $C_0 <_T C_2$, где $C_2 = \{n : 0 \in \mu' \oplus \mu\} = C_1 \oplus C$. $\square$

Далее потребуется утверждение, аналогичное одному предложению из [2].

Лемма 3 [6]. *Если семейство* ОРФ *имеет предельную точку, то оно не имеет p-главной нумерации.*

Лемма 4 [1]. *Если $\mathscr{S}$ — вычислимое семейство* ОРФ *и s — предельная точка $\mathscr{S}$, то полурешетка $\mathscr{L}_e(\mathscr{S})$ изоморфна полурешетке $\mathscr{T} \times \mathscr{L}_e(\mathscr{S}')$,* где $\mathscr{T}$ — *верхняя полурешетка всех рекурсивно перечислимых T-степеней и $\mathscr{S}' = \mathscr{S} \setminus \{s\}$.*

Следствие 2. *Существует вычислимое семейство* ОРФ, *содержащее предельную точку и не имеющее e-главной нумерации.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ — вычислимое семейство всех подходящих ОРФ для некоторой вычислимой нумерации ν семейства конечных множеств, построенной в доказательстве 1. Это семейство не имеет e-главной нумерации, а любая ОРФ из семейства $\mathscr{F}$, за исключением конечного числа точек, всюду принимает значение 1. Более того, для любого натурального n найдется ОРФ $f \in \mathscr{F}$ такая, что $f(x) = 1$ при $x \leq n$. Значит, ОРФ $e(x) \equiv 1$ будет предельной точкой для семейства $\mathscr{F}$. Тогда по лемме 4 семейство $\mathscr{F} \cup \{e\}$ искомое. $\square$

Следствие 3. *Существует вычислимое семейство* ОРФ, *содержащее предельную точку и имеющее e-главную нумерацию.*

Доказательство. Рассмотрим эффективно дискретное семейство ОРФ $\mathscr{F} = \{f_i\}_{i \geq 0}$, где

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq i, \\ 0 & \text{при } x > i. \end{cases}$$

Тогда ОРФ $e(x) \equiv 1$ будет предельной точкой для семейства $\mathscr{F}$ и по лемме 4 семейство $\mathscr{F} \cup \{e\}$ искомое. $\square$

Следствие 4. *Существует e-степень вычислимого семейства* ОРФ, *среди p-степеней вычислимых нумераций которой нет наибольшей p-степени.*

Доказательство. В e-степени e-главной нумерации из следствия 3 нет наибольшей p-степени по лемме 3. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дегтев А. Н.* О сводимости нумераций // Мат. сб. 1980. Т. 112, № 2. С. 207–219.
2. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977. Т. I.
3. *Марченков С. С.* О вычислимых нумерациях семейств общерекурсивных функций // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 5. С. 588–607.
4. *Jockush C. G.* Semirecursive sets and positive reducibility // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131, N 5. P. 420–436.
5. *Lachlan A. H.* Lower bounds for pairs of r.e. degrees // Ann. Proc. London Math. Soc. 1966. V. 16, N 5. P. 537–569.
6. *Degtev A. N.* On p-reducibility of numerations // Ann. Pure Appl. Logic. 1993. V. 63, N 5. P. 57–60.

Статья поступила 7 апреля 2003 г., окончательный вариант — 9 августа 2006 г.

Дегтев Александр Николаевич, Платонов Максим Людвигович
Тюменский гос. университет, кафедра алгебры и математической логики,
ул. Семакова, 10, Тюмень 625003
cyberneticuniverse@tgu.ru