Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2008. Том 49, № 2

УДК 512.542.5

РАНГИ ПРИМИТИВНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПОДСТАНОВОЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПРОСТЫХ ГРУПП $B_l(q)$, $C_l(q)$ И $D_l(q)$

В. В. Кораблева

Аннотация. Определены ранги подстановочных представлений простых групп $B_l(q)$, $C_l(q)$ и $D_l(q)$ на смежных классах по параболическим максимальным подгруппам.

Ключевые слова: группа лиева типа, параболическая подгруппа, группа Вейля, подстановочное представление.

Введение

После того как было объявлено о завершении классификации конечных простых групп (ККПГ), особенно актуальными становятся исследования их подгрупп и представлений (подстановочных и линейных). М. Ашбахером (см. [1]) намечена базирующаяся на ККПГ программа описания примитивных подстановочных представлений конечных простых групп. Основной массив конечных простых групп составляют группы лиева типа. К настоящему времени получен (при помощи ККПГ или без нее) ряд крупных общих результатов о подстановочных представлениях конечных групп лиева типа (см. [2, § 6], а также [3–5]): описание флаг-транзитивных представлений, классификация 2-транзитивных и ранга 3 подстановочных представлений, классификация примитивных представлений нечетной степени.

Важно отметить завершение классификации точных подстановочных представлений минимальной степени для конечных простых групп лиева типа в работах [6–13].

В приложениях часто нужно знать подстановочное представление более детально. Достаточно полную информацию о подстановочном представлении дают следующие параметры: степень, ранг, подстепени, строение стабилизатора точки и двойных стабилизаторов. В упомянутых выше работах В. Д. Мазурова и А. В. Васильева эти параметры изучены для точных подстановочных представлений минимальной степени всех конечных простых групп лиева типа.

Важный класс подстановочных представлений конечных групп лиева типа составляют их параболические представления, т. е. представления на смежных классах по параболическим подгруппам. Для этого есть несколько причин. Во-первых, параболические представления часто возникали в упомянутых выше исследованиях, в частности, подстановочные представления минимальной степени, как правило, параболические. Во-вторых, как заметил Зейц (см. [2, § 6]),

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00463).

примитивные представления фиксированного ранга конечной группы лиева типа над достаточно большими полями являются параболическими. В-третьих, существует тесная связь между параболическими представлениями группы лиева типа и ее действием на своем билдинге (см. [14]).

В работах [15–19] вычислены ранги, степени, подстепени и двойные стабилизаторы примитивных параболических подстановочных представлений для всех конечных простых исключительных групп лиева типа. В работе [20] вычислены ранги подстановочных представлений групп $A_l(q)$ на смежных классах по параболическим максимальным подгруппам.

В этой работе вычисляются ранги подстановочных представлений групп лиева типа $B_l(q)$, $C_l(q)$ и $D_l(q)$ на смежных классах по параболическим максимальным подгруппам.

Используем определения и обозначения из [21], связанные с группами лиева типа. Пусть $K = GF(q)$, $q = p^s$, p — простое число, G — конечная группа типа B_l, C_l или D_l над полем K и P — параболическая максимальная подгруппа в группе G. Рассмотрим представление группы G подстановками множества Ω левых смежных классов по подгруппе P, в котором элементу g из G соответствует подстановка, переводящая каждый смежный класс xP в gxP. Подгруппа P является стабилизатором G_α точки $\alpha = P$ из Ω в данном представлении. Число орбит стабилизатора G_α на Ω называется *(подстановочным) рангом* подстановочного представления (G, Ω).

Пусть W — группа Вейля для G и p_1, p_2, …, p_l — простые корни типа B_l, C_l $(l \geq 2)$ или D_l $(l \geq 3)$. Через (i) обозначим отражение, соответствующее простому корню p_i, тогда произведение отражений, соответствующих простым корням p_{i_1}, p_{i_2}, …, p_{i_j} запишем в виде $(i_1, i_2, \ldots, i_j)$. Через $(\ )$ обозначим единицу группы W и через $\left[\frac{a}{b}\right]$ — целую часть числа $\frac{a}{b}$. Обозначим через P_k и W_k параболические максимальные подгруппы в G и W соответственно, полученные удалением k-й вершины диаграммы Дынкина типа B_l, C_l или D_l в стандартном упорядочении ее вершин (рис. 1).

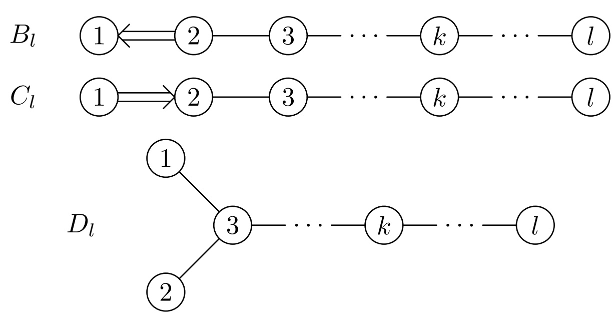

Рис. 1. Диаграммы Дынкина типа B_l, C_l и D_l

Параболическая максимальная подгруппа W_k из W порождается отражениями (i), $i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, k+2, \ldots, l$. С точностью до сопряжения имеется точно l параболических максимальных подгрупп P_k (соответственно W_k) в группе G (соответственно в группе Вейля W), $1 \leq k \leq l$.

Согласно [22, гл. IV, § 2, предложение 2] для каждого $k \in \{1, 2, \ldots, l\}$ существует биекция множества двойных смежных классов группы G по параболической подгруппе P_k на множество двойных смежных классов ее группы Вейля W по параболической подгруппе W_k. Мы ищем разложение группы Вейля W

на двойные смежные классы по параболической максимальной подгруппе W_k. Для этого находим такие элементы y_1, y_2, $\ldots$, $y_m \in W$, чтобы получилось разложение $W = \bigcup\limits_{i=1}^{m} W_k y_i W_k$. Число m двойных смежных классов и равно рангу $r_k(G)$ подстановочного представления группы G на смежных классах по подгруппе P_k. Отметим, что найденные представители y_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, будут иметь минимальную длину в двойном смежном классе $W_k y_i W_k$.

Следующие три теоремы являются основным результатом настоящей статьи.

Теорема 1. *Ранги $r_k(B_l)$ $(1 \leq k \leq l)$ подстановочных представлений групп $B_l(q)$ $(l \geq 2)$ по параболическим максимальным подгруппам вычисляются по рекуррентным формулам*

$$r_k(B_l) = r_k(B_{l-1}) + k \quad \textit{при } 2 \leq k \leq [(l+1)/2],$$
$$r_k(B_l) = r_k(B_{l-1}) + l - k + 2 \quad \textit{при } [(l+1)/2] < k < l,$$
$$r_1(B_l) = l + 1, \quad r_l(B_l) = 3.$$

Теорема 2. *Ранги $r_k(C_l)$ $(1 \leq k \leq l)$ подстановочных представлений групп $C_l(q)$ $(l \geq 2)$ по параболическим максимальным подгруппам вычисляются по рекуррентным формулам*

$$r_k(C_l) = r_k(C_{l-1}) + k \quad \textit{при } 2 \leq k \leq [(l+1)/2],$$
$$r_k(C_l) = r_k(C_{l-1}) + l - k + 2 \quad \textit{при } [(l+1)/2] < k < l,$$
$$r_1(C_l) = l + 1, \quad r_l(C_l) = 3.$$

Теорема 3. *Ранги $r_k(D_l)$ $(1 \leq k \leq l)$ подстановочных представлений групп $D_l(q)$ $(l \geq 3)$ по параболическим максимальным подгруппам вычисляются по рекуррентным формулам*

$$r_k(D_l) = r_k(D_{l-1}) + k + 1 \quad \textit{при } 3 \leq k \leq [l/2] + 1,$$
$$r_k(D_l) = r_k(D_{l-1}) + l - k + 2 \quad \textit{при } [l/2] + 1 < k < l,$$
$$r_1(D_l) = r_2(D_l) = [l/2] + 1, \quad r_l(D_l) = 3.$$

Два элемента u и v группы W назовем *эквивалентными* и обозначим $u \sim v$, если u и v лежат в одном и том же двойном смежном классе по подгруппе W_k, т. е. $W_k u W_k = W_k v W_k$. Далее будем использовать результаты статьи [23], в которой указаны представители правых смежных классов группы W по параболической подгруппе, причем каждый представитель имеет наименьшую длину в содержащем его классе. Заметим, что если представитель u правого смежного класса $W_k u$ имеет вид $u = v \cdot (i)$ и $i \neq k$, то $W_k u W_k = W_k v(i) W_k = W_k v W_k$ и $u \sim v$. Обозначим через W_k^l полную систему представителей правых смежных классов по параболической подгруппе W_k $(1 \leq k \leq l)$ в группе W, где каждый представитель имеет минимальную длину в содержащем его классе.

Лемма 1. 1. *Каждый двойной смежный класс $W_k y W_k$ содержит единственный элемент из $\left(W_k^l\right)^{-1} \cap W_k^l$.*

2. *Если $y \in \left(W_k^l\right)^{-1} \cap W_k^l$, то y является единственным элементом минимальной длины в двойном смежном классе $W_k y W_k$.*

3. *Если $y \in W_k^l$ и порядок y равен 2, то $y \in \left(W_k^l\right)^{-1} \cap W_k^l$.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 доказаны в [24, предложение 2.7.3]. Утверждение 3 следует из того, что в этом случае $y = y^{-1}$. Лемма доказана.

§ 1. Доказательство теорем 1 и 2

Пусть $G = B_l(q)$. Известно (см., например, [22, гл. VI, § 4, теорема 1]) задание группы Вейля W типа B_l образующими и соотношениями:

$$W = \langle (1), (2), \dots, (l) \mid (1,2)^4 = (\ );\ (i, i+1)^3 = (\ ) \text{ для } i \in \{2, 3, \dots, l-1\};$$
$$(i)^2 = (\ ) \text{ для любого } i;\ (i,j) = (j,i) \text{ для } |i-j| > 1\rangle.$$

Положим $s_j = (j, j-1, \dots, 2, 1, 2, \dots, l-1, l)$ и обозначим через $s_j(n_j)$ произведение первых (слева) n_j элементов из s_j, где $0 \le n_j \le l + j - 1$.

Лемма 2 [23, теорема 6]. *Пусть W — группа Вейля типа B_l, $W_k = \langle (i) \mid i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, l\rangle$ — ее параболическая подгруппа, W_k^l — полная система представителей правых смежных классов по подгруппе W_k в W, где каждый представитель имеет минимальную длину в содержащем его классе. Тогда*

$$W_k^l = \{s_k(n_k) \dots s_l(n_l) \mid 0 \le n_j \le k + j - 1; n_{j+1} \le n_j + 1;$$
$$n_{j+1} \le n_j,\ \textit{если } n_j \le j - 1; k \le j, j + 1 \le l\}.$$

Лемма 3. $r_1(B_l) = l + 1$ *при* $l \ge 2$.

Доказательство. Пусть $l = 2$. Тогда по лемме 2

$$W_1^2 = \{(\ ), s_1(n_1)s_2(n_2) \mid 0 \le n_1 \le 1, 0 \le n_2 \le 2, n_2 \le n_1 + 1\}.$$

Если $n_2 = 2$, то по лемме 2 для n_1 только одна возможность $n_1 = 1$. Получили $y_2 = s_1(1)s_2(2) = (1, 2, 1)$. Если $n_2 < 2$, то $s_2(n_2) \sim (\ )$ и имеем другой представитель $y_1 = s_1(1) = (1)$. Если $n_1 < 1$, то $s_1(n_1) = (\ )$ и приходим к последнему представителю $y_0 = (\ )$. Отметим, что $y_0, y_1, y_2 \in (W_1^2)^{-1} \cap W_1^2$. Получаем разложение $W = \bigcup_{i=0}^{2} W_1 y_i W_1$ группы Вейля W на двойные смежные классы по подгруппе W_1. Значит, $r_1(B_2) = 3$.

Предположим, что нам известно разложение $W = \bigcup_{i=0}^{l} W_1 y_i W_1$ группы Вейля W типа B_l на двойные смежные классы по подгруппе W_1, где представители y_0, y_1, …, y_l имеют вид

$$y_0 = (\ ),\ y_1 = s_1(1),\ y_2 = s_1(1)s_2(2), \dots,$$
$$y_{l-1} = s_1(1)s_2(2) \dots s_{l-1}(l-1),\ y_l = s_1(1)s_2(2) \dots s_l(l).$$

Рассмотрим параболическую подгруппу W_1 в группе Вейля типа B_{l+1}, тогда $W_1^{l+1} = \{s_1(n_1)s_2(n_2) \dots s_l(n_l)s_{l+1}(n_{l+1})\}$, где $n_1, \dots, n_{l+1}$ удовлетворяют условиям леммы 2. Если $n_{l+1} = l + 1$, то из этой леммы следует, что для n_l есть только одна возможность: $n_l = l$. Если же $n_l = l$, то для n_{1-1} есть только одна возможность: $n_{l-1} = l - 1$, и т. д., $n_2 = 2$, $n_1 = 1$. Получили $y_{l+1} = s_1(1)s_2(2) \dots s_l(l)s_{l+1}(l + 1)$. Если $n_{l+1} < l + 1$, то $s_{l+1}(n_{l+1}) \sim (\ )$ и все другие представители — это $y_0 = (\ )$, $y_1 = s_1(1)$, $y_2 = s_1(1)s_2(2)$, …, $y_{l-1} = s_1(1)s_2(2) \dots s_{l-1}(l-1)$, $y_l = s_1(1)s_2(2) \dots s_l(l)$, полученные при разложении группы Вейля типа B_l на двойные смежные классы. Заметим, что порядки элементов y_1, y_2, y_3, …, y_l, y_{l+1} равны 2. По лемме 1 получаем $r_1(B_{l+1}) = l+2$. Лемма доказана.

Лемма 4. $r_l(B_l)=3$ *при* $l\geq 2$.

Доказательство. По лемме 2 множество W_l^l представителей правых смежных классов группы Вейля W по параболической подгруппе W_l состоит из элементов вида $s_l(n_l)$, где $s_l=(l,l-1,\dots,2,1,2,\dots,l-1,l)$, а $s_l(n_l)$ обозначает произведение первых (слева) n_l элементов из s_l и $0\leq n_l\leq l+l-1=2l-1$. Из этих элементов несложно выбрать представителей двойных смежных классов группы W по подгруппе W_l. Ими будут в точности три элемента: $y_0=(\ )$, $y_1=(l)$, $y_2=(l,l-1,\dots,2,1,2,\dots,l-1,l)$. Используя лемму 1, получаем разложение $W=\bigcup\limits_{i=0}^{2}W_ly_iW_l$ группы Вейля W типа B_l на двойные смежные классы по подгруппе W_l. Лемма доказана.

Лемма 5. $r_k(B_l)=r_k(B_{l-1})+k$ *при* $2\leq k\leq\left[\frac{l+1}{2}\right]$.

Доказательство. По лемме 2 множество W_k^l представителей правых смежных классов группы Вейля W по параболической подгруппе W_k состоит из элементов вида $s_k(n_k)s_{k+1}(n_{k+1})\dots s_l(n_l)$. Числа $n_k,\dots,n_l$ должны удовлетворять лемме 2, а самые длинные слова s_k, s_{k+1}, …, s_l имеют вид

$$
\begin{aligned}
s_k(2k-1)&=(k,k-1,\dots,3,2,1,2,3,\dots,k-1,k),\\
s_{k+1}(2k)&=(k+1,k,\dots,3,2,1,2,3,\dots,k-1,k),\\
&\dots,\\
s_{l-1}(l+k-2)&=(l-1,l-2,\dots,3,2,1,2,3,\dots,k-1,k),\\
s_l(l+k-1)&=(l,l-1,\dots,3,2,1,2,3,\dots,k-1,k).
\end{aligned}
$$

Случай 1. $n_l=l+k-1$.

Если $n_l=l+k-1$, то из леммы 2 следует, что для n_{l-1} есть только одна возможность: $n_{l-1}=l+k-2$. Если $n_{l-1}=l+k-2$, то для n_{l-2} есть только одна возможность: $n_{l-2}=l+k-3$, и т. д., $n_{k+1}=2k$, $n_k=2k-1$. Получили самый длинный представитель

$$
\begin{aligned}
y&=s_k(2k-1)s_{k+1}(2k)\dots s_{l-1}(l+k-2)s_l(l+k-1)\\
&=(k,k-1,\dots,2,1,2,\dots,k,k+1,\dots,2,1,2,\dots,k,\dots,l,\dots,2,1,2,\dots,k)
\end{aligned}
$$

двойного смежного класса по подгруппе W_k, и элемент y по лемме 1 имеет минимальную длину в двойном смежном классе W_kyW_k, так как имеет порядок 2.

Ищем другие представители двойных смежных классов по подгруппе W_k, для этого предположим, что $n_l<l+k-1$.

Случай 2. $l-k+1\leq n_l<l+k-1$.

Воспользуемся введенным выше определением эквивалентности. Заметим, что

$$
\begin{aligned}
&s_l(l+k-2)=(l,l-1,\dots,3,2,1,2,\dots,k-2,k-1)\sim s_l(l+k-3)\\
&=(l,l-1,\dots,k,\dots,2,1,2,\dots,k-2)\sim\dots\sim(l,l-1,\dots,k,\dots,3,2)\\
&\sim(l,l-1,\dots,k)=s_l(l-k+1).
\end{aligned}
$$

Из соотношений в группе W следует, что $(k,j)=(j,k)$ для всех $j\neq k\pm1$ и $(k,k+1,k)=(k+1,k,k+1)$. Рассмотрим $s_{l-1}(n_{l-1})s_l(l-k+1)$. Пусть сначала

$n_{l-1} = l + k - 2$. Тогда

$$\begin{aligned}
&s_{l-1}(l+k-2)s_l(l-k+1)\\
&= (l-1, l-2, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-1, k, l, l-1, \dots, k+1, k)\\
&= (l-1, l-2, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-1, l, k, l-1, \dots, k+1, k)\\
&= (l-1, l-2, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-1, l, l-1, k, \dots, k+1, k) = \dots\\
&= (l-1, l-2, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-1, l, l-1, \dots, k, k+1, k)\\
&= (l-1, l-2, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-1, l, l-1, \dots, k+1, k, k+1)\\
&\sim (l-1, l-2, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-1, l, l-1, \dots, k+1, k)\\
&= s_{l-1}(l+k-3)s_l(l-k+1).
\end{aligned}$$

Пусть $n_{l-1} = l + k - 4$. Тогда

$$\begin{aligned}
&s_{l-1}(l+k-4)s_l(l-k+1)\\
&= (l-1, l-2, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-3, k-2, l, l-1, \dots, k+1, k)\\
&= (l-1, l-2, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-3, l, k-2, l-1, \dots, k+1, k)\\
&= (l-1, l-2, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-3, l, l-1, k-2, \dots, k+1, k) = \dots\\
&= (l-1, l-2, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-3, l, l-1, \dots, k+1, k, k-2)\\
&\sim (l-1, l-2, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-3, l, l-1, \dots, k+1, k)\\
&= (l-1, l-2, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-4, l, l-1, k-3, \dots, k+1, k) = \dots\\
&= (l-1, l-2, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-4, l, l-1, \dots, k+1, k, k-3)\\
&\sim (l-1, l-2, \dots, k, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-4, l, l-1, \dots, k+1, k) \sim \dots\\
&\sim (l-1, l-2, \dots, k, k-1, l, l-1, \dots, k+1, k)\\
&= s_{l-1}(l-k+1)s_l(l-k+1).
\end{aligned}$$

Таким образом, при нашем выборе представителей двойных смежных классов по подгруппе W_k перед словом $(l, l-1, \dots, k+1, k)$ может стоять либо «длинное» слово $(l-1, l-2, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-1)$, либо «короткое» слово $(l-1, l-2, \dots, k, k-1)$. Рассуждая аналогично, получаем, что из всех $s_{l-2}(n_{l-2})$ перед словом $(l-1, l-2, \dots, k, k-1)$ может стоять либо «длинное» слово $(l-2, l-3, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-3, k-2)$, либо «короткое» слово $(l-2, l-3, \dots, k-1, k-2)$. Теперь мы готовы написать, что может находиться перед «коротким» словом $(j, j-1, \dots, i+1, i)$.

Осталось выяснить, что стоит перед «длинным» словом

$$(j, j-1, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, i).$$

Пусть $n_{l-1} = l + k - 3$. Рассмотрим $s_{l-2}(l+k-3)s_{l-1}(l+k-3)s_l(l-k+1)$ и «укоротим» его, используя соотношения $(k+1, k, k+1) = (k, k+1, k)$ и $(k+1, j) = (j, k+1)$ для $j \neq k$, $j \neq k+2$:

$$\begin{aligned}
&(l-2, \dots, 2, 1, 2, \dots, k-1, k)(l-1, \dots, 2, 1, 2, \dots, k-1)s_l(l-k+1)\\
&= s_{l-2}(l+k-4)(l-1, \dots, k, k+1, k, k-1, \dots, 1, 2, \dots, k-1)s_l(l-k+1)\\
&= s_{l-2}(l+k-4)(l-1, \dots, k+1, k, k+1, \dots, 2, 1, 2, \dots, k-1)s_l(l-k+1)\\
&= s_{l-2}(l+k-4)(l-1, \dots, k, k-1, k+1, \dots, 2, 1, 2, \dots, k-1)s_l(l-k+1)\\
&= s_{l-2}(l+k-4)(l-1, \dots, k+1, k, \dots, 2, 1, 2, \dots, k+1, k-1)s_l(l-k+1)\\
&\sim (l-2, \dots, 2, 1, 2, \dots, k-1, l-1, \dots, 2, 1, 2, \dots, k-1)s_l(l-k+1).
\end{aligned}$$

Из леммы 2 следует, что $l+k-4 \le n_{l-2} \le l+k-3$, поэтому полученный элемент уже нельзя «укоротить». Таким образом, перед

$$(l-1, l-2, \dots, 2, 1, 2, \dots, k-1)$$

может стоять лишь $(l-2, l-3, \dots, 2, 1, 2, \dots, k-1)$. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что перед словом вида $(j, j-1, \dots, 2, 1, 2, 3, \dots, i)$ может стоять только слово $(j-1, j-2, \dots, 2, 1, 2, 3, \dots, i)$.

Полученные результаты показаны на рис. 2 с помощью диаграммы.

$$\begin{array}{ccccccc}
l\,l-1\dots k & \longleftarrow & l-1\,l-2\dots k-1 & \leftarrow\dots\leftarrow & l-k+3\dots 3 & \leftarrow & l-k+2\dots 2 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
l-1\,l-2\dots 212\dots k-1 & & l-2\dots 212\dots k-2 & & l-k+2\dots 212 & & l-k+1\dots 21 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
l-2\dots 212\dots k-1 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\vdots & & k\dots 212\dots k-2 & & k\dots 212 & & k\dots 21 \\
\uparrow & & & & & & \\
k\dots 212\dots k-1 & & & & & &
\end{array}$$

Рис. 2.

Из этой диаграммы легко выписываются представители двойных смежных классов группы W по параболической максимальной подгруппе W_k. Выписываем слова, двигаясь по диаграмме снизу вверх и справа налево по стрелкам. Например, двигаясь вверх по крайнему левому столбцу, получаем представитель

$$y_1 = (k, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-1)(k+1, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-1)$$
$$\dots(l-1, l-2\dots, 2, 1, 2, \dots, k-1)(l, l-1, \dots, k+1, k),$$

двигаясь сначала вверх по второму столбцу, а затем по строке (одно слово) влево, — представитель

$$y_2 = (k, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-2)(k+1, \dots, 3, 2, 1, 2, \dots, k-2)$$
$$\dots(l-2, l-3\dots, 2, 1, 2, \dots, k-2)(l-1, l-2\dots, k-1)(l, l-1, \dots, k+1, k),$$

двигаясь вверх по крайнему правому столбцу, и затем по всей строке влево, — представитель

$$y_{k-1} = (k, k-1, \dots, 2, 1)(k+1, \dots, 2, 1)\dots(l-k+1, \dots, 3, 2, 1)$$
$$(l-k+2, \dots, 3, 2)(l-k+3, \dots, 4, 3)\dots(l-1, \dots, k-1)(l, l-1, \dots, k).$$

Таким образом, из диаграммы получаем $k-1$ представителей. Все эти представители заканчиваются на $(l, l-1, \dots, k)$ и, несложно проверить, имеют порядок 2.

Случай 3. $n_l < l-k+1$.

В этом случае $s_l(n_l) \sim (\ )$. Все представители двойных смежных классов подгруппы Вейля типа B_{l-1} по параболической максимальной подгруппе будут представителями и двойных смежных классов подгруппы Вейля типа B_l по своей параболической максимальной подгруппе. Таких представителей в точности $r_k(B_{l-1})$ штук.

Таким образом, случай 1 дает нам один представитель, случай 2 — $k-1$ представителей, случай 3 — $r_k(B_{l-1})$ представителей. По лемме 1 каждый полученный представитель имеет наименьшую длину в двойном смежном классе, который его содержит. Лемма доказана.

Лемма 6. *$r_k(B_l) = r_k(B_{l-1}) + l - k + 2$ при $\left[\frac{l+1}{2}\right] < k < l$.*

Доказательство этой леммы почти не отличается от доказательства леммы 5. Следует рассмотреть те же три случая. Диаграмму для второго случая изобразим на рис. 3.

$$\begin{array}{ccccccc}
l\,l-1\ldots k & \longleftarrow & l-1\,l-2\ldots k-1 & \leftarrow\cdots\leftarrow & k+1\,k\ldots 2k-l+1 & \leftarrow & k\,k-1\ldots 2k-l \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
l-1\,l-2\ldots 212\ldots k-1 & & l-2\ldots 212\ldots k-2 & & k\ldots 212\ldots 2k-l & & \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \\
l-2\ldots 212\ldots k-1 & & \vdots & & & & \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \\
\vdots & & k\ldots 212\ldots k-2 & & & & \\
\uparrow & & & & & & \\
k\ldots 212\ldots k-1 & & & & & &
\end{array}$$

Рис. 3.

В этой диаграмме $l-k$ вертикальных столбцов и одна строка, поэтому получаем $l-k+1$ представителей двойных смежных классов и все эти представители заканчиваются на $(l, l-1, \ldots, k)$.

Таким образом, случай 1 дает нам один представитель, случай 2 — $l-k+1$ представителей, случай 3 — $r_k(B_{l-1})$ представителей. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1 вытекает из лемм 3–6.

При доказательстве теоремы 1 использовалась только группа Вейля типа B_l, но группы Вейля типа C_l и типа B_l изоморфны (см. [22, гл. VI, § 4]), поэтому все полученные выше утверждения в леммах 2–6 для групп $B_l(q)$ будут справедливы и для групп $C_l(q)$. Теорема 2 доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 3

Пусть $G = D_l(q)$. Известно (см., например, [22, гл. VI, § 4, теорема 1]) задание группы Вейля типа D_l образующими и соотношениями:

$$\begin{aligned} W = \langle (1), (2), \ldots, (l) \mid (1,3)^3 = (\ );\ (1,i)^2 = (\ ) \text{ для } i \neq 3;\ (i)^2 = (\ ) \text{ для всех } i; \\ (i, i+1)^3 = (\ ) \text{ для } i > 1;\ (i,j) = (j,i) \text{ для } |i-j| > 1, i, j > 1\rangle. \end{aligned}$$

Положим $s_1(n) = (1, 3, 4, 5, \ldots, n+1)$ и $s_2(n) = (2, 3, 4, 5, \ldots, n+1)$ для $n = 2, \ldots, l-1$ и $s_i(1) = (i)$, $s_i(0) = (\ )$ для $i = 1, 2$. Тогда из [23] следует

$$\begin{aligned} W_1^l = \{ s_1(n_1) s_2(n_2) s_1(n_3) s_2(n_4) \ldots s_{(3+(-1)^{h-1})/2}(n_{h-1}) s_{(3+(-1)^h)/2}(n_h) \\ \mid 0 \leq h \leq l-1, n_j > n_{j+1} \}. \end{aligned}$$

Лемма 7. *$r_1(D_l) = \left[\frac{l}{2}\right] + 1$ при $l \geq 3$.*

Доказательство. Пусть $l = 3$. Тогда

$$\begin{aligned} W_1^3 &= \{(\ ), s_1(n_1)s_2(n_2) \mid n_1, n_2 \in \{0,1,2\}, n_1 > n_2\} \\ &= \{s_1(2)s_2(1) = (1,3,2), s_1(2)s_2(0) = (1,3), s_1(1)s_2(0) = (1), (\ )\}. \end{aligned}$$

Имеем $(1,3,2) \sim (1,3) \sim (1)$ и получаем разложение $W = W_1 \cup W_1(1)W_1$ группы W на двойные смежные классы по подгруппе W_1. Значит, $r_1(D_3) = 2$.

Пусть $l=4$. Тогда согласно [23]

$$W_1^4 = \{(\ ), s_1(n_1)s_2(n_2)s_1(n_3) \mid n_1 > n_2 > n_3, n_i \in \{0,1,2,3\}\}.$$

В W_1^4 входят все элементы из W_1^3 и добавляются

$$s_1(3)s_2(2)s_1(1) = (1,3,4,2,3,1), \quad s_1(3)s_2(2)s_1(0) = (1,3,4,2,3),$$

$$s_1(3)s_2(1)s_1(0) = (1,3,4,2).$$

Имеем $s_1(3)s_2(2)s_1(0) = (1,3,4,2,3) \sim (1,3,4,2) = s_1(3)s_2(1)s_1(0) \sim (1)$. Используя лемму 1, получаем разложение $W = \bigcup_{i=0}^{2} W_1 y_i W_1$ группы Вейля W на двойные смежные классы по подгруппе W_1, где $y_0 = (\ )$, $y_1 = (1)$, $y_2 = (1,3,4,2,3,1)$. Значит, $r_1(D_4) = 3$.

Пусть $l=5$. Тогда согласно [23]

$$W_1^5 = \{(\ ), s_1(n_1)s_2(n_2)s_1(n_3)s_2(n_4) \mid n_1 > n_2 > n_3 > n_4, n_i \in \{0,1,2,3,4\}\}.$$

В W_1^5 есть все элементы из W_1^4 и добавляются

$$s_1(4)s_2(3)s_1(2)s_2(1), \quad s_1(4)s_2(3)s_1(2)s_2(0),$$

$$s_1(4)s_2(3)s_1(1)s_2(0), \quad s_1(4)s_2(2)s_1(1)s_2(0).$$

Все добавленные элементы эквивалентны y_2. Действительно, используя эквивалентность и соотношения $(1,4)=(4,1)$ и $(5,i)=(i,5)$ для $i=1,2,3$, имеем

$$\begin{aligned}
&s_1(4)s_2(3)s_1(2)s_2(1) = (1,3,4,5,2,3,4,1,3,2) \sim (1,3,4,5,2,3,4,1,3)\\
&= s_1(4)s_2(3)s_1(2)s_2(0) \sim (1,3,4,5,2,3,4,1) = s_1(4)s_2(3)s_1(1)s_2(0)\\
&\sim (1,3,4,5,2,3,1) = s_1(4)s_2(2)s_1(1)s_2(0) \sim (1,3,4,2,3,1) = y_2.
\end{aligned}$$

Приходим к разложению $W = \bigcup_{i=0}^{2} W_1 y_i W_1$ группы Вейля W типа D_5 на двойные смежные классы по подгруппе W_1, где y_0, y_1, y_2 получены при разложении в группе $D_4(q)$. Значит, $r_1(D_5) = 3$.

Пусть $l=2k$. Тогда имеем разложение $W = \bigcup_{i=0}^{k} W_1 y_i W_1$ группы Вейля W типа D_{2k} на двойные смежные классы по подгруппе W_1, где представители y_0, y_1, …, y_k нам известны, имеют порядок 2 (кроме y_0) и вид

$$\begin{aligned}
&y_0 = (\ ), y_1 = s_1(1) = (1), y_2 = s_1(3)s_2(2)s_1(1) = (1,3,4,2,3,1), \dots,\\
&y_k = s_1(l-1)s_2(l-2)s_1(l-3)s_2(l-4)\dots s_2(2)s_1(1)\\
&= (1,3,4,\dots,l,2,3,4,\dots,l-1,1,3,4,\dots,l-2,2,3,4,\dots,l-3,\dots,2,3,1).
\end{aligned}$$

Рассмотрим $D_{l+1}(q)$, $l+1 = 2k+1$. Ищем представителей двойных смежных классов в группе Вейля типа D_{l+1}. Согласно описанию множества W_1^{l+1} к найденным представителям двойных смежных классов y_0, y_1, y_2, …, y_k в группе $D_{2k}(q)$ могут лишь добавиться элементы, полученные из W_1^{l+1} и не лежащие в W_1^l. Эти элементы имеют вид

$$\begin{aligned}
&s_1(l)s_2(n_2)s_1(n_3)s_2(n_4)\dots s_1(n_{l-1})s_2(n_l),\\
&\qquad\qquad l > n_2 > n_3 > \dots > n_{l-1} > n_l \text{ и } n_i \in \{0,1,\dots,l-1\}.
\end{aligned}$$

Покажем, что все они эквивалентны y_k. Рассмотрим самый длинный из них:

$$y = s_1(l)s_2(l-1)s_1(l-2)\dots s_2(3)s_1(2)s_2(1)$$
$$= (1,3,4,\dots,l+1,2,3,4,\dots,l,1,3,4,\dots,l-1,\dots,2,3,4,1,3,2).$$

Используем эквивалентность и соотношения в группе W, движемся справа налево и убираем по одному крайнему правому элементу в $s_i(n_i)$, которые входят в y. Сначала в $s_2(1) = (2)$ убираем элемент 2, затем в $s_1(2) = (1,3)$ — элемент 3, в $s_2(3) = (2,3,4)$ — элемент 4 ($(4,1) = (1,4)$), и т. д., в $s_1(l-2)$ — элемент $l-1$, в $s_2(l-1)$ — элемент l, в $s_1(l)$ — элемент $l+1$. Получаем

$$\begin{aligned} y &\sim (1,3,4,\dots,l+1,2,3,4,\dots,l,1,3,4,\dots,l-1,\dots,2,3,4,1,3)\\ &\sim (1,3,4,\dots,l+1,2,3,4,\dots,l,1,3,4,\dots,l-1,\dots,2,3,4,1)\\ &\sim (1,3,4,\dots,l+1,2,3,4,\dots,l,1,3,4,\dots,l-2,l-1,\dots,2,3,1)\\ &\sim \dots \sim (1,3,4,\dots,l+1,2,3,4,\dots,l,1,3,4,\dots,l-2,\dots,1,3,4,2,3,1)\\ &\sim (1,3,4,\dots,l+1,2,3,4,\dots,l-1,1,3,4,\dots,l-2,\dots,1,3,4,2,3,1)\\ &\sim (1,3,4,\dots,l,2,3,4,\dots,l-1,1,3,4,\dots,l-2,\dots,1,3,4,2,3,1) = y_k. \end{aligned}$$

С остальными элементами из W_1^{l+1}, не лежащими в W_1^l, поступаем так же.

Таким образом, в разложение каждой группы Вейля типа D_{2k} и типа D_{2k+1} на двойные смежные классы по подгруппам W_1 входят одни и те же представители y_0, y_1, …, y_k.

Рассмотрим группу $D_{2k+2}(q)$. К найденным элементам y_0, y_1, …, y_k добавляем

$$z = s_1(2k+1)s_2(2k)s_1(2k-1)\dots s_2(2)s_1(1)$$
$$= (1,3,4,\dots,2k+2,2,3,4,\dots,2k+1,1,3,4,\dots,2k,\dots,2,3,1).$$

Несложно понять, что все остальные элементы из W_1^{2k+2}, не лежащие в W_1^{2k+1}, не дают нам новых представителей двойных смежных классов. Соотношения в группе Вейля не позволяют укоротить элемент z. Положим $y_{k+1} = z$. Порядок элемента y_{k+1} равен 2. Имеем $r_1(D_{2k+2}) = k+2 = \left[\frac{2k+2}{2}\right] + 1$. Лемма доказана.

Лемма 8. $r_2(D_l) = \left[\frac{l}{2}\right] + 1$ *при* $l \geq 3$.

Доказательство. Представления группы $D_l(q)$ на левых смежных классах по подгруппам P_1 и P_2 подобны, так как согласно [21, предложение 12.2.3] существует графовый автоморфизм этой группы, отображающий параболическую подгруппу P_1 на параболическую подгруппу P_2. Лемма доказана.

Положим $s_j = (j, j-1, \dots, 4, 3, 1, 2, 3, 4, \dots, l-1, l)$ и обозначим через $s_j(n_j)$ произведение первых (слева) n_j элементов из s_j, где $0 \leq n_j \leq l+j-2$. Заметим, что при определении s_j мы не различаем $(\dots,1,2,\dots)$ и $(\dots,2,1,\dots)$ в силу соотношения $(1,2) = (2,1)$.

Лемма 9 [23, теорема 4]. *Пусть W — группа Вейля типа D_l, $W_k = \langle (i) \mid i = 1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,l\rangle$ — ее параболическая подгруппа, W_k^l — полная система представителей правых смежных классов по подгруппе W_k в W, где каждый представитель имеет минимальную длину в содержащем его классе. Тогда при $k \geq 3$*

$$\begin{aligned} W_k^l = \{ s_k(n_k)\dots s_l(n_l) \mid 0 \leq n_j \leq k+j-2;\, n_{j+1} \leq n_j + 1;\, n_{j+1} \leq n_j,\\ \textit{если } n_j \leq j-2;\, \textit{если } n_{j+1} = n_j + 1 = j, \textit{ то } s_j(n_j) \textit{ и } s_{j+1}(n_{j+1})\\ \textit{выбраны так, что один имеет последним элементом } (1),\\ \textit{а другой} — (2);\ k \leq j, j+1 \leq l \}. \end{aligned}$$

Лемма 10. *$r_l(D_l)=3$ при $l\geq 3$.*

Доказательство. Согласно лемме 9 множество W_l^l представителей правых смежных классов группы Вейля W по параболической подгруппе W_l состоит из элементов вида $s_l(n_l)$, где $s_l=(l,l-1,\dots,4,3,1,2,3,4,\dots,l-1,l)$, а $s_l(n_l)$ обозначает произведение первых (слева) n_l элементов из s_l и $0\leq n_l\leq l+l-2=2l-2$. Из этих элементов несложно выбрать представителей двойных смежных классов группы W по подгруппе W_l. Ими будут в точности три элемента: $y_0=(\ )$, $y_1=(l)$, $y_2=(l,l-1,\dots,4,3,1,2,3,4,\dots,l-1,l)$. Имеем разложение $W=\bigcup\limits_{i=0}^{2}W_ly_iW_l$ группы Вейля W типа D_l на двойные смежные классы по подгруппе W_l. Лемма доказана.

Лемма 11. *$r_k(D_l)=r_k(D_{l-1})+k+1$ при $3\leq k\leq\left[\frac{l}{2}\right]+1$.*

Доказательство. По лемме 9 множество W_k^l представителей правых смежных классов группы Вейля W по параболической подгруппе W_k состоит из элементов вида $s_k(n_k)s_{k+1}(n_{k+1})\dots s_l(n_l)$. Числа $n_k,\dots,n_l$ должны удовлетворять лемме 9, а самые длинные слова s_k, s_{k+1}, $\dots$, s_l имеют вид

$$\begin{aligned}
s_k(2k-2)&=(k,k-1,\dots,4,3,1,2,3,\dots,k-1,k),\\
s_{k+1}(2k-1)&=(k+1,k,\dots,4,3,1,2,3,\dots,k-1,k),\\
&\dots,.\\
s_{l-1}(l+k-3)&=(l-1,l-2,\dots,4,3,1,2,3,\dots,k-1,k),\\
s_l(l+k-2)&=(l,l-1,\dots,4,3,1,2,3,\dots,k-1,k).
\end{aligned}$$

Случай 1. $n_l=l+k-2$.

Если $n_l=l+k-2$, то из леммы 9 следует, что для n_{l-1} есть только одна возможность: $n_{l-1}=l+k-3$. Если $n_{l-1}=l+k-3$, то есть только одна возможность: $n_{l-2}=l+k-4$, и т. д., $n_{k+1}=2k-1$, $n_k=2k-2$. Получили элемент

$$y=(k,k-1,\dots,3,1,2,\dots,k,k+1,\dots,3,1,2,\dots,k,\dots,l,\dots,3,1,2,\dots,k),$$

y является самым длинным представителем (по лемме 1 имеющий минимальную длину в содержащем его классе) среди представителей двойных смежных классов по подгруппе W_k.

Ищем другие представители, для чего предположим, что $n_l<l+k-2$.

Случай 2. $l-k+1\leq n_l<l+k-2$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&s_l(l+k-3)=(l,l-1,\dots,4,3,1,2,3,\dots,k-2,k-1)\sim s_l(l+k-4)\\
&=(l,l-1,\dots,k,\dots,4,3,1,2,3,\dots,k-3,k-2)\sim\dots\\
&\sim(l,l-1,\dots,k,\dots,4,3)\sim\dots\sim(l,l-1,\dots,k)=s_l(l-k+1).
\end{aligned}$$

Из соотношений в группе W следует, что $(k,j)=(j,k)$ для всех $j\neq k\pm1$ и $(k,k+1,k)=(k+1,k,k+1)$. Рассмотрим $s_{l-1}(n_{l-1})s_l(l-k+1)$.

Пусть сначала $n_{l-1} = l + k - 3$. Тогда

$$\begin{aligned}
&s_{l-1}(l+k-3)s_l(l-k+1)\\
&= (l-1,\dots,3,1,2,3,\dots,k-1,k,l,l-1,\dots,k+1,k)\\
&= (l-1,\dots,3,1,2,\dots,k-1,l,k,l-1,\dots,k+1,k)\\
&= (l-1,\dots,3,1,2,\dots,k-1,l,l-1,k,\dots,k+1,k) = \dots\\
&= (l-1,\dots,3,1,2,\dots,k-1,l,l-1,\dots,k,k+1,k)\\
&= (l-1,\dots,3,1,2,\dots,k-1,l,l-1,\dots,k+1,k,k+1)\\
&\sim (l-1,\dots,3,1,2,\dots,k-1,l,l-1,\dots,k+1,k)\\
&= s_{l-1}(l+k-4)s_l(l-k+1).
\end{aligned}$$

Пусть $n_{l-1} = l + k - 5$. Тогда

$$\begin{aligned}
&s_{l-1}(l+k-5)s_l(l-k+1)\\
&= (l-1,\dots,3,1,2,\dots,k-2,l,l-1,\dots,k+1,k)\\
&= (l-1,l-2,\dots,3,1,2,\dots,k-3,l,k-2,l-1,\dots,k+1,k)\\
&= (l-1,l-2,\dots,3,1,2,\dots,k-3,l,l-1,k-2,\dots,k+1,k) = \dots\\
&= (l-1,l-2,\dots,3,1,2,\dots,k-3,l,l-1,\dots,k+1,k,k-2)\\
&\sim (l-1,l-2,\dots,3,1,2,\dots,k-3,l,l-1,\dots,k+1,k)\\
&= (l-1,l-2,\dots,4,3,1,2,\dots,k-4,l,l-1,k-3,\dots,k+1,k) = \dots\\
&= (l-1,l-2,\dots,3,1,2,\dots,k-4,l,l-1,\dots,k+1,k,k-3)\\
&\sim (l-1,l-2,\dots,k,\dots,3,1,2,\dots,k-4,l,l-1,\dots,k+1,k)\cdots\sim\dots\\
&\sim (l-1,l-2,\dots,k,k-1,l,l-1,\dots,k+1,k)\\
&= s_{l-1}(l-k+1)s_l(l-k+1).
\end{aligned}$$

Таким образом, при нашем выборе представителей двойных смежных классов по подгруппе W_k перед словом $(l,l-1,\dots,k+1,k)$ может стоять либо «длинное» слово $(l-1,l-2,\dots,4,3,1,2,3,\dots,k-1)$, либо «короткое» слово $(l-1,l-2,\dots,k,k-1)$. Рассуждая аналогично, получаем, что из всех $s_{l-2}(n_{l-2})$ перед словом $(l-1,l-2,\dots,k,k-1)s_l(l-k+1)$ может стоять либо «длинное» слово $(l-2,l-3,\dots,4,3,1,2,\dots,k-3,k-2)$, либо «короткое» слово $(l-2,l-3,\dots,k-1,k-2)$. Теперь мы готовы написать, что может находиться перед «коротким» словом вида

$$(j,j-1,\dots,i+1,i).$$

Выясним, что стоит перед «длинным» словом вида

$$(j,j-1,\dots,3,1,2,\dots,i).$$

Пусть $n_{l-1} = l+k-4$. Тогда $s_{l-1}(l+k-4) = (l-1,l-2,\dots,4,3,1,2,\dots,k-1)$. Рассмотрим произведение $s_{l-2}(l+k-4)s_{l-1}(l+k-4)s_l(l-k+1)$ и «укоротим» его, используя соотношения $(k+1,k,k+1) = (k,k+1,k)$ и $(k+1,j) = (j,k+1)$

для $j \neq k$, $j \neq k+2$:

$$\begin{aligned}
&s_{l-2}(l+k-4)s_{l-1}(l+k-4)s_l(l-k+1)\\
&= (l-2,\dots,3,1,2,\dots,k-1,k,l-1,\dots,4,3,1,2,\dots,k-1)s_l(l-k+1)\\
&= s_{l-2}(l+k-5)(l-1,\dots,k,k+1,k,\dots,3,1,2,\dots,k-1)s_l(l-k+1)\\
&= s_{l-2}(l+k-5)(l-1,\dots,k+1,k,k+1,\dots,3,1,2,\dots,k-1)s_l(l-k+1)\\
&= s_{l-2}(l+k-5)(l-1,\dots,k,k-1,k+1,\dots,3,1,2,\dots,k-1)s_l(l-k+1)\\
&= s_{l-2}(l+k-5)(l-1,\dots,k,k-1,\dots,3,1,2,\dots,k+1,k-1)s_l(l-k+1)\\
&= s_{l-2}(l+k-5)s_{l-1}(l+k-4)(k+1)s_l(l-k+1)\\
&= s_{l-2}(l+k-5)s_{l-1}(l+k-4)(l,l-1,\dots,k+1,k+2,k+1,k)\\
&= s_{l-2}(l+k-5)s_{l-1}(l+k-4)(l,l-1,\dots,k+2,k+1,k+2,k)\\
&\sim s_{l-2}(l+k-5)s_{l-1}(l+k-4)(l,l-1,\dots,k+2,k+1,k)\\
&= (l-2,\dots,3,1,2,\dots,k-1,l-1,l-2,\dots,4,3,1,2,\dots,k-1)s_l(l-k+1).
\end{aligned}$$

Из леммы 9 следует, что $l+k-5 \leq n_{l-2} \leq l+k-4$, поэтому полученный элемент уже нельзя «укоротить». Таким образом, перед

$$(l-1,l-2,\dots,4,3,1,2,\dots,k-1)$$

может стоять лишь $(l-2,l-3,\dots,4,3,1,2,\dots,k-1)$. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что перед словом вида

$$(j,j-1,\dots,4,3,1,2,\dots,i)$$

может стоять только слово $(j-1,j-2,\dots,4,3,1,2,\dots,i)$.

Осталось выяснить влияние последнего условия из леммы 9: если $n_{j+1} = n_j+1 = j$, то $s_j(n_j)$ и $s_{j+1}(n_{j+1})$ выбраны так, что один имеет последним элементом (1), а другой — (2). Для этого нужно рассмотреть элемент

$$(l-k+3,l-k+2,\dots,4,3).$$

При $k=3$ это в точности элемент $(l,l-1,\dots,k)$.

Согласно предыдущим выводам и последнему условию из леммы 9 перед этим «коротким» словом может стоять либо «длинное» слово

$$(l-k+2,l-k+1,\dots,4,3,1,2),$$

либо одно из двух «коротких» слов:

$$(l-k+2,l-k+1,\dots,4,3,1),\ (l-k+2,l-k+1,\dots,4,3,2),$$

так как $(\dots,1,2,\dots) = (\dots,2,1,\dots)$. Далее перед

$$(l-k+2,l-k+1,\dots,4,3,1)$$

согласно последнему условию из леммы 9 должно обязательно стоять слово, оканчивающееся двойкой, а именно $(l-k+1,l-k,\dots,4,3,2)$, а перед $(l-k+2,l-k+1,\dots,4,3,2)$ будет стоять $(l-k+1,l-k,\dots,4,3,1)$.

Полученные результаты показаны на рис. 4 с помощью диаграммы. Из нее легко выписываются представители двойных смежных классов группы W по параболической максимальной подгруппе W_k. Идем по диаграмме снизу вверх

$$
\begin{array}{cccccccc}
l\,l-1\ldots k & \longleftarrow & l-1\,l-2\ldots k-1 & \leftarrow\cdots\leftarrow & l-k+4\ldots4 & \longleftarrow & l-k+3\ldots43 & \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\
l-1\,l-2\ldots4312\ldots k-1 & & l-2\ldots4312\ldots k-2 & & l-k+3\ldots43123 & l-k+2\ldots4312 & l-k+2\ldots431 & l-k+2\ldots432 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
l-2\ldots4312\ldots k-1 & & l-3\ldots4312\ldots k-2 & & \vdots & \vdots & l-k+1\ldots432 & l-k+1\ldots431 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\vdots & & \vdots & & k\ldots43123 & k\ldots4312 & l-k\ldots431 & l-k\ldots432 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & \uparrow \\
k+1\ldots4312\ldots k-1 & & k\ldots4312\ldots k-2 & & & & \vdots & \vdots \\
\uparrow & & & & & & \uparrow & \uparrow \\
k\ldots4312\ldots k-1 & & & & & & k\ldots43e\pm1 & k\ldots43e
\end{array}
$$

Рис. 4.

и справа налево по стрелкам. Например, двигаясь вверх по крайнему левому столбцу, получаем представитель

$$
\begin{aligned}
y_1 = (k,\ldots,4,3,1,2,\ldots,k-1)&(k+1,\ldots,4,3,1,2,\ldots,k-1)\\
&\ldots(l-1,l-2,\ldots,4,3,1,2,\ldots,k-1)(l,l-1,\ldots,k+1,k),
\end{aligned}
$$

двигаясь вверх по второму (слева) столбцу и на одно слово влево по строке — представитель

$$
\begin{aligned}
y_2 = (k,\ldots,4,3,1,2,\ldots,k-2)&(k+1,\ldots,4,3,1,2,\ldots,k-2)\\
\ldots(l-2,\ldots,4,3,1,2,\ldots,k-2)&(l-1,l-2,\ldots,k-1)(l,l-1,\ldots,k+1,k).
\end{aligned}
$$

Пройдем по крайнему правому столбцу снизу вверх, затем по всей строке справа налево и получим

$$
\begin{aligned}
y_k = (k,\ldots,4,3,e)&(k+1,\ldots,4,3,e\pm1)\ldots(l-k,\ldots,4,3,2)\\
&(l-k+1,\ldots,4,3,1)(l-k+2,\ldots,4,3,2)(l-k+3,\ldots,4,3)\\
&(l-k+4,\ldots,5,4)\ldots(l-1,l-2,\ldots,k-1)(l,l-1,\ldots,k),
\end{aligned}
$$

где e равно 1 или 2 в зависимости от того, нечетно или четно l соответственно, причем если $e=1$, то во втором сомножителе стоит в конце $e+1=2$, а если $e=2$, то — $e-1=1$.

Таким образом, из диаграммы получаем k представителей, легко проверить, что порядки этих представителей равны двум и все эти представители заканчиваются на $(l,l-1,\ldots,k)$.

Случай 3. $n_l < l-k+1$.

В этом случае $s_l(n_l)\sim(\ )$. Все представители двойных смежных классов подгруппы Вейля типа D_{l-1} по параболической максимальной подгруппе будут представителями и двойных смежных классов подгруппы Вейля типа D_l по своей параболической максимальной подгруппе. Таких представителей в точности $r_k(D_{l-1)})$ штук.

Таким образом, случай 1 дает нам один представитель, случай 2 — k представителей, случай 3 — $r_k(D_{l-1})$ представителей. Лемма доказана.

$$\begin{array}{ccccccccc}
l\,l-1\dots k & \longleftarrow & l-1\,l-2\dots k-1 & \leftarrow & l-2\dots k-2 & \leftarrow\dots\leftarrow & k+1\,k\dots 2k-l+1 & \leftarrow & k\,k-1\dots 2k-l \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
l-1\,l-2\dots 4312\dots k-1 & & l-2\dots 4312\dots k-2 & & \vdots & & k\dots 4312\dots 2k-l & & \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
l-2\dots 4312\dots k-1 & & \vdots & & k\dots 4312\dots k-3 & & & & \\
\uparrow & & \uparrow & & & & & & \\
\vdots & & k\dots 4312\dots k-2 & & & & & & \\
\uparrow & & & & & & & & \\
k\dots 4312\dots k-1 & & & & & & & &
\end{array}$$

Рис. 5.

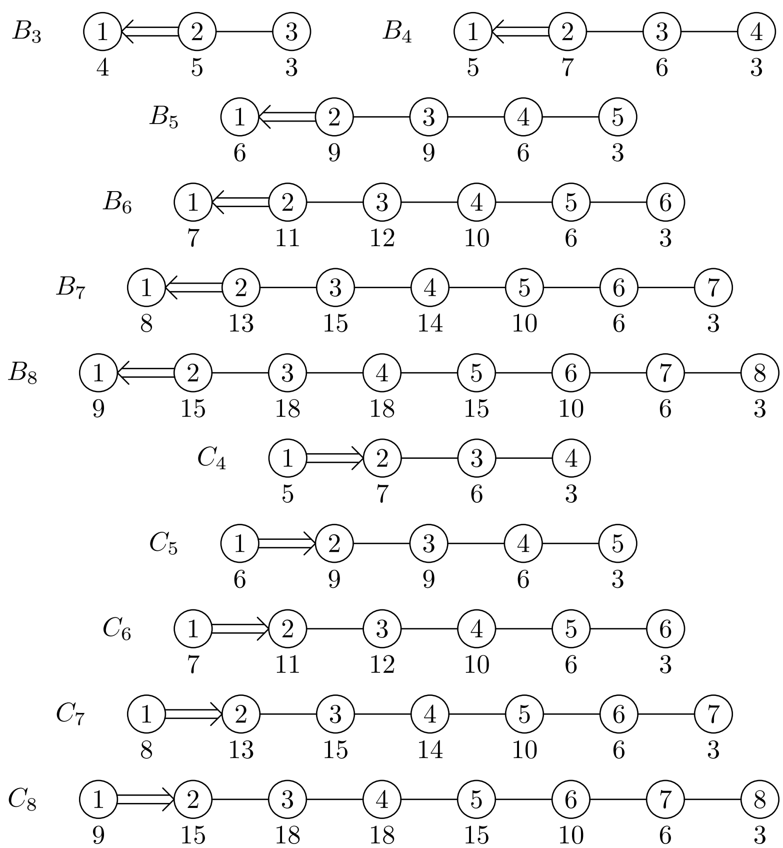

Рис. 6. Ранги $r_k(B_l)$ и $r_k(C_l)$ для малых значений l.

Лемма 12. $r_k(D_l) = r_k(D_{l-1}) + l - k + 2$ *при* $\left[\frac{l}{2}\right] + 1 < k < l$.

Доказательство этой леммы почти не отличается от доказательства леммы 11. Следует рассмотреть те же три случая. Случаи 1 и 3 дословно повторяются. Отличие лишь в случае 2, которое заключается в том, что при $\left[\frac{l}{2}\right] + 1 < k < l$ последнее условие на числа $n_{j+1} = n_j + 1 = j$ из леммы 9 применять не нужно. Диаграмма для случая 2 показана на рис. 5. В этой диаграмме $l - k$ столбцов и одна строка, поэтому получаем $l - k + 1$ представителей. Легко проверить, что их порядки равны двум, все эти представители заканчиваются на $(l, l-1, \dots, k)$. Лемма доказана.

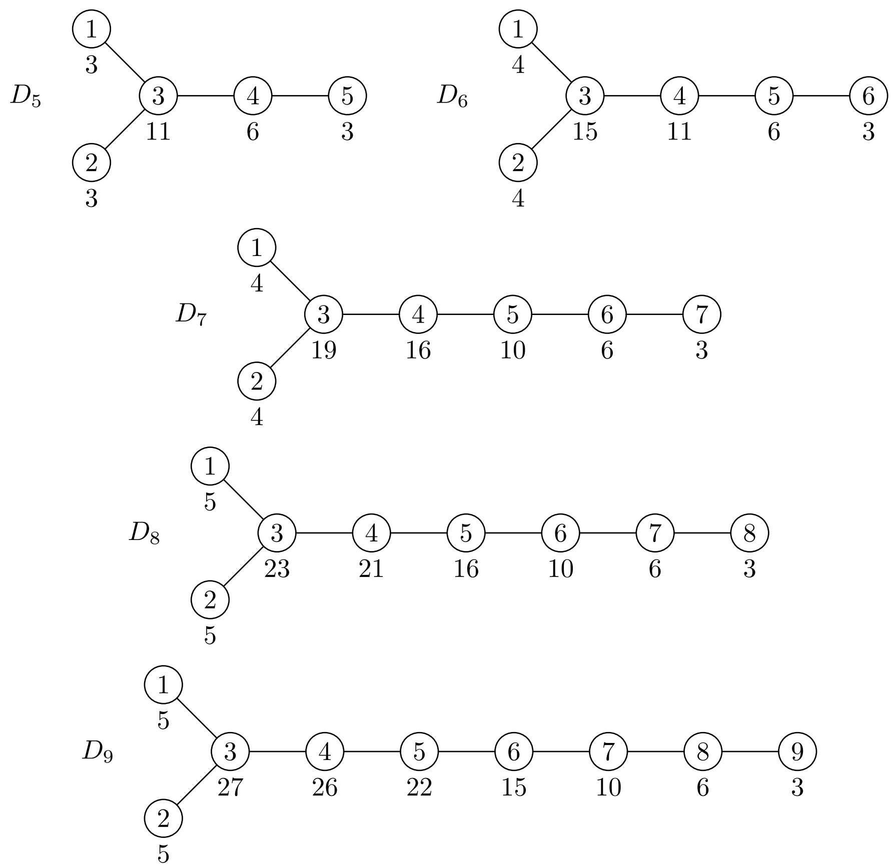

Рис. 7. Ранги $r_k(D_l)$ для малых значений l.

Доказательство теоремы 3 вытекает из лемм 7, 8, 10–12.

Приложение

Программа, которая была написана для работы с пакетом **«chevie»** из компьютерной системы **GAP** (см. [25]), определила ранги $r_k(G)$ подстановочных представлений классических групп лиева типа $B_l(q)$, $C_l(q)$, $D_l(q)$ на смежных классах по параболическим максимальным подгруппам для малых значений l и вычислила представители y_i минимальной длины в двойных смежных классах $W_k y_i W_k$. Результаты вычислений полностью совпадают с диаграммами (см. рис. 2–5) и другими утверждениями, полученными при доказательстве теорем 1–3. На рис. 6 и 7 указаны ранги подстановочных представлений по параболическим максимальным подгруппам классических групп лиева типа $B_l(q)$, $C_l(q)$, $D_l(q)$ для малых значений l на диаграммах Дынкина для этих групп. Под вершиной пишется соответствующий подстановочный ранг.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aschbacher M.* Permutation groups using the classification of the finite simple groups // Algebras Groups Geom. 1985. V. 2, N 4. P. 380–389.

2. *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.

3. *Liebeck M. W., Saxl J.* The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc. 1985. V. 31, N 2. P. 250–264.
4. *Liebeck M. W., Saxl J.* The finite primitive permutation groups of rank three // Bull. London Math. Soc. 1986. V. 18, N 2. P. 165–172.
5. *Kantor W. M.* Primitive permutation groups of odd degree, and an application to finite projective planes // J. Algebra. 1987. V. 106, N 1. P. 15–45.
6. *Cooperstein B. N.* Minimal degree for a permutation representation of a classical group // Israel J. Math. 1978. V. 30, N 3. P. 213–235.
7. *Liebeck M. W., Saxl J.* On the orders of maximal subgroups of the finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. 1987. V. 55. P. 299–330.
8. *Kleidman P., Liebeck M. W.* The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. (London Math. Soc. Lecture Notes Ser.; V. 129).
9. *Мазуров В. Д.* Минимальные подстановочные представления конечных простых классических групп. Специальные линейные, симплектические и унитарные группы // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 3. С. 267–287.
10. *Васильев А. В., Мазуров В. Д.* Минимальные подстановочные представления конечных простых ортогональных групп // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 6. С. 603–627.
11. *Васильев А. В.* Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа G_2 и F_4 // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 6. С. 663–684.
12. *Васильев А. В.* Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа E_6, E_7 и E_8 // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 5. С. 518–530.
13. *Васильев А. В* Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп скрученного типа // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 1. С. 17–35.
14. *Tits J.* A local approach to buildings // Geometric Vein (Coxeter Festschrift). New York etc.: Springer-Verl., 1981. P. 519–547.
15. *Кораблева В. В.* Параболические подстановочные представления группы $F_4(q)$ // Тр. ИММ Уро РАН. 1998. Т. 5. С. 39–59.
16. *Кораблева В. В.* Параболические подстановочные представления групп $E_6(q)$ и $E_7(q)$ // Комбинаторные и вычислительные методы в математике. Омск: ОмГУ, 1999. С. 160–189.
17. *Кораблева В. В.* Параболические подстановочные представления групп $E_8(q)$ / Челяб. гос. ун-т. Челябинск, 1999. 221 с. Деп. в ВИНИТИ 29.10.99, № 3224.
18. *Кораблева В. В.* Параболические подстановочные представления групп ${}^2F_4(q)$ и ${}^3D_4(q^3)$ // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 1. С. 69–76.
19. *Кораблева В. В.* Параболические подстановочные представления групп ${}^2E_6(q)$ // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 6. С. 899–912.
20. *Кораблева В. В.* Ранги примитивных параболических подстановочных представлений классических групп лиевского типа $A_l(q)$ // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7. С. 188–193.
21. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: John Wiley and Sons, 1972.
22. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. Т. 2. Гл. IV–VI.
23. *Stumbo F.* Minimal length coset representatives for quotients of parabolic subgroups in Coxeter groups // Boll. Un. Mat. Ital. B (7). 2000. V. 8, N 3. P. 699–715.
24. *Carter R. W.* Finite groups of Lie type: conjugacy classes and complex characters. London: John Wiley and Sons, 1993.
25. *Schönert M. et al.* GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Sixth edition. Aachen, Germany: Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, 1997.

Статья поступила 14 июня 2006 г.

Кораблева Вера Владимировна
Челябинский гос. университет, математический факультет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454021
vvk@csu.ru