Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 517.5

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИЕ ВСПЛЕСКИ, ИМЕЮЩИЕ РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННЫЕ КОНСТАНТЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПО ПАРАМЕТРУ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕМУ ГЛАДКОСТЬ

Е. А. Лебедева

Аннотация. Построено семейство всплеск-функций, масштабирующие функции которых имеют экспоненциальное убывание и равномерно ограниченные константы неопределенности по параметру, определяющему гладкость.

Ключевые слова: всплеск, масштабирующая функция, маска, всплеск Мейера, ряд Фурье, средние Валле-Пуссена, константа неопределенности.

В работе [1] для широкого класса ортогональных масштабирующих функций и всплесков (например, всплесков Добеши и всплесков Баттла — Лемарье) доказано, что константы неопределенности стремятся к бесконечности с ростом гладкости. Однако в работах [2] и [3] построено семейство модифицированных всплесков Добеши, причем локализованность по времени и частоте автокорреляционной функции, построенной для масштабирующей функции данного всплеска, сохраняется с возрастанием гладкости. Следует выяснить, можно ли построить семейство всплесков, масштабирующие функции которых имеют, как и сплайн-всплески, экспоненциальное убывание на бесконечности и убывание порядка $O(\omega^{-l})$ при $|\omega| \to \infty$ в частотной области, причем константы неопределенности масштабирующих функций равномерно ограничены по параметру l, определяющему гладкость. Основное содержание данной работы составляет построение такого семейства всплесков.

§ 1. Основные обозначения, определения и вспомогательные результаты

Далее $[x]$ — целая часть числа x, $C^k_{[a,b]}$ — пространство всех k раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных на отрезке $[a,b]$, с нормой $\|f\|_{C^k} := \sum\limits_{j=0}^{k} \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(j)}(x)|$, $C^0[a,b] = C[a,b]$.

Модуль непрерывности функции $f \in C_{[a,b]}$ определяется соотношением

$$\omega(h,f) := \sup_{\substack{x, x+x_1\in[a,b],\\ 0<|x_1|\le h}} |f(x+x_1) - f(x)|$$

и удовлетворяет свойству $\omega(h,f)\to 0$ при $h\to 0$; χ_M — характеристическая функция множества M; $\zeta(x):=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ — дзета-функция Римана.

Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье выбраны в виде

$$\hat{f}(w):=\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itw}\,dt,\quad f(t):=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\hat{f}(w)e^{itw}\,dw$$

соответственно.

Средние Валле-Пуссена функции f имеют вид

$$V_N(f,w):=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+w)P_N(t)\,dt,$$

где $P_N(t):=(\cos Nt-\cos 2Nt)N^{-1}(2\sin 0,5t)^{-2}$ — ядро Валле-Пуссена.

Средние Фейера для функции f имеют вид

$$\sigma_N(f,w):=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+w)F_N(t)\,dt,$$

где $F_N(t):=2(N+1)^{-1}(\sin 0,5(N+1)t)^2(2\sin 0,5t)^{-2}$ — ядро Фейера.

Средние Валле-Пуссена и Фейера связаны соотношением

$$V_N(f,w)=2\sigma_{2N-1}(f,w)-\sigma_{N-1}(f,w). \tag{1}$$

Для аппроксимации функций средними Валле-Пуссена полезен следующий результат.

Теорема 1 [4, с. 123–127]. *Если $f\in C_{[-\pi,\pi]}$, то*

$$\|V_{[\frac{N+1}{2}]}(f,\cdot)-f(\cdot)\|_{C[-\pi;\pi]}\le K\omega(1/N,f),$$

где K — абсолютная константа (например, $K=44$).

Пусть $\theta(w)$ — нечетная функция, равная $\pi/4$ при $w>\pi/3$. В дальнейшем предполагается, что θ — неубывающая дважды непрерывно дифференцируемая функция. Пусть w_0 — параметр, изменяющийся в промежутке $\pi/3<w_0<\pi/2$, $w_1:=\pi-w_0$. Масштабирующая функция Мейера φ^M определяется так:

$$\widehat{\varphi^M}(w):=\begin{cases}1, & |w|\le 2w_0,\\ \cos\bigl(\frac{\pi}{4}+\theta\bigl(\frac{\pi}{3(\pi-2w_0)}(w-\pi)\bigr)\bigr), & 2w_0<|w|\le 2w_1,\\ 0, & |w|>2w_1.\end{cases}$$

Маска Мейера — 2π-периодическая функция, определяемая на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ следующим образом:

$$m^M(w):=\widehat{\varphi^M}(2w)=\begin{cases}1, & |w|\le w_0,\\ \cos\bigl(\frac{\pi}{4}+\theta\bigl(\frac{\pi}{3(\pi-2w_0)}(2w-\pi)\bigr)\bigr), & w_0<|w|\le w_1,\\ 0, & w_1<|w|\le\pi.\end{cases} \tag{2}$$

Константа неопределенности функции f равна $\Delta_f\Delta_{\hat{f}}$, где

$$\Delta_f^2:=\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^{-2}\int\limits_{\mathbb{R}}(t-t_{0f})^2|f(t)|^2\,dt,\quad \Delta_{\hat{f}}^2:=\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^{-2}\int\limits_{\mathbb{R}}(w-w_{0\hat{f}})^2|\hat{f}(w)|^2\,dw,$$

$$t_{0f} := \|f\|^{-2}_{L^2(\mathbb{R})} \int\limits_{\mathbb{R}} t|f(t)|^2\,dt, \quad w_{0\hat{f}} := \|\hat{f}\|^{-2}_{L^2(\mathbb{R})} \int\limits_{\mathbb{R}} w|\hat{f}(w)|^2\,dw.$$

Числа $\pm e^{i\bar{w}}$ называются *парой симметричных корней маски* m, если $m(\overline{w}) = m(\overline{w}+\pi) = 0$. Множество различных комплексных чисел $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ называется *циклическим*, если $b_{j+1} = b_j^2$, $j = 1, \dots, n$, $b_{n+1} = b_1$. Циклическое множество B называется *циклом маски* m, если $m(w+\pi) = 0$ для всех w таких, что $\exp(iw) = b_j$ для некоторого $j = 1, \dots, n$. *Тривиальным циклом* называется множество $\{1\}$. Маска называется *чистой*, если она не имеет ни пары симметричных нулей, ни циклов.

Показатель Гёльдера α_f функции f, заданной на отрезке $[a,b]$, определяется так:

$$\alpha_f := k + \sup_{\beta\in\mathbb{R}}\{\beta \in \mathbb{R} \mid |f^{(k)}(x_1) - f^{(k)}(x_2)| \le C_\beta |x_1 - x_2|^\beta,\ x_1, x_2 \in [a,b]\},$$

где $k := \max\limits_{h\in\mathbb{Z}}\{h \mid f \in C^h[a,b]\}$.

Гладкость функции характеризуется также числом

$$\theta_{\hat{f}} := \sup_{\beta\in\mathbb{R}}\{\beta \in \mathbb{R} \mid |\hat{f}(w)| \le C(|w|+1)^{-\beta}\}.$$

Для введенных характеристик гладкости, как известно, справедливо неравенство $\theta_{\hat{f}} - 1 \le \alpha_f \le \theta_{\hat{f}}$. Пусть $\theta(m)$ означает $\theta_{\widehat{\varphi}}$, где φ — масштабирующая функция, соответствующая маске m. Для нахождения $\theta(m)$ может быть использован следующий результат.

Теорема 2 [5, лемма 7.4.2, предложение 7.4.4]. *Пусть маска m представлена в виде $m(w) = \left(\cos\frac{w}{2}\right)^{L+1} m_c(w)$, где m_c — чистая маска. Тогда $\theta(m) = L + 1 + \theta(m_c)$ и $\theta(m_c) = \lim\limits_{k\to\infty}\theta_k$, где*

$$\theta_k := -\frac{1}{k}\log_2 \|m_c(w)\dots m_c(2^{k-1}w)\|_\infty. \tag{3}$$

§ 2. Сходимость семейства масок к маске Мейера

Рассмотрим 2π-периодический тригонометрический полином

$$m_l(w) := \left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2l} \frac{V_{[\frac{N(l)+1}{2}]}\left(m_l^M, w\right)}{V_{[\frac{N(l)+1}{2}]}\left(m_l^M, 0\right)},$$

где

$$m_l^M(w) := \frac{m^M(w)}{\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2l}}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $N(l)$ будет определена позднее в предложении 1. Обозначим

$$v_l(w) := V_{[\frac{N(l)+1}{2}]}\left(m_l^M, w\right).$$

Так как $m_l^M \in C[-\pi;\pi]$, по теореме 1

$$\left\|v_l - m_l^M\right\|_{C[-\pi;\pi]} \le K\omega\left((N(l))^{-1}, m_l^M\right).$$

Также из непрерывности функции m_l^M следует, что

$$\omega\left((N(l))^{-1}, m_l^M\right) \to 0 \quad \text{при } N(l) \to \infty.$$

Из определения функции m_l^M вытекает, что если $N(l) \to \infty$ при $l \to \infty$, то $\omega\big((N(l))^{-1}, m_l^M\big)$ является возрастающей последовательностью по l.

Найдем $N(l)$ такое, что $\omega\big((N(l))^{-1}, m_l^M\big) \to 0$ при $l \to \infty$. По определению модуля непрерывности

$$\omega((N(l))^{-1}, m^M) = \sup_{\substack{-\pi \le w, w+h \le \pi, \\ 0<|h|\le (N(l))^{-1}}} \left|m_l^M(w+h) - m_l^M(w)\right|.$$

Так как $m_l^M \in C[-\pi;\pi]$, по теореме Лагранжа $\omega\big(h, m_l^M\big) \le h \max\limits_{[-\pi,\pi]} \big|\big(m_l^M\big)'\big|$. Оценим $\big|\big(m_l^M\big)'\big|$. Имеем

$$\big(m_l^M\big)'(w) = \left(\cos\frac{w}{2}\right)^{-2l} \left((m^M)'(w) + l \operatorname{tg}\frac{w}{2} m^M(w)\right).$$

Так как $m^M(w) = 0 \quad$ при $w_1 \le w \le \pi$ и $|m^M| \le 1$, то

$$\big|\big(m_l^M\big)'(w)\big| \le \left(\cos\frac{w_1}{2}\right)^{-2l} \left(\max_{[-\pi,\pi]} |(m^M)'| + l \operatorname{tg}\frac{w_1}{2}\right) = b^l(M_1 + l(b-1)^{0,5}),$$

где $b := \big(\cos\frac{w_1}{2}\big)^{-2}$ и $M_1 := \max\limits_{w\in[-\pi,\pi]} |(m^M)'(w)|$. Таким образом,

$$\omega((N(l))^{-1}, m^M) \le (N(l))^{-1} b^l (M_1 + l(b-1)^{0,5}).$$

Итак, получено следующее

Предложение 1. *Если* $N(l) \ge \frac{b^l(l(b-1)^{0,5}+M_1)}{\varepsilon}$, *где* $\varepsilon > 0$, *то*

$$\left\|v_l - m_l^M\right\|_{C[-\pi;\pi]} < K\varepsilon, \tag{4}$$

где K — *абсолютная константа (допустим,* $K = 44$*).*

Например,

$$\text{если } N(l) \ge b^{3l}(l(b-1)^{0,5} + M_1), \text{ то } \left\|v_l - m_l^M\right\|_{C[-\pi;\pi]} < Kb^{-2l}. \tag{5}$$

В дальнейшем предполагаем, что $N(l)$ удовлетворяет (5).

Обозначим

$$\alpha(l, w) := v_l(w) - m_l^M(w) \quad \text{и} \quad \alpha(l) := Kb^{-2l}. \tag{6}$$

Тогда из (5) следует, что

$$|\alpha(l, w)| < |\alpha(l)| \quad \text{и} \quad l\alpha(l) \to 0 \quad \text{при } l \to \infty. \tag{7}$$

Заметим, что $N_0(l) := b^{3l}(l(b-1)^{0,5} + M)$ — возрастающая положительная функция, следовательно, обратная функция $l \mapsto l(N_0)$ существует, возрастает и неотрицательна.

Из (4) получим

Следствие 1. *В условиях предложения* 1 *справедливо неравенство*

$$\left\| \left(\cos\frac{\cdot}{2}\right)^{2l} v_l(\cdot) - m^M(\cdot)\right\|_{C[-\pi;\pi]} < K\varepsilon.$$

Доказательство. Действительно,

$$\left| \left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2l} v_l(w) - m^M(w)\right| \le \left|v_l(w) - m_l^M(w)\right| \le K\varepsilon. \quad \square$$

Замечание 1. Из неравенства (4) следует, что $v_l(0) \to m_l^M(0) = 1$ при $l \to \infty$, поэтому $0 < d < c \le m_l^M(0)$ начиная с некоторого l_0, где $c := \inf\limits_{l \ge l_0} v_l(0)$, а d — абсолютная константа. Не умаляя общности, можно рассматривать вводимые семейства функций (m_l, m_l^M и др.) начиная с номера l_0.

Поэтому имеет место

Следствие 2. *Имеет место сходимость*

$$\|m_l - m^M\|_{C[-\pi;\pi]} \to 0 \quad \textit{при } l \to \infty.$$

Доказательство. Так как $m^M(0) = 1$ и $|m_M| \le 1$, то

$$\begin{aligned}|m_l(w) - m^M(w)| &= \left| \left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2l} \frac{v_l(w)}{v_l(0)} - \frac{m^M(w)}{m^M(0)}\right| \\ &\le \frac{1}{|v_l(0)|} \left| \left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2l} v_l(w) - m^M(w)\right| + m^M(w) \left|\frac{1}{v_l(0)} - \frac{1}{m^M(0)}\right| \\ &\le \frac{K\varepsilon}{c} + \frac{1}{v_l(0)} |v_l(0) - 1| \le \frac{2K\varepsilon}{c}. \qquad \square\end{aligned}$$

Поскольку m_l — тригонометрический полином и $m_l(0) = 1$, по предложению 2.4.1 из [5] бесконечное произведение $\prod\limits_{j=1}^{\infty} m_l\big(\frac{w}{2^j}\big)$ сходится абсолютно и равномерно на любом компакте. (Считаем, что бесконечное произведение сходится и в случае, когда оно равно нулю.) Поэтому функция m_l является маской для стабильной, но не ортогональной масштабирующей функции φ_l, преобразование Фурье которой определяется равенством $\widehat{\varphi}_l(w) := \prod\limits_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{w}{2^j}\right)$. Утверждение о том, что функции $\varphi_l(\cdot + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, образуют базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки, доказано в лемме 3 (неравенство (17)).

§ 3. Рост гладкости (на основании свойств маски)

Оценим показатель гладкости функции φ_l. Для этого представим маску в виде $m_l(w) = \left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2l} m_{0,l}(w)$, где $m_{0,l}(w) := \frac{v_l(w)}{v_l(0)}$. Докажем, что $m_{0,l}$ является чистой маской. Другими словами, вспоминая, что $v_l(w) := V_{[\frac{N(l)+1}{2}]}\big(m_l^M, w\big)$, докажем, что для каждого $l \in \mathbb{N}$ существует $N(l) \ge N_0(l)$, для которого $V_{[\frac{N(l)+1}{2}]}\big(m_l^M, \pi\big) \ne 0$. Предположим, что это условие не выполняется и можно найти такой номер n_0, что $V_n\big(m_l^M, \pi\big) = 0$ для всех $n > n_0$.

Вспоминая определение средних Фейера для функции m_l^M, получим

$$\sigma_{2n-1}\big(m_l^M, \pi\big) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} m_l^M(t + \pi) \frac{1}{n} \frac{(\sin nt)^2}{(2\sin 0,5t)^2}\, dt,$$

$$\sigma_{n-1}\bigl(m_l^M,\pi\bigr)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}m_l^M(t+\pi)\frac{2}{n}\frac{(\sin 0,5nt)^2}{(2\sin 0,5t)^2}\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}m_l^M(2u)\frac{2}{n}\frac{(\sin(un-0,5\pi n))^2}{(2\cos u)^2}\,du=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}m_l^M(2u)\frac{1}{k}\frac{(\sin(2uk))^2}{(2\cos u)^2}\,du,$$

где предпоследнее равенство получено с помощью подстановки $u=0,5(t+\pi)$, а последнее следует из четности функции m_l^M и записано для четных $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$.

Тогда на основании (1) и определения средних Фейера имеем

$$V_n\bigl(m_l^M,\pi\bigr)=2\sigma_{2n-1}\bigl(m_l^M,\pi\bigr)-\sigma_{n-1}\bigl(m_l^M,\pi\bigr)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}2\sin^2\frac{t}{2}\,\bigl(m_{l+1}^M(t+\pi)-m_{l+1}^M(2t)\bigr)\,\frac{1}{2k}\frac{(\sin 2kt)^2}{(2\sin 0,5t)^2}\,dt=\sigma_{4k-1}(g_l,0),$$

где $g_l(t):=2\sin^2\frac{t}{2}\bigl(m_{l+1}^M(t+\pi)-m_{l+1}^M(2t)\bigr)$.

Таким образом, существует $k_0=[0,5n_0]+1$ такое, что $\sigma_{4k-1}(g_l,0)=0$ при $k\geq k_0$.

Так как $\sigma_m(f,w)=(m+1)^{-1}(S_0(f,w)+\dots+S_m(f,w))$, где $S_m(f,\cdot)$ — m-я частичная сумма ряда Фурье функции f, то

$$(4k+4)\sigma_{4k+3}(g_l,0)-4k\sigma_{4k-1}(g_l,0)=\sum_{j=0}^{3}S_{4k+j}(g_l,0)$$

и, следовательно, $\sum\limits_{j=0}^{3}S_{4k+j}(g_l,0)=0$. Поскольку g_l — четная функция, имеем

$$\sum_{j=0}^{3}S_{4k+j}(g_l,0)=2a_0+4\sum_{m=1}^{4k}a_m+3a_{4k+1}+2a_{4k+2}+a_{4k+3},$$

где $a_m=\pi^{-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g_l(w)\,\cos mw\,dw$. Тогда

$$2a_0+4\sum_{m=1}^{4k}a_m+3a_{4k+1}+2a_{4k+2}+a_{4k+3}=0.$$

Заменяя в последнем равенстве k на $k+1$, получим

$$2a_0+4\sum_{m=1}^{4k+4}a_m+3a_{4k+5}+2a_{4k+6}+a_{4k+7}=0.$$

Вычитаем из последнего равенства предпоследнее:

$$a_{4k+1}+2a_{4k+2}+3a_{4k+3}+4a_{4k+4}+3a_{4k+5}+2a_{4k+6}+a_{4k+7}=0.$$

Используя определение a_m и равенство $\cos x+\cos y=2\cos 0,5(x+y)\cos 0,5(x-y)$, приходим к равенству

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}2g_l(t)(\cos 3t+2\cos 2t+3\cos t+4)\cos(4k+4)t\,dt=0.$$

Обозначим $h_l(t) := 2g_l(t)(\cos 3t + 2\cos 2t + 3\cos t + 4)$, тогда $\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_l(t)\cos(4k+4)t\,dt = 0$.

Преобразуем последний интеграл:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_l(t)\cos(4k+4)t\,dt = 0,5\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} h_l(0,5t)\cos 2(k+1)t\,dt = 0,5\left(\int\limits_{0}^{2\pi} + \int\limits_{-2\pi}^{0}\right)$$
$$= 0,5\int\limits_{-\pi}^{\pi}(h_l(0,5(t+\pi)) + h_l(0,5(t+\pi)))\cos 2(k+1)t\,dt.$$

Применяя аналогичные рассуждения к последнему интегралу, окончательно получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} h_l(t)\cos(4k+4)t\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} q_l(t)(-1)^k\cos(k+1)t\,dt,$$

где

$$q_l(t) := \frac{1}{4}\left(h_l\left(\frac{t+3\pi}{4}\right) + h_l\left(\frac{t+\pi}{4}\right) + h_l\left(\frac{t-\pi}{4}\right) + h_l\left(\frac{t-3\pi}{4}\right)\right).$$

Тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} q_l(t)\cos kt\,dt = 0 \quad \text{для всех } k \geq [0,5n_0] + 2. \tag{8}$$

Так как по определению q_l — четная функция, то $b_m = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$, где $b_m := \pi^{-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} q_l(t)\sin mt\,dt$. Из определения функции θ следует, что q_l — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда ряд Фурье, построенный по q_l, сходится к q_l, поэтому из (8) получаем, что q_l — тригонометрический полином: $q_l(t) = \sum\limits_{m=0}^{[0,5n_0]+2} c_m\cos mt$. Из определения функции q_l и того, что маска Мейера m^M не является тригонометрическим полиномом, следует, что функция q_l не будет тригонометрическим полиномом. Полученное противоречие означает, что для любого n_0 существует n_{1l} ($n_0, n_{1l} \in \mathbb{N}$) такое, что $V_{n_{1l}}\big(m_l^M, \pi\big) \neq 0$ и $n_{1l} \geq n_0$. Таким образом, при $N(l) = n_{1l}$ соответствующая маска m_{0l} будет чистой, что и требовалось доказать.

Так как m_{0l} — чистая маска, для оценки показателя гладкости функции φ_l можно воспользоваться теоремой 2. Найдем $\lim\limits_{k\to\infty}\theta_k$ для $m_{0,l}(w)$, где θ_k определены в теореме 2. Из замечания 1, равенства (1), а также свойства средних Фейера быть ограниченными теми же константами, что и порождающие их функции (см., например, [6, с. 610]), последовательно имеем

$$|m_{0,l}(w)| \leq \frac{1}{c}|v_l(w)| \leq \frac{1}{c}\max_w\big\{2\sigma_{2[\frac{N(l)+1}{2}]-1}\big(m_l^M, w\big), \sigma_{[\frac{N(l)+1}{2}]-1}\big(m_l^M, w\big)\big\}$$

и $\sup\limits_w \sigma_n\big(m_l^M, w\big) \leq \sup\limits_w m_l^M(w)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Из определения функции m_l^M следует, что m_l^M четная, $m_l^M(w) \leq \big(\cos\frac{w}{2}\big)^{-2l}$ при $0 \leq w \leq w_1$ и $m_l^M(w) \leq 0$ при $w_1 < w \leq \pi$.

Определим четную функцию $f_{0,l}$ такую, что $f_{0,l}(w) := \frac{2}{c}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{-2l}$ при $0 \le w \le w_1$ и $f_{0,l}(w) := 0$ при $w_1 < w \le \pi$. Таким образом, $\sup\limits_w |m_{0,l}(w)| \le \sup\limits_w f_{0,l}(w)$, поэтому $\theta_k(m_{0,l}) \ge \theta_k(f_{0,l})$.

По определению функции f_{0l} имеем

$$\|f_{0l}(w)\dots f_{0l}(2^{k-1}w)\|_\infty = f_{0l}(w_1)\dots f_{0l}\left(\frac{w_1}{2^{k-1}}\right) = \frac{(2/c)^k}{(\cos w_1/2\dots\cos w_1/2^k)^{2l}}.$$

Тогда на основании (3) получим

$$\theta_k(f_{0l}) = -\frac{1}{k}\log_2\left(\frac{2}{c}\right)^k - 2l\log_2\left|\cos\frac{w_1}{2}\dots\cos\frac{w_1}{2^k}\right|^{-\frac{1}{k}} \to \log_2\left(\frac{c}{2}\right) \text{ при } k\to\infty.$$

При предельном переходе использовалось тождество $\prod\limits_{j=1}^{\infty}\cos\frac{w}{2^j} = \frac{\sin w}{w}$.

Таким образом, $\theta(m_{0,l}) \ge \log_2\left(\frac{c}{2}\right)$. Для $m_{0,l}$ кратность тривиального цикла равна $2l$. Окончательно, $2l - 1 + \log_2\left(\frac{c}{2}\right) \le \alpha_{\varphi_l} \le 2l + \log_2\left(\frac{c}{2}\right)$. Таким образом, $\alpha_{\varphi_l} \to \infty$ при $l \to \infty$.

§ 4. Сходимость неортогонализованных масштабирующих функций к масштабирующей функции Мейера

Лемма 1. *Для любого $w \in \mathbb{R}$ имеет место сходимость $|\widehat{\varphi}_l(w) - \widehat{\varphi^M}(w)| \to 0$ при $l \to \infty$.*

Доказательство. Фиксируем $w \in \mathbb{R}$, находим $D \in \mathbb{N}$ так, чтобы $|w|/2^D < 2w_0$, w_0 — параметр, входящий в определение маски Мейера m^M. Тогда

$$\begin{aligned}
|\widehat{\varphi}_l(w) - \widehat{\varphi^M}(w)| &= \left|\prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{w}{2^j}\right) - \prod_{j=1}^{\infty} m^M\left(\frac{w}{2^j}\right)\right| \\
&= \left|\prod_{j=1}^{D} m_l\left(\frac{w}{2^j}\right)\prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{w}{2^D2^j}\right) - \prod_{j=1}^{D} m^M\left(\frac{w}{2^j}\right)\prod_{j=1}^{\infty} m^M\left(\frac{w}{2^D2^j}\right)\right| \\
&\le \left|\prod_{j=1}^{D} m_l\left(\frac{w}{2^j}\right) - \prod_{j=1}^{D} m^M\left(\frac{w}{2^j}\right)\right| \left|\prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{w}{2^D2^j}\right)\right. \\
&\quad + \left|\prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{w}{2^D2^j}\right) - \prod_{j=1}^{\infty} m^M\left(\frac{w}{2^D2^j}\right)\right| \left.\prod_{j=1}^{D} m^M\left(\frac{w}{2^j}\right)\right. \\
&= \left|\prod_{j=1}^{D} m_l\left(\frac{w}{2^j}\right) - \prod_{j=1}^{D} m^M\left(\frac{w}{2^j}\right)\right| \widehat{\varphi}_l\left(\frac{w}{2^D}\right) + \left|\widehat{\varphi}_l\left(\frac{w}{2^D}\right) - 1\right| \widehat{\varphi^M}(w).
\end{aligned}$$

Так как $\|m_l - m^M\|_{C[-\pi;\pi]} \to 0$ при $l \to \infty$, то

$$\left|\prod_{j=1}^{D} m_l\left(\frac{w}{2^j}\right) - \prod_{j=1}^{D} m^M\left(\frac{w}{2^j}\right)\right| \to 0 \text{ при } l \to \infty.$$

Также заметим, что $\widehat{\varphi^M}(w)$ не зависит от l и $\widehat{\varphi^M}(w) \le 1$. Если доказать, что $\widehat{\varphi}_l\left(\frac{w}{2^D}\right) \to 1$ при $l \to \infty$, то $\widehat{\varphi}_l\left(\frac{w}{2^D}\right)$ будет ограничено по l. Таким образом, достаточно доказать $\widehat{\varphi}(w) \to 1$ при $l \to \infty$ для фиксированного $|w| < 2w_0$. Имеем

$$\widehat{\varphi}_l(w) - 1 = \prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{w}{2^j}\right) - 1 = e^{\ln \prod\limits_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{w}{2^j}\right)} - 1 = e^{\sum\limits_{j=1}^{\infty} \ln m_l\left(\frac{w}{2^j}\right)} - 1.$$

Докажем, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \ln m_l\left(\frac{w}{2^j}\right) \to 0$ при $l \to \infty$. Так как $\ln m_l(0) = 0$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ln m_l\left(\frac{w}{2^j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\ln m_l\left(\frac{w}{2^j}\right) - \ln m_l(0)\Big).$$

По теореме Лагранжа

$$\ln m_l\left(\frac{w}{2^j}\right) - \ln m_l(0) = \frac{w}{2^j}\left(\ln m_l(w)\right)'_{w=w_j^*}, \quad \text{где } 0 < w_j^* < \frac{w}{2^j},$$

$$\begin{aligned}(\ln m_l(w))'_{w=w_j^*} &= \frac{m_l'(w_j^*)}{m_l(w_j^*)} = \frac{\Big(\big(\cos\frac{w}{2}\big)^{2l} v_l(w)\Big)'_{w=w_j^*} v_l(0)}{v_l(0)\big(\cos\frac{w_j^*}{2}\big)^{2l} v_l(w_j^*)} \\ &= \frac{-l\big(\cos\frac{w_j^*}{2}\big)^{2l-1}\sin\frac{w_j^*}{2} v_l(w_j^*) + \big(\cos\frac{w_j^*}{2}\big)^{2l} v_l'(w_j^*)}{\big(\cos\frac{w_j^*}{2}\big)^{2l} v_l(w_j^*)} = -l\operatorname{tg}\frac{w_j^*}{2} + \frac{v_l'(w_j^*)}{v_l(w_j^*)}. \quad (9)\end{aligned}$$

Напомним, что

$$v_l(w) = \int_{-\pi}^{\pi} m_l^M(w+x) P_{\left[\frac{N(l)+1}{2}\right]}(x)\,dx.$$

Этот интеграл удовлетворяет достаточным условиям дифференцирования интеграла по параметру. Действительно, функция $m_l^M(w+x)P_{\left[\frac{N(l)+1}{2}\right]}(x)$ определена на квадрате $[-\pi;\pi]\times[-\pi;\pi]$ и непрерывна по x. Производная $\big(m_l^M(w+x)P_{\left[\frac{N(l)+1}{2}\right]}(x)\big)'_w$ существует во всей области определения и непрерывна по (x, w).

Таким образом,

$$v_l'(w) = \int_{-\pi}^{\pi} (m_l^M)'(w+x) P_{\left[\frac{N(l)+1}{2}\right]}(x)\,dx = V_{\left[\frac{N(l)+1}{2}\right]}\big((m_l^M)', w\big). \quad (10)$$

Обозначим $v_{1l}(w) := V_{\left[\frac{N(l)+1}{2}\right]}\big((m_l^M)', w\big)$. Оценим $\big\|v_{1l} - (m_l^M)'\big\|_{C[-\pi;\pi]}$. По теореме 1

$$\big\|v_{1l} - (m_l^M)'\big\|_{C[-\pi;\pi]} \le K\omega\big(1/N(l), (m_l^M)'\big).$$

По теореме Лагранжа $\omega\big(h, (m_l^M)'\big) \le h \max\limits_{[-\pi,\,\pi]}\big|(m_l^M)''\big|$. Далее,

$$\begin{aligned}\big|(m_l^M)''(w)\big| = \left|\left(\frac{m^M(w)}{\big(\cos\frac{w}{2}\big)^{2l}}\right)''\right| &= \left(\cos\frac{w}{2}\right)^{-2l}\Bigg((m^M)''(w) + 2l\operatorname{tg}\frac{w}{2}(m^M)'(w) \\ &+ \left(\frac{l}{2}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{-2} + l^2\operatorname{tg}^2\frac{w}{2}\right)m^M(w)\Bigg) \\ &\le b^l(M_2 + 2l(b-1)^{0,5}M_1 + 0,5lb^2 + (b-1)l^2),\end{aligned}$$

где $b = \left(\cos\frac{w_1}{2}\right)^{-2}$, $M_k := \max\limits_{[-\pi,\,\pi]}(m^M)^{(k)}$.

На основании (5) имеем

$$\left\|v_{1l} - \left(m_l^M\right)'\right\|_{C[-\pi;\pi]} \le K\omega\left(1/N, \left(m_l^M\right)'\right) \le K\gamma(l),$$

где

$$\gamma(l) := K\frac{M_2 + (2(b-1)^{0,5}M_1 + 0,5b^2)l + (b-1)l^2}{b^{2l}((b-1)^{0,5}l + M_1)}, \ \gamma(l,w) := v_{1l}(w) - \left(m_l^M\right)'(w). \tag{11}$$

Тогда

$$|\gamma(l,w)| \le \gamma(l) \quad \text{и} \quad \gamma(l) \to 0 \text{ при } l \to \infty. \tag{12}$$

Последнее соотношение верно, так как K — абсолютная константа (см. теорему 1) и b, M_1, M_2 зависят только от выбора m^M.

Из (6) и равенства $\left(m_l^M\right)'(w) = l\,\mathrm{tg}\,\frac{w}{2}m_l^M(w)$, верного при $|w| \le 2w_0$, а также определения функции $\gamma(l,w)$ (11), учитывая, что на основании (10) $v_l' = v_{1l}$ и продолжая (9), получим

$$\begin{aligned}(\ln m_l(w))'_{w=w_j^*} &= -l\,\mathrm{tg}\,\frac{w_j^*}{2} + \frac{\left(m_l^M\right)'(w_j^*) + \left(v_l'(w_j^*) - \left(m_l^M\right)'(w_j^*)\right)}{m_l^M(w_j^*) + \left(v_l(w_j^*) - m_l^M(w_j^*)\right)} \\ &= \frac{-l\,\mathrm{tg}\,\frac{w_j^*}{2}m_l^M(w_j^*) - l\,\mathrm{tg}\,\frac{w_j^*}{2}\alpha(l,w_j^*) + \left(m_l^M\right)'(w_j^*) + \gamma(l,w_j^*)}{m_l^M(w_j^*) + \alpha(l,w_j^*)} \\ &= \frac{-l\,\mathrm{tg}\,\frac{w_j^*}{2}\alpha(l,w_j^*) + \gamma(l,w_j^*)}{m_l^M(w_j^*) + \alpha(l,w_j^*)}.\end{aligned}$$

Поэтому из (7), (12) и неравенств $0 < w_j^* < \frac{w}{2^j}$, $|w| < 2w_0$ имеем

$$\left|(\ln m_l(w))'_{w=w_j^*}\right| \le \frac{l\left|\mathrm{tg}\,\frac{w_j^*}{2}\right|\alpha(l) + \gamma(l)}{\left|m_l^M(w_j^*)\right| - \alpha(l)} \le 2(l\alpha(l) + \gamma(l)). \tag{13}$$

Таким образом, на основании свойств (7) и (12) получим

$$\sum_{j=1}^{\infty}\ln m_l\left(\frac{w}{2^j}\right) \le 2\left(l\alpha(l) + \gamma(l)\right)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{w}{2^j} \le 2w_0(l\alpha(l) + \gamma(l)) \to 0 \ \text{ при } l \to \infty. \quad \square$$

Замечание 2. Из доказательства леммы 1 следует равномерная сходимость $\widehat{\varphi}_l$ к $\widehat{\varphi^M}$ по l на любом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}$.

Лемма 2. *Имеет место сходимость* $\|\widehat{\varphi}_l - \widehat{\varphi^M}\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0$ *при* $l \to \infty$.

Доказательство. Докажем, что существует функция ξ такая, что $\xi \in L^2(\mathbb{R})$ и $|\widehat{\varphi}_l(w)| \le \xi(w)$. Действительно,

$$\widehat{\varphi}_l(w) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(\cos^2\frac{w}{2^{j+1}}\right)^l v_l(w2^{-j})v_l^{-1}(0) = \left(\frac{2}{w}\sin\frac{w}{2}\right)^{2l}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{v_l(w2^{-j})}{v_l(0)}.$$

Обозначим $\widehat{\varphi_{0l}}(w) := \prod\limits_{j=1}^{\infty}\frac{v_l(w2^{-j})}{v_l(0)}$. На основе доказательства предложения 7.4.4 из [5] получим $|\widehat{\varphi_{0l}}(w)| = w^{-2\theta(m_{0,l})}\max\limits_{|w|<2w_0}\widehat{\varphi_{0l}}(w)$, где $\theta(m_{0,l})$ определена в теореме 2, в § 3 доказано, что $\theta(m_{0,l}) \ge \log_2\left(\frac{c}{2}\right)$.

Используя (9) и (13) при $|w|<2w_0$, имеем

$$|\widehat{\varphi_{0,l}}(w)| = \left|\prod_{j=1}^{\infty} \frac{v_l(w2^{-j})}{v_l(0)}\right| = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\ln v_l(w2^{-j}) - \ln(v_l(0))|\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|w|}{2^j}\left|\frac{v_l'(w_j^*)}{v_l(w_j^*)}\right|\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|w|}{2^j}\left|l \operatorname{tg}\frac{w_j^*}{2} + (\ln m_l(w))'_{w=w_j^*}\right|\right)$$

$$\le \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|w|}{2^j}\left(l \operatorname{tg}\frac{|w|_j^*}{2} + |(\ln m_l(w))'|_{w=w_j^*}\right)\right)$$

$$\le \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|w|}{2^j}\left(l + 2(l\alpha(l) + \gamma(l))\right)\right) \le \exp\left(2w_0\,(l+1)\right),$$

где $0 < w_j^* < \frac{w}{2^j}$. Применяя данную оценку и результаты § 3, для $|w| \ge 1$ получим $|\widehat{\varphi}_{0l}(w)| \le |w|^{2\log_2 \frac{2}{c}} e^{2w_0(l+1)}$. Таким образом, при $|w| > 4e^{2w_0}$ выполняется

$$|\widehat{\varphi}_l(w)| \le |w|^{-2l+2\log_2 \frac{2}{c}}(4e^{2w_0})^l e^{2w_0} \le e^{2w_0}|w|^{-l+2\log_2 \frac{2}{c}}.$$

Из замечания 2 к лемме 1 следует, что $|\widehat{\varphi}_l(w)| \le 1 + \varepsilon(l)$ при $|w| \le 4e^{2w_0}$, где $\varepsilon(l) \to 0$ при $l \to \infty$.

Следовательно,

$$\varphi_l(w) \le \xi_l(w) := \begin{cases} 1+\varepsilon(l), & |w| \le 4e^{2w_0}, \\ e^{2w_0}|w|^{-l+\log_2 \frac{2}{c}}, & |w| > 4e^{2w_0}. \end{cases} \tag{14}$$

Значит, искомую функцию ξ можно определить так:

$$\xi(w) := \begin{cases} 1+\nu, & |w| \le 4e^{2w_0}, \\ e^{2w_0}|w|^{-l_1+2\log_2 \frac{2}{c}}, & |w| > 4e^{2w_0}, \end{cases}$$

где ν — абсолютная константа, $\nu > 0$, $l_1 := \max\{l_0, 2\log_2 \frac{2}{c} + 2\}$. Тогда доказательство леммы 2 следует из теоремы Лебега и леммы 1. $\square$

§ 5. Равномерная ограниченность частотных радиусов функций $\varphi_l^\perp$

Определим $\widehat{\varphi_{l^\perp}} := \widehat{\varphi}_l \Phi_l^{-0,5}$, где $\Phi_l(w) := \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_l(w+2\pi k)|^2$. Тогда, как известно (см., например, [5, предложение 4.2.1]), $\varphi_l^\perp$ — ортонормированная масштабирующая функция, порождающая тот же кратномасштабный анализ, что и φ_l. Маска для функции $\varphi_l^\perp$ определяется так: $m_l^\perp(\cdot) := m_l(\cdot)\Phi_l^{0,5}(\cdot)\Phi_l^{-0,5}(2\cdot)$.

Лемма 3. *Для любого $l \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $\Delta^2_{\widehat{\varphi_l^\perp}} \le C_1$, где C_1 — абсолютная константа.*

Доказательство. Оценим 2π-периодическую функцию Φ_l. Пусть $w \in [-\pi;\pi]$. Тогда из леммы 1 следует, что $|\widehat{\varphi}(w)| \ge \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon(l)\right)$, где $\varepsilon(l) \to 0$ при $l \to 0$. Имеем

$$\Phi_l(w) = |\widehat{\varphi}_l(w)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}, k\ne 0} |\widehat{\varphi}_l(w+2\pi k)|^2 \ge \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon(l)\right)^2. \tag{15}$$

С другой стороны, если $p := \left[\frac{4e^{2w_0}+\pi}{2\pi}\right] + 1$, то из (14) получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_l(w+2\pi k)|^2 = \sum_{|k|\le p} + \sum_{|k|>p} \le e^{4w_0} \sum_{|k|>p} |w+2\pi k|^{-2l+4\log_2 \frac{2}{c}}$$

$$+ (1+\varepsilon(l))^2(2p+1) \le (2p+1)(1+\varepsilon(l))^2 + \frac{e^{4w_0}\zeta\left(-2l+4\log_2\frac{c}{2}\right)}{(2\pi)^{2l-4\log_2\frac{c}{2}}}$$

$$\le (2p+1)(1+\varepsilon(l))^2 + R, \quad (16)$$

где R — абсолютная константа. В последнем равенстве использована ограниченность на луче $(2,+\infty)$ функции Римана.

Обозначим $A(l) := \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon(l)\right)^2$, $B(l) := (2p+1)(1+\varepsilon(l))^2 + R$. Так как $\varepsilon(l) \to 0$ при $l \to \infty$, то $A(l) \ge A > 0$ и $B(l) \le B$, где A и B — абсолютные константы. Таким образом,

$$0 < A \le A(l) \le \Phi_l \le B(l) \le B. \quad (17)$$

Тем самым из (15) и (14) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} w^2 \left|\widehat{\varphi_l^\perp}(w)\right|^2 dw = \int\limits_{\mathbb{R}} w^2 \frac{|\widehat{\varphi}_l(w)|^2}{\Phi_l(w)}\, dw \le A^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} w^2\, |\widehat{\varphi}_l(w)|^2\, dw$$

$$\le A^{-1}\Bigg(\int\limits_{|w|<4e^{2w_0}} w^2\,(1+\varepsilon(l))^2\, dw + \int\limits_{|w|>4e^{2w_0}} e^{4w_0}|w|^{-2l+4\log_2\frac{2}{c}+2}\, dw\Bigg)$$

$$\le A^{-1}\left(\frac{2}{3}(4e^{2w_0})^3\,(1+\varepsilon(l))^2 + \frac{2e^{4w_0}}{2l-4\log_2\frac{2}{c}-3}|4e^{2w_0}|^{-2l+4\log_2\frac{2}{c}+3}\right) \le 2\pi C_1,$$

где C_1 — абсолютная константа.

Так как $\widehat{\varphi_l^\perp}$ — четная функция, то частотный центр $w_{0\widehat{\varphi_l^\perp}}$ равен 0, поэтому

$$\Delta^2_{\widehat{\varphi_l^\perp}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} w^2 \left|\widehat{\varphi_l^\perp}(w)\right|^2 dw.$$

Поскольку

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{A}\left(\frac{2}{3}(4e^{2w_0})^3\,(1+\varepsilon(l))^2 + \frac{2e^{4w_0}|4e^{2w_0}|^{-2l+4\log_2\frac{2}{c}+3}}{2l-4\log_2\frac{2}{c}-3}\right) = \frac{2(4e^{2w_0})^3}{3A},$$

имеем $\lim\limits_{l\to\infty}\Delta^2_{\widehat{\varphi_l^\perp}} \le \frac{1}{3A\pi}(4e^{2w_0})^3$. $\square$

Замечание 3. Так как m_l — тригонометрический полином, то φ_l имеет компактный носитель. Следовательно, учитывая соотношение (17), получаем, что $\varphi_l^\perp$ убывает на бесконечности экспоненциально (см., например, [5, замечание 4.2.2]).

§ 6. Равномерная ограниченность временных радиусов функций $\varphi_l^\perp$

Лемма 4. *Пусть преобразование Фурье масштабирующей функции, имеющей ортонормированные целые сдвиги, определяется равенством*

$$\widehat{\varphi}(w) = \prod_{j=1}^{\infty} m\Big(\frac{w}{2^j}\Big)$$

и бесконечное произведение допускает почленное дифференцирование на любом ограниченном множестве. Тогда

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} t^2|\varphi(t)|^2\,dt\right)^{0,5} \le J\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |m'(w)|\,dw\right)^{0,5},$$

где $J = (2\pi)^{-0,5}(2^{0,5}+1)$.

Доказательство. Так как $\widehat{\varphi}'(w) = iw\widehat{\varphi}(w)$, то по теореме Планшереля $\int\limits_{\mathbb{R}} t^2|\varphi(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}'(w)|^2\,dw$. Пусть $w \in [-(2N+1)\pi; (2N+1)\pi]$. Из определения функции $\widehat{\varphi}(w)$ следует, что

$$\widehat{\varphi}'(w) = \left(\sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l}\frac{m'(2^{-l}w)}{m(2^{-l}w)}\right)\prod_{p=1}^{\infty} m(2^{-p}w).$$

Так как $|m(w)| \le 1$, то

$$\begin{aligned}|\widehat{\varphi}'(w)| &\le \sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l}|m'(2^{-l}w)|\prod_{p=l+1}^{\infty}|m(2^{-p}w)| \\ &= \sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l}|m'(2^{-l}w)|\prod_{p=1}^{\infty}|m(2^{-p-l}w)| = \sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l}|m'(2^{-l}w)|\cdot|\widehat{\varphi}(2^{-l}w)|.\end{aligned}$$

Положим $a_l(w) := |m'(2^{-l}w)|\,|\widehat{\varphi}(2^{-l}w)|$. Тогда на основании неравенства Коши — Буняковского получим

$$\Big|\sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l}a_l(w)\Big|^2 \le \sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-2lq}\sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-2l(1-q)}a_l^2(w),$$

где $0 < q < \frac{1}{2}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\left(\int\limits_{-(2N+1)\pi}^{(2N+1)\pi} |\widehat{\varphi}'(w)|^2\,dw\right)^{0,5} &\le \left(\int\limits_{-(2N+1)\pi}^{(2N+1)\pi}\Big|\sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l}a_l(w)\Big|^2\,dw\right)^{0,5} \\ &\le \Big(\sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-2lq}\Big)^{0,5}\left(\sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-2l(1-q)}\int\limits_{-(2N+1)\pi}^{(2N+1)\pi} a_l^2(w)\,dw\right)^{0,5} \\ &= \Big(\sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-2lq}\Big)^{0,5}\left(\sum_{l\in\mathbb{N}} 2^{-l(1-2q)}\int\limits_{-2^{-l}(2N+1)\pi}^{2^{-l}(2N+1)\pi} |m'(w)|^2\cdot|\widehat{\varphi}(w)|^2\,dw\right)^{0,5}\end{aligned}$$

$$\le (2(1-2^{-2q})(1-2^{-(1-2q)}))^{-0,5}\left(\int\limits_{-(2N+1)\pi}^{(2N+1)\pi}|m'(w)|^2|\widehat{\varphi}(w)|^2\,dw\right)^{0,5}.$$

Так как m' — 2π-периодическая функция, то

$$\int\limits_{-(2N+1)\pi}^{(2N+1)\pi}|m'(w)|^2|\widehat{\varphi}(w)|^2\,dw$$
$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|m'(w)|^2\sum_{k=-N}^{N}|\widehat{\varphi}(w+2\pi k)|^2\,dw\le\int\limits_{-\pi}^{\pi}|m'(w)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(w+2\pi k)|^2\,dw.$$

Поскольку φ имеет ортонормированные целые сдвиги, то $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(w+2\pi k)|^2=1$ и, следовательно,

$$\left(\int\limits_{-(2N+1)\pi}^{(2N+1)\pi}|\widehat{\varphi}'(w)|^2\,dw\right)^{0,5}\le(2(1-2^{-2q})(1-2^{-(1-2q)}))^{-0,5}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|m'(w)|^2\,dw.$$

Так как последнее неравенство выполняется для любого $N\in\mathbb{N}$, для любого $0<q<0,5$ и $\min\limits_{0<q<0,5}(2(1-2^{-2q})(1-2^{-(1-2q)}))^{-0,5}=(2(1-2^{-0,5})(1-2^{-0,5}))^{-0,5}=2^{0,5}+1$, то

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}}|\widehat{\varphi}'(w)|^2\,dw\right)^{0,5}\le\big(2^{0,5}+1\big)\int\limits_{-\pi}^{\pi}|m'(w)|^2\,dw.$$

Поэтому

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}}t^2|\varphi(t)|^2\,dt\right)^{0,5}\le\big(2\pi\big)^{-0,5}\big(2^{0,5}+1\big)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|m'(w)|^2\,dw\right)^{0,5}.\quad\square$$

Замечание 4. Доказанная лемма является усилением леммы 1.5.9 из [5]. Усиление заключается в замене требования дифференцируемости бесконечного произведения на всем множестве $\mathbb{R}$ требованием дифференцируемости бесконечного произведения на любом ограниченном множестве.

Лемма 5. *Для любого $l\in\mathbb{N}$ имеет место оценка $\Delta^2_{\varphi_l^\perp}\le C_2$, где C_2 — абсолютная константа.*

Доказательство. По известному свойству преобразования Фурье $\hat{f}'(w)=iw\hat{f}(w)$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}}(t-t_{0\varphi_l^\perp})^2\big|\varphi_l^\perp(t)\big|^2\,dt=\int\limits_{\mathbb{R}}t^2\big|\widetilde{\widehat{\varphi_{1,l}^\perp}}(t)\big|^2\,dt=\int\limits_{\mathbb{R}}\big|\big(\widetilde{\widehat{\varphi_{1,l}^\perp}}\big)'(w)\big|^2\,dw$$
$$=2\pi\int\limits_{\mathbb{R}}\big|\big(\widetilde{\varphi_{1,l}^\perp}\big)'(w)\big|^2\,dw=2\pi\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{d}{dw}\left(\frac{1}{2\pi}e^{-it_{0\varphi_l^\perp}w}\widehat{\varphi_l^\perp}(w)\right)\right|^2\,dw$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\big|\big((\widehat{\varphi_l^\perp})'(w)-it_{0\varphi_l^\perp}\widehat{\varphi_l^\perp}(w)\big)e^{-it_{0\varphi_l^\perp}w}\big|^2\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\left|\left(\widehat{\varphi_l^\perp}\right)'(w)\right|^2 + t^2_{0\varphi_l^\perp}\left|\widehat{\varphi_l^\perp}(w)\right|^2\right) dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\left(\widehat{\varphi_l^\perp}\right)'(w)\right|^2 dw + t^2_{0\varphi_l^\perp} = \frac{1}{2\pi}\left\|\left(\widehat{\varphi}_l\right)'\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + t^2_{0\varphi_l^\perp},$$

где $\varphi^\perp_{1,l} = \varphi_l^\perp(t + t_{0\varphi_l^\perp})$.

Оценим $t_{0\varphi_l^\perp}$:

$$|t_{0\varphi_l^\perp}| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} t\left|\varphi_l^\perp(t)\right|^2 dt\right| = \left|\int\limits_{|t|\le 1} + \int\limits_{|t|>1}\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\varphi_l^\perp(t)\right|^2 dt$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} \left|t\varphi_l^\perp(t)\right|^2 dt = 1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\left(\widehat{\varphi_l^\perp}\right)'(w)\right|^2 dw = 1 + \frac{1}{2\pi}\left\|\left(\widehat{\varphi_l^\perp}\right)'\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (t - t_{0\varphi_l^\perp})^2\left|\varphi_l^\perp(t)\right|^2 dt \le \frac{1}{2\pi}\left\|\left(\widehat{\varphi_l^\perp}\right)'\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \left(1 + \frac{1}{2\pi}\left\|\left(\widehat{\varphi_l^\perp}\right)'\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right)^2.$$

Таким образом, для доказательства ограниченности $\Delta_{\varphi_l^\perp}$ достаточно доказать ограниченность по l последовательности $\left\|\left(\widehat{\varphi_l^\perp}\right)'\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Для этого воспользуемся леммой 4 и докажем равномерную по l ограниченность функций $\left(m_l^\perp\right)'(w) = \left(m_l(w)\Phi_l^{0,5}(w)\Phi_l^{-0,5}(2w)\right)'$. Пользуясь (17), получим

$$\left|\left(m_l^\perp\right)'(w)\right| = \left|\left(m_l(w)\Phi_l^{0,5}(w)\Phi_l^{-0,5}(2w)\right)'\right| = \left|\left(m_l'(w)\Phi_l^{0,5}(w)\Phi_l^{0,5}(2w)\right.\right.$$

$$+ m_l(w)\left(\Phi_l^{0,5}(w)\right)'\Phi_l^{0,5}(2w) - m_l(w)\Phi_l^{0,5}(w)\left(\Phi_l^{0,5}(2w)\right)'\right)\Phi_l^{-1}(2w)\Big|$$

$$\le |m_l'(w)|\left|\Phi_l^{0,5}(w)\Phi_l^{-0,5}(2w)\right| + |m_l(w)|\left|\left(\Phi_l^{0,5}(w)\right)'\Phi_l^{-0,5}(2w)\right|$$

$$+|m_l(w)|\left|\left(\Phi_l^{0,5}(2w)\right)'\Phi_l^{0,5}(w)\Phi_l^{-1}(2w)\right| \le B^{0,5}A^{-0,5}|m_l'(w)| + A^{-0,5}\left|m_l(w)\left(\Phi_l^{0,5}(w)\right)'\right|$$

$$+ A^{-1}B^{0,5}\left|m_l(w)\left(\Phi_l^{0,5}(2w)\right)'\right|. \quad (18)$$

Докажем ограниченность по l семейства $|m_l'(w)|$. Из (6), (10), определения $v_{1,l}$ и (11) следует, что

$$m_l'(w) = \left(\cos^{2l}\left(\frac{w}{2}\right)\frac{v_l(w)}{v_l(0)}\right)' = \frac{1}{v_l(0)}\cos^{2l}\left(\frac{w}{2}\right)\left[-l\,\mathrm{tg}\left(\frac{w}{2}\right)v_l(w) + v_l'(w)\right]$$

$$= \frac{1}{v_l(0)}\cos^{2l}\left(\frac{w}{2}\right)\left[-l\,\mathrm{tg}\left(\frac{w}{2}\right)m_l^M(w) - l\,\mathrm{tg}\left(\frac{w}{2}\right)\alpha(w,\,l) + \left(m_l^M\right)'(w) + \gamma(w,\,l)\right]$$

$$= \frac{1}{v_l(0)}\cos^{2l}\left(\frac{w}{2}\right)\left[-l\,\mathrm{tg}\left(\frac{w}{2}\right)m^M(w)\cos^{-2l}\left(\frac{w}{2}\right) - l\,\mathrm{tg}\left(\frac{w}{2}\right)\alpha(w,\,l)\right.$$

$$\left.+l\,\mathrm{tg}\left(\frac{w}{2}\right)m^M(w)\cos^{-2l}\left(\frac{w}{2}\right) + (m^M)'(w)\cos^{-2l}\left(\frac{w}{2}\right) + \gamma(w,\,l)\right]$$

$$= \frac{1}{v_l(0)}\left[-l\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos^{2l-1}\left(\frac{w}{2}\right)\alpha(w,\,l) + (m^M)'(w) + \cos^{2l}\left(\frac{w}{2}\right)\gamma(w,\,l)\right].$$

Из данных равенств имеем $|m_l'(w)| \le \frac{1}{c}(l\alpha(l) + M_1 + \gamma(l))$. Ограниченность m_l' следует из последнего неравенства и свойств (7) и (12). Таким образом,

$$|m_l'(w)| \le M', \quad (19)$$

где M' — абсолютная константа.

Установим ограниченность по l семейства $\left|\left(\Phi_l^{0,5}(w)\right)'\right|$. Так как $\widehat{\varphi}_l$ действительнозначна, имеем

$$\left(\Phi_l^{0,5}\right)'(w)=\left(\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\widehat{\varphi}_l(w+2\pi k))^2\right)^{0,5}\right)'=\Phi_l^{-0,5}(w)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi}_l(w+2\pi k)(\widehat{\varphi}_l)'(w+2\pi k).$$

Тогда для модуля данного выражения получим

$$\left|\left(\Phi_l^{0,5}\right)'(w)\right|\le\left|\Phi_l^{-0,5}(w)\right|\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}_l(w+2\pi k)||(\widehat{\varphi}_l)'(w+2\pi k)|.$$

Из (17) следует, что $\left|\Phi_l^{-0,5}\right|\le A^{-0,5}$. Далее,

$$(\widehat{\varphi}_l)'(w)=\left(\prod_{j=1}^{\infty}m_l\left(\frac{w}{2^j}\right)\right)'=\sum_{j_0=1}^{\infty}2^{-j_0}\prod_{j=1,\,j\ne j_0}^{\infty}m_l\left(\frac{w}{2^j}\right)m_l'\Big(\frac{w}{2_0^j}\Big).$$

Так как $|m_l'|\le M'$, то

$$|(\widehat{\varphi}_l)'(w)|\le M'\sum_{j_0=1}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{j_0-1}\left|m_l\left(\frac{w}{2^j}\right)\right|\prod\limits_{j=j_0+1}^{\infty}\left|m_l\left(\frac{w}{2^j}\right)\right|}{2^{j_0}}\le M'\sum_{j_0=1}^{\infty}\frac{(1+\alpha(l))^{j_0-1}}{2^{j_0}}$$
$$\times\left|\widehat{\varphi}_l\left(\frac{w}{2^{j_0}}\right)\right|\le\frac{M'\,(1+\varepsilon(l))}{(1+\alpha(l))}\sum_{j_0=1}^{\infty}\left(\frac{1+\alpha(l)}{2}\right)^{j_0}=\frac{M'\,(1+\varepsilon(l))}{(1-\alpha(l))}.$$

Последнее равенство получено с использованием формулы $\sum\limits_{j=1}^{\infty}q^j=q/(1-q)$ при $|q|<1$. В данном случае $q=0,5(1+\alpha(l))$, требование $|q|<1$ выполняется, так как $\alpha(l)\to0$ при $l\to\infty$. Два последних неравенства вытекают из следствия 2, оценки (12) и свойств функций m^M и $\widehat{\varphi^M}$: $0\le m^M\le1$ и $0\le\widehat{\varphi^M}\le1$. Из (16) при том же определении p следует, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}_l(w+2\pi k)|=\sum_{|k|\le p}+\sum_{|k|>p}\le e^{2w_0}\sum_{|k|>p}|w+2\pi k|^{-l+2\log_2\frac{2}{c}}$$
$$+(2p+1)(1+\varepsilon(l))\le(2p+1)(1+\varepsilon(l))+2e^{2w_0}(2\pi)^{-l+2\log_2\frac{2}{c}}\zeta(l-2\log_2(2/c)).$$

Таким образом,

$$\left|\left(\Phi_l^{0,5}(w)\right)'\right|\le\frac{M'(1+\varepsilon(l))}{A^{0,5}(1-\alpha(l))}\left[(2p+1)(1+\varepsilon(l))+\frac{2e^{2w_0}\zeta\left(l-2\log_2\frac{2}{c}\right)}{(2\pi)^{l-2\log_2\frac{2}{c}}}\right].\qquad(20)$$

Так как в ходе доказательства была установлена равномерная по w сходимость ряда $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}((\widehat{\varphi}_l(w+2\pi k))^2)'$, то тем самым обеспечена законность почленного дифференцирования ряда $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\widehat{\varphi}_l(w+2\pi k))^2$.

Установим законность почленного дифференцирования бесконечного произведения, определяющего функцию $\widehat{\varphi_l^{\perp}}$, на произвольном ограниченном множестве. Для этого достаточно (см., например, [7, с. 171]) проверить равномерную по w сходимость последовательности $\left(\prod\limits_{j=1}^{n}m_l^{\perp}\left(\frac{w}{2^j}\right)\right)'$.

Докажем равномерную по w из ограниченного множества фундаментальность данной последовательности. Пусть $n > m$, $|w| < D$. Имеем

$$\left|\left(\prod_{j=1}^{n} m_l^{\perp}\left(\frac{w}{2^j}\right)\right)' - \left(\prod_{j=1}^{m} m_l^{\perp}\left(\frac{w}{2^j}\right)\right)'\right|$$
$$\leq \left|\sum_{j_0=1}^{m} 2^{-j_0}\left(\prod_{j=1,\, j\neq j_0}^{n} m_l^{\perp}\left(\frac{w}{2^j}\right)(m_l^{\perp})'\left(\frac{w}{2^{j_0}}\right) - \prod_{j=1, j\neq j_0}^{m} m_l^{\perp}\left(\frac{w}{2^j}\right)(m_l^{\perp})'\left(\frac{w}{2^{j_0}}\right)\right)\right|$$
$$+\left|\sum_{j_0=m+1}^{n} 2^{-j_0}\prod_{j=1, j\neq j_0}^{n} m_l^{\perp}\left(\frac{w}{2^j}\right)(m_l^{\perp})'\left(\frac{w}{2^{j_0}}\right)\right|.$$

Обозначим первое и второе слагаемые последней суммы $F_1(w)$ и $F_2(w)$ соответственно. Оценим каждое из них. Равномерная ограниченность $\left|\left(m_l^{\perp}\right)'(w)\right|$ по l и w доказана выше. Пусть $K_0 := \sup\limits_{w\in\mathbb{R}, l\in\mathbb{N}}\left|\left(m_l^{\perp}\right)'(w)\right|$. Неравенство $\left|m_l^{\perp}(w)\right| \leq 1$ следует из свойств маски. Тогда для второго слагаемого получим $F_2(w) \leq K_0 \sum\limits_{j_0=m+1}^{n} 2^{-j_0} \leq K_0 2^{-m}$. Оценим первое слагаемое:

$$F_1(w) \leq K_0 \sum_{j_0=1}^{m} 2^{-j_0}\left|\prod_{j=1,\, j\neq j_0}^{n} m_l^{\perp}\left(\frac{w}{2^j}\right) - \prod_{j=1,\, j\neq j_0}^{m} m_l^{\perp}\left(\frac{w}{2^j}\right)\right|$$
$$\leq K_0 \sum_{j_0=1}^{m} 2^{-j_0}\left|\prod_{j=m+1}^{n} m_l^{\perp}\left(\frac{w}{2^j}\right) - 1\right|.$$

Последнее неравенство следует из свойства маски $\left|m_l^{\perp}\right| \leq 1$. Пусть m выбрано пока так, чтобы $\frac{|w|}{2^m} < w_0$. Обозначим $w' := \frac{w}{2^m}$. Тогда

$$\left|\prod_{j=m+1}^{n} m_l^{\perp}\left(\frac{w}{2^j}\right) - 1\right| = \left|\prod_{j=1}^{n-m} m_l^{\perp}\left(\frac{w'}{2^j}\right) - 1\right| = \left|\frac{\prod\limits_{j=1}^{\infty} m_l^{\perp}\left(\frac{w'}{2^j}\right)}{\prod\limits_{j=n-m+1}^{\infty} m_l^{\perp}\left(\frac{w'}{2^j}\right)} - 1\right|$$
$$= \left|\frac{\widehat{\varphi_l^{\perp}}(w')}{\widehat{\varphi_l^{\perp}}\left(\frac{w'}{2^{n-m}}\right)} - 1\right| = \left|\frac{\widehat{\varphi}_l(w')\Phi_l^{0,5}\left(\frac{w'}{2^{n-m}}\right)}{\widehat{\varphi}_l\left(\frac{w'}{2^{n-m}}\right)\Phi_l^{0,5}(w')} - 1\right|$$
$$= \left|\frac{\widehat{\varphi}_l(w')\Phi_l^{0,5}\left(\frac{w'}{2^{n-m}}\right) - \widehat{\varphi}_l\left(\frac{w'}{2^{n-m}}\right)\Phi_l^{0,5}(w')}{\widehat{\varphi}_l\left(\frac{w'}{2^{n-m}}\right)\Phi_l^{0,5}(w')}\right|$$
$$\leq 2A^{-0,5}\left|\widehat{\varphi}_l(w')\Phi_l^{0,5}\left(\frac{w'}{2^{n-m}}\right) - \widehat{\varphi}_l\left(\frac{w'}{2^{n-m}}\right)\Phi_l^{0,5}(w')\right|.$$

Так как $\widehat{\varphi}_l$ и $\Phi_l^{0,5}$ непрерывны, а $\widehat{\varphi}_l(0) = \Phi_l^{0,5}(0) = 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что при $|w'| < \delta$ выполняется $|\widehat{\varphi}_l(w) - 1| < \frac{1}{8}A^{0,5}B^{-0,5}\varepsilon$, $\left|\Phi_l^{0,5}(w) - 1\right| < \frac{1}{16}A^{0,5}\varepsilon$. Выберем m так, чтобы $\frac{|w|}{2^m} < \min\{\delta, w_0\}$, тогда

$$2A^{-0,5}\left|\widehat{\varphi}_l(w')\Phi_l^{0,5}\left(\frac{w'}{2^{n-m}}\right) - \widehat{\varphi}_l\left(\frac{w'}{2^{n-m}}\right)\Phi_l^{0,5}(w')\right| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, $F_1(w) \leq \varepsilon \sum\limits_{j_0=1}^{m} 2^{-j_0} \leq \varepsilon$.

Таким образом, почленная дифференцируемость бесконечного произведения, определяющего функцию $\widehat{\varphi_l^{\perp}}$, на произвольном ограниченном множестве установлена.

На основании неравенства (18) с помощью оценок (19) и (20) получаем ограниченность по l семейства функций $\left(m_l^{\perp}\right)'(w)$, а следовательно, и ограниченность по l временны́х радиусов констант неопределенности построенного семейства. $\square$

Автор выражает благодарность профессору И. Я. Новикову за постановку данной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chui C. K., Wang J.* High-order orthonormal scaling functions and wavelets give poor time-frequency localization // J. Fourier Anal. Appl. 1996. V. 2, N 5. P. 415–426.
2. *Novikov I. Ya.* Modified Daubechies wavelets preserving localization with growth of smoothness // East J. Approx. 1995. V. 1, N 3. P. 314–348.
3. *Новиков И. Я.* Константы неопределенности для модифицированных всплесков Добеши // Изв. Тульск. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4, № 1. С. 107–111.
4. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: АЦФ, 1999.
5. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс интегрального и дифференциального исчисления. М.: Физматгиз, 1959. Т. 2.
7. *Рудин У.* Основы функционального анализа. М.: Мир, 1976.

Статья поступила 19 января 2007 г., окончательный вариант — 1 октября 2007 г.

Лебедева Елена Александровна
Курский гос. университет, ул. Радищева, 33, Курск 305000, ГСП
`ealebedeva2004@mail.ru`