Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 513.88

СИЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ОБОБЩЕННЫЙ ИНВЕРС

Д. Дюрчич, А. Торгашев, С. Ешич

Аннотация. Обсуждается связь между сильным асимптотическим отношением и обобщенной обратной функцией в классе $\mathscr{A}$ всех неубывающих неограниченных функций, определенных и положительных на промежутке $[a, +\infty)$ $(a > 0)$. Охарактеризован класс функций $IRV \cap \mathscr{A}$, где IRV — класс всех $\mathscr{O}$-правильно изменяемых функций (в смысле Караматы), имеющих непрерывную индексную функцию.

Ключевые слова: правильная изменяемость, обобщенный инверс, асимптотическая эквивалентность.

1. Введение

Функцию $f : [a, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ $(a > 0)$ называют *$\mathscr{O}$-правильно изменяемой по Карамате*, если она измерима и

$$\underline{k}_f(\lambda) := \varliminf_{x \to +\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} > 0 \quad (\lambda > 0). \tag{1}$$

Условие (1) эквивалентно условию

$$\bar{k}_f(\lambda) := \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} < +\infty \quad (\lambda > 0). \tag{2}$$

Функцию $\bar{k}_f(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ называют *индексной функцией* для f и $\underline{k}_f(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ — *вспомогательной индексной функцией* для f. Через ORV обозначают класс всех $\mathscr{O}$-правильно изменяемых функций, определенных на некотором промежутке $[a, +\infty)$.

Класс ORV является важным объектом при качественном анализе расходящихся процессов (см., например, [1, 2]).

Для $\mathscr{O}$-правильно изменяемой функции f будем говорить, что она *принадлежит классу IRV*, если

$$\varlimsup_{\lambda \to 1} \bar{k}_f(\lambda) = 1. \tag{3}$$

Известно, что для $f \in IRV$ соответствующие функции $\bar{k}_f$ и $\underline{k}_f$ непрерывны при $\lambda > 0$ (см. [3, 4]).

Непрерывные функции класса IRV изучены в [5, 6], а непрерывные неубывающие неограниченные функции, принадлежащие тому же классу, — в [7, 8], где класс таких функций был обозначен через K_c.

This paper is supported by the Ministry of Science of Republic of Serbia (Grant No. 144031).

Всюду далее *неубывающей* будем называть функцию f, определенную на промежутке и такую, что $f(x_1) \leq f(x_2)$ при $x_1 < x_2$, и *возрастающей* — функцию f, определенную на промежутке и такую, что $f(x_1) < f(x_2)$ при $x_1 < x_2$.

Тауберово условие, порождаемое условием (3), является важным условием сходимости в тауберовых теоремах (см. [9, 10]) и вообще в асимптотическом анализе (см. [11]).

Функцию $f \in IRV$ будем называть *правильно изменяемой по Карамате* (и говорить, что она *принадлежит классу* RV), если

$$\bar{k}_f(\lambda) = \lambda^\rho \quad (\lambda > 0) \tag{4}$$

для некоторого $\rho \in R$.

Для любой $f \in RV$ имеем $\underline{k}_f(\lambda) = \bar{k}(\lambda) = \lambda^\rho$ $(\lambda > 0)$, где ρ — общий индекс изменяемости. Класс RV является основным объектом теории Караматы правильной изменяемости (см. [12]). Как известно, $RV \subsetneq IRV \subsetneq ORV$.

Для измеримой функции $f : [a, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ $(a > 0)$ будем говорить, что она *принадлежит классу* ARV, если

$$\underline{k}_f(\lambda) > 1 \quad (\lambda > 1). \tag{5}$$

Условие (5) эквивалентно существованию такой функции $c(\lambda) > 1$ $(\lambda > 1)$, что $f(\lambda x) \geq c(\lambda) f(x)$ для $x \geq x_0(\lambda)$.

Класс ARV известен также как основной объект изучения в работах [7, 13]. Его пересечение с классом K_c дает класс K_c^* (см. [7]). Класс ARV содержит в качестве собственных подклассов классы всех правильно изменяемых функций с индексом $\rho > 0$ и класс всех быстро изменяемых функций по де Хаану (см. [14]) с индексом $+\infty$, но не включает ни одной функции класса SV (функций, медленно изменяемых по Карамате [2]).

Введем обозначение $\mathscr{A} = \{f : [a, +\infty) \mapsto (0, +\infty) \mid f$ неубывающая неограниченная$\}$. Для $f \in \mathscr{A}$ обозначим $[f] = \{g \in \mathscr{A} \mid f(x) \sim g(x), x \to +\infty\}$, где $f(x) \sim g(x)$ $(x \to +\infty)$ — сильная асимптотическая эквивалентность, определяемая условием

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Кроме того, если $f \in \mathscr{A}$, то $f^i(x) = \inf\{y \geq a \mid f(y) > x\}$ $(x \geq f(a))$ называют *обобщенным инверсом функции* f.

В классе непрерывных возрастающих функций из $\mathscr{A}$ имеем $f^i(x) = f^{-1}(x)$ $(x \geq f(a))$. Если $f \in \mathscr{A}$, то $f^i \in \mathscr{A}$. Если $g \in \mathscr{A}$ непрерывна справа, то существует $f \in \mathscr{A}$ такая, что $g = f^i$ $(f(x) = g^i(x), x \geq g(a))$.

Следующее утверждение является модификацией результатов из [15] (см. также [2, с. 190, 14(ii), (iii)]).

Теорема A. *Пусть* $f, g \in \mathscr{A}$ *и* f — *правильно изменяемая функция индекса* $\rho > 0$.

(a) *Если* $g \in [f]$, *то* $g^i \in [f^i]$.

(b) *Если* $g^i \in [f^i]$, *то* $g \in [f]$.

2. Основные результаты

В [13] доказано, что в классе всех непрерывных возрастающих функций класса $\mathscr{A}$ утверждения (a) и (б) теоремы A верны тогда и только тогда, когда рассматриваемая функция f принадлежит K_c^*. Кроме того, в [13] приведены следующие две теоремы и наброски их доказательств. Здесь мы докажем эти теоремы подробно.

Теорема 1. *Пусть $f, g \in \mathscr{A}$ и $f^i \in IRV$. Если $g \in [f]$, то $g^i \in [f^i]$.*

Доказательство. Пусть $f, g \in \mathscr{A}$ и $f^i \in IRV$, $g \in [f]$. Тогда для любого $\varepsilon > 1$ имеем $1/\varepsilon \leq g(x)/f(x) \leq \varepsilon$ при $x \geq x_0(\varepsilon)$. Отсюда $g(x) \leq \varepsilon f(x)$. Следовательно, $g^i(x) \geq f^i(x/\varepsilon)$ для достаточно большого x, так что $g^i(x)/f^i(x) \geq f^i(x/\varepsilon)/f^i(x)$. Кроме того, для $x \geq x_0(\varepsilon)$ имеем $g(x) \geq f(x)/\varepsilon$, поэтому $g^i(x) \leq f^i(\varepsilon x)$ для достаточно большого x, тем самым $g^i(x)/f^i(x) \leq f^i(\varepsilon x)/f^i(x)$. Поэтому

$$\bar{k}_{f^i}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{g^i(x)}{f^i(x)} \leq \bar{k}_{f^i}(\varepsilon), \quad \underline{k}_{f^i}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq \varliminf_{x\to+\infty} \frac{g^i(x)}{f^i(x)} \leq \underline{k}_{f^i}(\varepsilon).$$

Так как $f^i \in IRV$, переходя к пределу при $\varepsilon \to 1+$ в последних двух соотношениях, получим

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{g^i(x)}{f^i(x)} = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{g^i(x)}{f^i(x)} = 1,$$

так что $g^i \in [f^i]$. $\square$

В общем случае обратное к утверждению теоремы 1 неверно.

Пример. Пусть $f(x) = e^x$ $(x \geq 1)$ и $g(x) = \frac{1}{2}e^x$ $(x \geq 1)$. Тогда $g \notin [f]$ и $g^i \in [f^i]$, поэтому $f^i(x) = \ln x$ $(x \geq e)$ и $g^i(x) = \ln(2x)$ $(x \geq e/2)$.

Теорема 2. *Пусть $f, g \in \mathscr{A}$. Если $g^i \in [f^i]$ для $g \in [f]$, то $f^i, g^i \in IRV$.*

Доказательство основано на адаптированной идее доказательства аналогичной теоремы из [13].

Пусть $f \in \mathscr{A}$ и для любой $g \in \mathscr{A}$ из $g \in [f]$ следует, что $g^i \in [f^i]$. Рассмотрим функцию $g_1(x) = (1 - 1/x)f(x)$ при $x \geq a > 1$. Тогда $g_1 \in [f]$ и g_1 — возрастающая функция из $\mathscr{A}$. Кроме того, $g_1^i \in [f^i]$ и g_1^i — непрерывная функция из $\mathscr{A}$. Отсюда для любой возрастающей функции $g \in \mathscr{A}$ такой, что $g \in [g_1]$, имеем $g^i \in [g_1^i]$. Тем самым

$$1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{g_1^i(x)}{g^i(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g_1^i(g(x))}{g^i(g(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g_1^i(g(x))}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g_1^i(g(x))}{g_1^i(g_1(x))}.$$

Далее, пусть $\alpha(x)$ $(x \geq x_0 > 0)$ для некоторого настолько большого x_0, что $x\alpha(x)$ лежит в областях определения функций g^i для $x \geq x_0$, есть непрерывная функция, для которой $\alpha(x) \geq 1$ при $x \geq x_0$ и $\alpha(x) \to 1+$ $(x \to +\infty)$. Рассмотрим функцию $r(x) = \max\limits_{x_0 \leq t \leq x} h(t)$ $(x \geq x_0)$, где $h(x) = \alpha(x)x$ для $x \geq x_0$. Эта функция непрерывная, неубывающая и $r(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Кроме того, $r(x) \geq \alpha(x)x$ при $x \geq x_0$. Докажем, что $r(x) \sim x$ при $x \to +\infty$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Найдется $x_1 = x_1(\varepsilon) \geq x_0$ такое, что $1 \leq h(x)/x < 1 + \varepsilon$ для всех $x \geq x_1$, и существует $x_2 = x_2(\varepsilon) \geq x_1$ такое, что $h(x) \geq \max\limits_{x_0 \leq u \leq x_1} h(u)$ для любого $x \geq x_2$. Отсюда для каждого $x \geq x_2$ существует функция $v(x)$ со значениями из промежутка $[x_1, x]$ такая, что

$$1 \leq \frac{r(x)}{x} = \frac{1}{x} \max_{x_0 \leq u \leq x} h(u) = \frac{1}{x} \max_{x_1 \leq u \leq x} h(u) = \frac{1}{x} h(v(x)) \leq \frac{h(v(x))}{v(x)} < 1 + \varepsilon.$$

Отсюда получаем, что $r(x) \sim x$ при $x \to +\infty$. Положим $r_1(x) = 1 - 1/x + r(x)$ $(x \geq x_0 > 1)$. Тогда $r_1(x)$ — возрастающая непрерывная функция из $\mathscr{A}$ такая, что $r_1(x) \sim r(x) \sim x$ при $x \to +\infty$. Поэтому

$$1 \leq \varliminf_{x\to+\infty} \frac{g_1^i(\alpha(x)x)}{g_1^i(x)} \leq \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{g_1^i(\alpha(x)x)}{g_1^i(x)} \leq \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{g_1^i(r_1(x))}{g_1^i(x)}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Найдется $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\frac{g_1^i(r_1(g_1(t)))}{g_1^i(g_1(t))} \le 1 + \varepsilon$$

для любого $t \ge t_0$. Рассмотрим множество $A = \{x > 0 \mid x \ge g_1(t_0)\}$.

(1^0) Предположим сначала, что для рассматриваемого $x \in A$ найдется $t_x \ge t_0$ такое, что $x = g_1(t_x)$. Тогда для такого x имеем

$$\frac{g_1^i(r_1(x))}{g_1^i(x)} = \frac{g_1^i(r_1(g_1(t_x)))}{g_1^i(g_1(t_x))} \le 1 + \varepsilon.$$

(2^0) Пусть теперь для рассматриваемого $x \in A$ не существует $t \ge t_0$ такого, что $x = g_1(t)$. Положим $t_x = \inf\{t \ge t_0 \mid g_1(t) > x\}$. Рассмотрим два подслучая.

(2.1^0) Допустим, что $g_1(t_x) > x$. Тогда $g_1^i(x) = g_1^i(g_1(t_x))$. Кроме того, так как функции g_1^i и r_1 монотонны, имеем $g_1^i(r_1(x)) \le g_1^i(r_1(g_1(t_x)))$, откуда

$$\frac{g_1^i(r_1(x))}{g_1^i(x)} \le \frac{g_1^i(r_1(g_1(t_x)))}{g_1^i(g_1(t_x))} \le 1 + \varepsilon.$$

(2.2^0) Пусть, наконец, $g_1(t_x) < x$. Тогда $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \in (0, 1)$. Из свойств функции g_1^i вытекает, что

$$g_1^i(x) = g_1^i(\lim_{t \to t_x+} g_1(t)) = \lim_{t \to t_x+} g_1^i(g_1(t)).$$

Выберем $t_{\varepsilon_1,x} > t_x$ такое, что $g_1^i(x) \ge g_1^i(g_1(t_{\varepsilon_1,x})) - \varepsilon_1$. Ввиду свойств g_1^i и r_1 имеем

$$g_1^i(r_1(x)) \le g_1^i(r_1(\lim_{t \to t_x+} g_1(t))) \le g_1^i(r_1(g_1(t_{\varepsilon_1,x}))),$$

следовательно,

$$\frac{g_1^i(r_1(x))}{g_1^i(x)} \le \frac{g_1^i(r_1(g_1(t_{\varepsilon_1,x})))}{g_1^i(g_1(t_{\varepsilon_1,x})) - \varepsilon_1}.$$

Так как для всех достаточно больших $t \ge t_1(\varepsilon_1(\varepsilon)) = t_1 \ge t_0$ будет

$$\frac{g_1^i(r_1(g_1(t)))}{g_1^i(g_1(t))} \le 1 + \varepsilon_1,$$

находим, что для любого $x \in B = \{x > 0 \mid x > g_1(t_1)\}$

$$\frac{g_1^i(r_1(x))}{g_1^i(x)} \le \frac{1 + \varepsilon_1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{g_1^i(g_1(t_{\varepsilon_1,x}))}} \le \frac{1 + \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} = 1 + \varepsilon$$

при $g_1(t_x) < x$, ибо $g_1^i(g_1(t)) \ge 1$ для любого достаточно большого $t \ge t_1$.

Итак, $\frac{g_1^i(r_1(x))}{g_1^i(x)} \le 1 + \varepsilon$ для любого $x \in B$, поэтому

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g_1^i(\alpha(x)x)}{g_1^i(x)} = 1.$$

Определим $\tilde{g}_1 : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$, полагая $\tilde{g}_1(0) = 0$, $\tilde{g}_1(x) = g_1^i(x)$ для $x \ge g_1(a)$ и считая ее линейной на $[0, g_1(a)]$. Тогда $\tilde{g}_1$ — φ-функция класса K_c (см. [7]). Отсюда $g_1^i \in IRV$ (см. [4]), следовательно, $f^i \in IRV$, поэтому $g_1^i \in [f^i]$. Так как для рассматриваемой f при любой $g \in \mathscr{A}$ имеем $g^i \in [f^i]$ при условии, что $g \in [f]$, делаем вывод, что $g^i \in IRV$, так что $[f^i] \subseteq IRV$. $\square$

Следующие теоремы устанавливают взаимосвязи между классами IRV и ARV.

Теорема 3. *Пусть $f \in \mathscr{A}$. Тогда $f \in ARV$ в том и только в том случае, если $f^i \in IRV$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{A} \cap ARV$. Тогда для любых $x \geq x_0 = x_0(\lambda) > 0$ и $\lambda > 1$ имеем $f(\lambda x) \geq c(\lambda) f(x)$, где $c(\lambda)$ $(\lambda > 1)$ — функция, зависящая от f, такая, что $c(\lambda) > 1$ $(\lambda > 1)$. Тогда для $\lambda > 1$ и рассматриваемого x будет $f(\lambda x)/c(\lambda) \geq f(x)$, а следовательно, $f^i(c(\lambda)x)/\lambda \leq f^i(x)$. Поэтому

$$\bar{k}_{f^i}(c(\lambda)) = \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{f^i(c(\lambda)x)}{f^i(x)} \leq \lambda \quad \text{для любого } \lambda > 1.$$

Так как f^i неубывающая, соответствующая ей индексная функция $\bar{k}_{f^i}(\tilde{\lambda})$ $(\tilde{\lambda} > 0)$ также неубывающая в $\overline{R}$. Поскольку $\bar{k}_{f^i}(\tilde{\lambda})$ определена при $\tilde{\lambda} \in (0, c(\lambda))$ и $c(\lambda) > 1$, она определена и при $\tilde{\lambda} > 0$, так что $f^i \in ORV$. Следовательно,

$$1 \leq \varliminf_{\lambda \to 1+} \bar{k}_{f^i}(c(\lambda)) \leq \varlimsup_{\lambda \to 1+} \bar{k}_{f^i}(c(\lambda)) \leq 1,$$

откуда $\lim_{\lambda \to 1+} \bar{k}_{f^i}(c(\lambda)) = 1$. Обозначая $A = \varliminf_{\lambda \to 1+} c(\lambda)$, имеем $A \geq 1$. Найдется последовательность (λ_n) такая, что $\lambda_n > 1$ $(n \in \mathbb{N})$, $\lambda_n \to 1+$ при $n \to \infty$ и $\lim_{n \to \infty} c(\lambda_n) = A$. Положим $c_n = c(\lambda_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда $\lim_{n \to \infty} \bar{k}_{f^i}(c_n) = 1$. Если $A = 1$, то $\lim_{\lambda \to 1+} \bar{k}_{f^i}(\lambda) = 1$, поэтому $\bar{k}_{f^i}$ неубывающая. Значит, $f^i \in IRV$. Если $A > 1$, то аналогично $\lim_{\lambda \to A-} \bar{k}_{f^i}(\lambda) = 1$. Отсюда если $\lambda \in [1, (A+1)/2]$, то $\bar{k}_{f^i}(\lambda) = 1$ и согласно [2] получим $f^i \in SV \subsetneq IRV$.

Обратно, пусть $f \in \mathscr{A}$ и $f^i \in IRV$. Тогда ввиду [4] имеем

$$\lim_{\substack{x \to +\infty, \\ \lambda \to 1}} \frac{f^i(\lambda x)}{f^i(x)} = 1.$$

Отсюда для любого $\varepsilon > 1$ найдутся $x_0 = x_0(\varepsilon) > 0$ и $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ такие, что

$$\frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{f^i(\lambda x)}{f^i(x)} \leq \varepsilon$$

для любых $x \geq x_0$ и $\lambda \in [1 - \delta_0, 1 + \delta_0]$. Поэтому для таких λ и x будет $f^i(\lambda x) \leq \varepsilon f^i(x)$, т. е. $f^i(\lambda x)/\varepsilon \leq f^i(x)$. Для этих λ и x имеем $(f(\varepsilon x)/\lambda)^i \leq f^i(x)$, так что $((f(\varepsilon x)/\lambda)^i)^i \geq (f^i(x))^i$. Так как $h(x) \leq ((h(x))^i)^i \leq h(\beta x)$ $(x \geq a)$ для любых $h \in \mathscr{A}$ и $\beta > 1$, находим, что $f(x) \leq f(\varepsilon^2 x)/\lambda$, а значит, $f(\varepsilon^2 x) \geq \lambda f(x)$. Итак, получили, что $f(\varepsilon^2 x) \geq (1 + \delta_0(\varepsilon)) f(x)$ при $x \geq x_0 = x_0(\varepsilon)$.

Если $\alpha > 1$, то возьмем $\varepsilon = \sqrt{\alpha}$. Отсюда $f(\alpha x) \geq (1 + \delta_0(\sqrt{\alpha})) f(x)$ при $x \geq x_0(\sqrt{\alpha}) = x_1(\alpha) > 0$. Но это и означает, что $f \in ARV$. $\square$

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *Пусть $f \in \mathscr{A}$. Тогда функции f, f^i обе принадлежат IRV в том и только в том случае, если $f \in IRV \cap ARV$.*

Частный случай следствия 1 наблюдается в [7].

Теорема 4. *Пусть $f \in \mathscr{A}$. Тогда $f \in IRV$ в том и только в том случае, если $f^i \in ARV$.*

Доказательство. Пусть сначала $f \in \mathscr{A} \cap IRV$. Тогда

$$\lim_{\substack{x \to +\infty, \\ \lambda \to 1}} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = 1.$$

Отсюда для любого $\varepsilon > 1$ найдутся $x_0 = x_0(\varepsilon) > 0$ и $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ такие, что $\frac{1}{\varepsilon} \le \frac{f(\lambda x)}{f(x)} \le \varepsilon$ для любых $x \ge x_0$ и $\lambda \in [1-\delta_0, 1+\delta_0]$. Для таких λ и x имеем $f(\lambda x) \le \varepsilon f(x)$, так что $f(\lambda x)/\varepsilon \le f(x)$. Для этих λ и x будет $f^i(\varepsilon x)/\lambda \ge f^i(x)$, а значит, $f^i(\varepsilon x) \ge \lambda f^i(x)$. Следовательно, $f^i(\varepsilon x) \ge (1+\delta_0(\varepsilon))f^i(x)$ при $x \ge x_0 = x_0(\varepsilon)$, тем самым $f^i \in ARV$.

Обратно, предположим, что $f \in \mathscr{A}$ и $f^i \in ARV$. Тогда $f^i(\lambda x) \ge c(\lambda) f^i(x)$ для любых $\lambda > 1$ и $x \ge x_0 = x_0(\lambda) > 0$, где $c(\lambda) > 1$ $(\lambda > 1)$ зависит от f^i (точнее, от f). Для таких λ и x имеем $f^i(\lambda x)/c(\lambda) \ge f^i(x)$, откуда $(f(c(\lambda)x)/\lambda)^i \ge f^i(x)$. Как и во второй части доказательства теоремы 3, для этих λ и x находим, что $f(c(\lambda)x)/\lambda \le f(\sqrt{c(\lambda)}x)$, тем самым $f(c(\lambda)x)/f(\sqrt{c(\lambda)}x) \le \lambda$. Значит, для любого $\lambda > 1$ получаем $f(\sqrt{c(\lambda)}p)/f(p) \le \lambda$ при каждом $p \ge \sqrt{c(\lambda)}x_0(\lambda) = p_0(\lambda)$, так что $\bar{k}_f(\sqrt{c(\lambda)}) \le \lambda$ для любого $\lambda > 1$. Следовательно,

$$1 \le \varliminf_{\lambda \to 1+} \bar{k}_f(\sqrt{c(\lambda)}) \le \varlimsup_{\lambda \to 1+} \bar{k}_f(\sqrt{c(\lambda)}) \le 1,$$

поэтому $\lim\limits_{\lambda \to 1+} \bar{k}_f(\sqrt{c(\lambda)}) = 1$. Обозначив $A = \varliminf\limits_{\lambda \to 1+} \sqrt{c(\lambda)}$, будем иметь $A \ge 1$. Значит, найдется последовательность (λ_n), $\lambda_n > 1$ $(n \in \mathbb{N})$ такая, что $\lambda_n \to 1+$ при $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{c(\lambda_n)} = A$. Обозначая $c_n = \sqrt{c(\lambda_n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{k}_f(c_n) = 1$. Если $A = 1$, то ввиду того, что $\bar{k}_f$ неубывающая, имеем $\lim\limits_{\lambda\to 1+} \bar{k}_f(\lambda) = 1$. Следовательно, $f \in IRV$. Если $A > 1$, то аналогично $\lim\limits_{\lambda \to A-} \bar{k}_f(\lambda) = 1$. Кроме того, если $\lambda \in [1, (A+1)/2]$, то $\bar{k}_f(\lambda) = 1$, так что $f \in SV \subsetneq IRV$. $\square$

Теорема 5. *Если $f \in \mathscr{A} \cap IRV$, то $f(x) \sim (f^i(x))^i$ $(x \to +\infty)$.*

Доказательство. Предположим, что $f \in \mathscr{A} \cap IRV$. Тогда $f(x) \le (f^i(x))^i \le f(\beta x)$ для любых $x \ge a$ и $\beta > 1$. Следовательно, для таких β и x будет $1 \le (f^i(x))^i/f(x) \le f(\beta x)/f(x)$, откуда

$$1 \le \varliminf_{x\to+\infty} \frac{(f^i(x))^i}{f(x)} \le \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{(f^i(x))^i}{f(x)} \le \bar{k}_f(\beta).$$

Так как $\lim\limits_{\beta\to 1+} \bar{k}_f(\beta) = 1$, в итоге получим $(f^i(x))^i \sim f(x)$ при $x \to +\infty$. $\square$

Отметим, что обращение теоремы 5, вообще говоря, неверно. А именно, для любой непрерывной справа функции $f \in \mathscr{A}$ имеем $f(x) = (f^i(x))^i$ $(x \ge a)$, но некоторые из таких функций не принадлежат классу IRV (взять, к примеру, $f(x) = e^x$, $x \ge 1$).

Теорема 6. *Пусть $f \in \mathscr{A} \cap IRV$ и $g \in \mathscr{A}$. Тогда $f(x) \sim g(x)$, $x \to +\infty$, в том и только в том случае, если $(f^i(x))^i \sim (g^i(x))^i$, $x \to +\infty$.*

Доказательство. Допустим, что $f \in \mathscr{A} \cap IRV$ и $g \in \mathscr{A}$.

Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to +\infty$, то $g \in IRV$, и по теореме 5 получим $f(x) \sim (f^i(x))^i$, $x \to +\infty$, и $g(x) \sim (g^i(x))^i$, $x \to +\infty$. Поэтому $(f^i(x))^i \sim (g^i(x))^i$, $x \to +\infty$.

Обратно, если $(f^i(x))^i \sim (g^i(x))^i$, $x \to +\infty$, то по теореме 5 $f(x) \sim (g^i(x))^i$, $x \to +\infty$, ибо $f(x) \sim (f^i(x))^i$, $x \to +\infty$. Тем самым $(g^i(x))^i$, $x \ge a$, принадлежит классу $IRV \cap \mathscr{A}$. По теореме 3 в таком случае $g^i \in ARV$, а по теореме 4 $g \in IRV$. Отсюда по теореме 5 $g(x) \sim (g^i(x))^i$, $x \to +\infty$, так что $f(x) \sim g(x)$, $x \to +\infty$. $\square$

Следующая теорема существенно обобщает теорему А. В ней мы опишем наибольший из классов, включающих функцию f, для которых выполнено заключение теоремы.

Теорема 7. (a) *Пусть* $f, g \in \mathscr{A}$ *и* $f \in ARV \cap IRV$. *Тогда* $g \in [f]$ *в том и только в том случае, если* $g^i \in [f^i]$.

(b) *Пусть* $f \in \mathscr{A}$ *и* $f \notin IRV \cap ARV$. *Тогда найдется* $g \in \mathscr{A}$ *такая, что* $g \in [f]$ *и* $g^i \notin [f^i]$, *или такая, что* $g \notin [f]$ *и* $g^i \in [f^i]$.

Доказательство. (a) Допустим, что $f, g \in \mathscr{A}$ и $f \in ARV \cap IRV$.

Предположим сначала, что $g \in [f]$. Так как $f \in ARV$, по теореме 3 можно найти $f^i \in IRV$, которая по теореме 1 такова, что $g^i \in [f^i]$.

Обратно, пусть $g^i \in [f^i]$. Поскольку $f \in IRV$, по теореме 5 $f(x) \sim (f^i(x))^i$, $x \to +\infty$, так что $(f^i(x))^i$ $(x \geq a)$ принадлежит $IRV \cap \mathscr{A}$. Отсюда по теореме 1 получаем, что $(f^i(x))^i \sim (g^i(x))^i$ $(x \to +\infty)$, и по теореме 6 — что $f(x) \sim g(x)$, $x \to +\infty$, тем самым $g \in [f]$.

(b) Допустим, что $f \in \mathscr{A} \setminus (IRV \cap ARV)$. Рассмотрим три подслучая.

(b.1^0) Предположим в дополнение, что $f \in IRV \setminus ARV$. Тогда по следствию 1 $f^i \notin IRV$. Отсюда по теореме 2 найдется $g \in \mathscr{A}$ такая, что $g \in [f]$ и $g^i \notin [f^i]$.

(b.2^0) Пусть теперь $f \notin IRV \cup ARV$. Тогда по теореме 3 $f^i \notin IRV$ (а по теореме 4 $f^i \notin ARV$), так что по теореме 2 для рассматриваемой f существует $g \in \mathscr{A}$ такая, что $g \in [f]$ и $g^i \notin [f^i]$.

(b.3^0) Пусть, наконец, $f \in ARV \setminus IRV$. Рассмотрим функцию $f_1(x) = (1 - 1/x)f(x)$, $x \geq a > 1$. Тогда $f_1 \in \mathscr{A}$ — возрастающая функция и $f_1 \in [f]$. Далее, f_1^i — непрерывная функция из класса $\mathscr{A}$ и $f_1^i \in IRV \setminus ARV$. Рассмотрим функцию $s(x) = (1 - 1/x)f_1^i(x)$, $x \geq a > 1$. Ясно, что $s \in \mathscr{A}$ непрерывна и возрастает, тем самым $s \in IRV \setminus ARV$. Рассмотрим функцию $h(x) = s^i(x)$, $x \geq a$ $(s^i(x) = s^{-1}(x),\ x \geq a)$. Тогда $h \in \mathscr{A}$ непрерывна и возрастает, поэтому $h \in ARV \setminus IRV$. Кроме того, $h^i(x) = s(x)$, $x \geq a$, ибо s непрерывна справа, так что $(s^i(x))^i = s(x)$, $x \geq a$. Поскольку $f^i \in IRV$, по теореме 1 имеем $f_1^i \in [f^i]$ ввиду того, что $f_1 \in [f]$.

Предположим теперь, что для каждой $g \in \mathscr{A}$ (а значит, для всех непрерывных возрастающих функций $g \in \mathscr{A}$) будет $f(x) \sim g(x)$, $x \to +\infty$, если $f^i(x) \sim g^i(x)$, $x \to +\infty$. Тогда для любой непрерывной возрастающей функции $g \in \mathscr{A}$ имеем $h(x) \sim g(x)$, $x \to +\infty$, при условии, что $h^i(x) \sim g^i(x)$, $x \to +\infty$. Отсюда если $g^i \in [h^i]$, то

$$1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(g^i(x))}{g(g^i(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(g^i(x))}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{h(g^i(x))}{h(h^i(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{h\left(\frac{g^i(x)}{h^i(x)} h^i(x)\right)}{h(h^i(x))}.$$

Пусть $\alpha(x)$, $x \geq x_0 > 0$, — произвольная положительная непрерывная функция такая, что $\alpha(x) \geq 1$ для $x \geq x_0$ и $\alpha(x) \to 1+$ при $x \to +\infty$. Рассмотрим функцию $\beta(x) = \alpha(h^i(x))$, $x \geq h(x_0)$. Тогда $\gamma(x) = \beta(x)h^i(x)$, $x \geq h(x_0)$, непрерывна и $\gamma \in \mathscr{A}$, если она неубывающая. Если γ возрастающая, то

$$1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(\beta(x)h^i(x))}{h(h^i(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(\alpha(h^i(x))h^i(x))}{h(h^i(x))} = \lim_{p\to+\infty} \frac{h(\alpha(p)p)}{h(p)},$$

ибо $h^i(x) \sim \gamma(x)$, $x \to +\infty$.

Определим h, полагая $h(0) = 0$ и считая ее непрерывной и линейной на промежутке $[0, a]$. Тогда $h \in K_c$ (определение класса K_c см. в [7]). Отсюда $h \in IRV$ (см. [4]). Так как $h \in [f]$, имеем $f \in IRV$. Но это противоречит предположению о том, что $f \in ARV \setminus IRV$. Значит, для рассматриваемой f найдется $g \in \mathscr{A}$ такая, что $g^i \in [f^i]$ и $g \notin [f]$.

Далее, если γ не является возрастающей, то рассмотрим функцию $r(x) = \max\limits_{\bar{x}_0 \le t \le x} \gamma(t)$, $x \ge \bar{x}_0 = h(x_0)$. Тогда $r(x)$ непрерывна и неубывающая при $x \ge \bar{x}_0$. Кроме того, $r(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$, и $r(x) \ge \gamma(x) = \beta(x) h^i(x)$ для любого $x \ge \bar{x}_0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $x_1 \ge \bar{x}_0$ такой, что $1 \le \gamma(x)/h^i(x) < 1 + \varepsilon$ при $x \ge x_1$, и найдется $x_2 > x_1$ такой, что $\gamma(x) \ge \max\limits_{\bar{x}_0 \le u \le x_1} \gamma(u)$ для любого $x \ge x_2$. Существует функция $v(x)$, $x \ge x_2$, со значениями в промежутке $[x_1, x]$ такая, что

$$1 \le \frac{r(x)}{h^i(x)} = \frac{1}{h^i(x)} \max_{\bar{x}_0 \le u \le x} \gamma(u) = \frac{1}{h^i(x)} \max_{x_1 \le u \le x} \gamma(u) = \frac{\gamma(v(x))}{h^i(x)} \le \frac{\gamma(v(x))}{h^i(v(x))} < 1 + \varepsilon.$$

Следовательно, $r \in [h^i]$. Рассмотрим теперь функцию $r_1(x) = 1 - 1/x + r(x)$ для $x \ge \tilde{x}_0 \ge \bar{x}_0$ ($\tilde{x}_0 > 1$). Она непрерывна, возрастает и принадлежит классу $\mathscr{A}$. Кроме того, $r_1(x) \sim r(x) \sim h^i(x)$ при $x \to +\infty$. Тогда

$$1 \le \varliminf_{x \to +\infty} \frac{h(\beta(x) h^i(x))}{h(h^i(x))} \le \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{h(\beta(x) h^i(x))}{h(h^i(x))} \le \lim_{x \to +\infty} \frac{h\big(\frac{r_1(x)}{h^i(x)} h^i(x)\big)}{h(h^i(x))} = 1,$$

следовательно,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h\big(\beta(x) h^i(x)\big)}{h(h^i(x))} = \lim_{x \to +\infty} \frac{h(\alpha(h^i(x)) h^i(x))}{h(h^i(x))} = \lim_{p \to +\infty} \frac{h(\alpha(p) p)}{h(p)} = 1.$$

Используя процедуру из предыдущей части доказательства, можно показать, что $h \in IRV$. Так как $h \in [f]$, имеем $f \in IRV$, а это противоречит тому, что $f \in ARV \setminus IRV$. Значит, есть $g \in \mathscr{A}$ такая, что $g \notin [f]$ и $g^i \in [f^i]$. $\square$

Замечание. Доказательство теоремы 7 можно сократить, воспользовавшись следующей леммой.

Лемма. *Пусть $f \in \mathscr{A}$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

(i) *$f \in IRV \cap ARV$;*

(ii) *для любой $g \in \mathscr{A}$ соотношение $f(x) \sim g(x)$, $x \to +\infty$, имеет место в том и только в том случае, если $f^i(x) \sim g^i(x)$, $x \to +\infty$.*

Тогда существует непрерывная возрастающая функция $h \in \mathscr{A}$ такая, что $f(x) \sim h(x)$ и $f^i(x) \sim h^{-1}(x)$ при $x \to +\infty$.

Эту лемму можно легко вывести из теорем 1, 3 и 5. Из этой леммы и результатов работы [13] непосредственно следует утверждение теоремы 7.

Пусть $a > 0$. Функции $f, g : [a, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ называют *асимптотически инверсными* в $+\infty$ и используют обозначение $f(x) \overset{*}{\sim} g(x)$, $x \to +\infty$, если для любого $\lambda > 1$ найдется $x_0 = x_0(\lambda)$ такое, что $f(x/\lambda) \le g(x) \le f(\lambda x)$ для $x \ge x_0(\lambda)$.

Если $f, g \in \mathscr{A}$, то $f^i(x) \sim g^i(x)$, $x \to +\infty$, тогда и только тогда, когда $f(x) \overset{*}{\sim} g(x)$, $x \to +\infty$ (см. [15; 2, с. 190, 14(ii)]).

Следующая теорема обобщает теорему А (см. [2, с. 190, 14(iii)]).

Теорема B. *Пусть $f, g : [a, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ $(a > 0)$ и f — правильно изменяемая функция индекса $\rho > 0$. Тогда $g \in [f]$ в том и только в том случае, если $f(x) \overset{*}{\sim} g(x)$, $x \to +\infty$.*

Следующие две теоремы обобщают теорему B.

Теорема 8. *Пусть $f, g : [a, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ $(a > 0)$ и $f \in ARV$. Если $g \in [f]$, то $f(x) \overset{*}{\sim} g(x)$, $x \to +\infty$.*

Доказательство. Пусть $f, g : [a, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ $(a > 0)$ и $f \in ARV$, $g \in [f]$. Так как $f \in ARV$, существует функция $c(\lambda) > 1$ $(\lambda > 1)$, зависящая от f, такая, что $f(\lambda x) \geq c(\lambda) f(x)$ для всех $\lambda > 1$ и $x \geq x_0(\lambda) \geq a > 0$. Поскольку $g \in [f]$, найдется $x_1 = x_1(\lambda) \geq a > 0$ такое, что $2/(1 + c(\lambda)) \leq g(x)/f(x) \leq c(\lambda)$ для любого $x \geq x_1$. Отсюда $g(x) \leq c(\lambda) f(x) \leq f(\lambda x)$ при $x \geq \max\{x_0, x_1\}$. Имеем

$$\underline{k}_f(\lambda) = \varliminf_{x \to +\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} \geq c(\lambda) > 1 \quad (\lambda > 1).$$

Так как

$$\bar{k}_f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{f\left(\frac{1}{\lambda} x\right)}{f(x)} = \frac{1}{\underline{k}_f(\lambda)} \quad (\lambda > 1),$$

получаем $\bar{k}_f(1/\lambda) \leq 1/c(\lambda)$ для $\lambda > 1$. Следовательно, $f(x/\lambda) \leq 2f(x)/(1 + c(\lambda))$ при $x \geq x_2 = x_2(\lambda) \geq a > 0$. Поэтому $g(x) \geq 2f(x)/(1 + c(\lambda)) \geq f(x/\lambda)$ для $\lambda > 1$ и $x \geq \max\{x_2, x_1\}$. Отсюда для любых $\lambda > 1$ и $x \geq \max\{x_0, x_1, x_2\}$ получаем $f(x/\lambda) \leq g(x) \leq f(\lambda x)$, а это означает, что $f(x) \overset{*}{\sim} g(x)$, $x \to +\infty$. $\square$

Теорема 9. *Пусть $f, g : [a, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ $(a > 0)$ и $f \in IRV$. Если $f(x) \overset{*}{\sim} g(x)$, $x \to +\infty$, то $g \in [f]$.*

Доказательство. Пусть $f, g : [a, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ $(a > 0)$, $f \in IRV$ и $f(x) \overset{*}{\sim} g(x)$, $x \to +\infty$. Тогда

$$\frac{f(x/\lambda)}{f(x)} \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq \frac{f(\lambda x)}{f(x)}$$

для любых $\lambda > 1$ и $x \geq x_0 = x_0(\lambda) \geq a > 0$. Поэтому

$$\underline{k}_f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq \varliminf_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} \leq \underline{k}_f(\lambda) \ (\lambda > 1), \quad \bar{k}_f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} \leq \bar{k}_f(\lambda) \ (\lambda > 1).$$

Поскольку $\lim\limits_{\lambda \to 1} \underline{k}_f(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to 1} \bar{k}_f(\lambda) = 1$, получаем

$$\lim_{\lambda \to 1+} \bar{k}_f(\lambda) = \lim_{\lambda \to 1+} \bar{k}_f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda \to 1+} \underline{k}_f(\lambda) = \lim_{\lambda \to 1+} \underline{k}_f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1,$$

так что

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \varliminf_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

Отсюда $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)/f(x) = 1$, так что $g \in [f]$. $\square$

Из теорем 8 и 9 вытекает обобщающее теорему B

Следствие 2. *Пусть $f, g : [a, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ $(a > 0)$ и $f \in IRV \cap ARV$. Тогда $g \in [f]$ в том и только в том случае, если $f(x) \overset{*}{\sim} g(x)$, $x \to +\infty$.*

Заметим, что класс $IRV \cap ARV$, за исключением правильно изменяемых функций индекса $\rho > 0$, включает, например, все положительные не правильно изменяемые функции, определенные на полуоси $[a, +\infty)$, нижний индекс Матушевской которых больше нуля, а верхний меньше $+\infty$ (см. [16]). Поэтому естественно возникает

Вопрос. *Будет ли класс $IRV \cap ARV$ наибольшим классом, из которого можно взять функцию f так, что вместе с другими предположениями следствие* 2 *остается верным?*

Благодарности. Авторы весьма признательны рецензенту, предложившему формулировку леммы этой статьи, с помощью которой доказательство теоремы 7 значительно сокращается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aljančić S., Arandjelović D.* $\mathscr{O}$-regularly varying functions // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1977. V. 22. P. 5–22.
2. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
3. *Cline D. B. H.* Intermediate regular and Π-variation // Proc. London Math. Soc. 1994. V. 68, N 3. P. 594–616.
4. *Djurčić D.* $\mathscr{O}$-regularly varying functions and strong asymptotic equivalence // J. Math. Anal. Appl. 1998. V. 220, N 2. P. 451–461.
5. *Berman S.* Sojourns and extremes of a diffusion process on a fixed interval // Adv. in Appl. Probab. 1982. V. 14, N 4. P. 811–832.
6. *Berman S.* The tail of the convolution of densities and its application to a model of HIV-latency time // Ann. Appl. Probab. 1992. V. 2, N 6. P. 481–502.
7. *Matuszewska W.* On a generalization of regularly increasing functions // Studia Math. 1964. V. 24. P. 271–279.
8. *Matuszewska W., Orlicz W.* On some classes of functions with regard to their orders of growth // Studia Math. 1965. V. 26. P. 11–24.
9. *Кореблюм Б. И.* Об асимптотическом поведении интегралов Лапласа вблизи границы области сходимости // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104, № 2. С. 173–176.
10. *Stadtmüller U., Trautner V.* Tauberian theorems for Laplace transforms // J. Reine Angew. Math. 1979. V. 311/312. P. 283–290.
11. *Stanojević Č. V.* $\mathscr{O}$-regularly varying convergence moduli of Fourier and Fourier–Stieltjes series // Math. Ann. 1987. V. 279. P. 103–115.
12. *Seneta W.* Functions of regular variation. New York: Springer-Verl., 1976. (Lect. Notes Math; V. 506).
13. *Djurčić D., Torgašev A.* Strong asymptotic equivalence and inversion of functions in the class K_c // J. Math. Anal. Appl. 2001. V. 255, N 2. P. 383–390.
14. *de Haan L.* On regular variation and its applications to the weak convergence of sample extremes. Amsterdam: Math. Centrum, 1970. (Math. Centre Tract; 32).
15. *Balkema A. A., Geluk J. L., de Haan L.* An extension of Karamata's Tauberian theorem and its connection with complementary convex functions // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1979. V. 30, N 2. P. 385–416.
16. *Arandjelović D.* $\mathscr{O}$-regular variation and uniform convergence // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1990. V. 48. P. 25–40.

Статья поступила 2 ноября 2006 г.

Dragan Djurčić (Дюрчич Драган)
University of Kragujevac, Technical Faculty, Svetog Save 65, 32000 Čačak, Serbia
dragandj@tfc.kg.ac.yu

Aleksandar Torgašev (Торгашев Александр)
University of Belgrade, Mathematical Faculty, Studentski trg 16a, 11000 Belgrade, Serbia
torgasev@matf.bg.ac.yu

Siniša Ješić (Ешич Синиша)
University of Belgrade, Faculty of Electrical Engineering,
Bulevar Kralja Aleksandra 73, 11000 Belgrade, Serbia
jesha@eunet.yu