*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5*

*УДК 512.54*

# О ДИАГРАММАХ ЮНГА ПАРЫ НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРОВ ГРУППЫ $S_n$, РАВНОКОРЕННЫХ НА $S_n^\varepsilon$

**В. А. Белоногов**

**Аннотация.** При изучении пар неприводимых характеров симметрической группы $S_n$, имеющих одно и то же множество корней на одном из множеств $A_n$ и $S_n \setminus A_n$ (а также пар равнокорневых неприводимых характеров знакопеременной группы $A_n$), важным рабочим инструментом являются результаты о связи между диаграммами Юнга характеров этих пар. Доказана теорема, существенно обобщающая два более ранних и часто используемых результата в этом направлении.

**Ключевые слова:** симметрическая группа, неприводимый характер, корень характера, диаграмма Юнга.

## Введение

В статье [1] описаны все пары равнокорневых (т. е. имеющих одно и то же множество корней) неприводимых характеров группы $S_n$, а в [2, 3] начато изучение пар неприводимых характеров группы $S_n$, равнокорневых на одном из множеств $A_n$ и $S_n \setminus A_n$. Побуждающим мотивом такого исследования, как отмечено в [2], является задача описания пар полупропорциональных неприводимых характеров конечных групп (определение напоминается ниже), интересная обнаружившейся связью между наличием или отсутствием у группы такой пары и локальным строением этой группы. (Например, как установлено в [4–6], у квазипростых групп лиева типа $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{L}_3(q)$, $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$ и $\mathrm{SU}_3(q)$ такие пары отсутствуют при четных $q$ и присутствуют при нечетных $q$, за исключением групп $\mathrm{L}_2(5) \cong \mathrm{L}_2(4)$, $\mathrm{L}_2(7) \simeq \mathrm{L}_3(2)$ и $\mathrm{L}_2(9) \simeq \mathrm{PSp}_4(2)'$.)

При исследовании пар неприводимых характеров группы $S_n$, имеющих одно и то же множество корней на $A_n$ или на $S_n \setminus A_n$, наряду с результатами о нулях в таблицах характеров групп $S_n$, установленными в [7, 8], существенно используются результаты о связях между диаграммами Юнга характеров этих пар. К последним относятся, в частности, приведенные ниже (часто используемые) леммы 1 и 2, обобщению которых посвящена настоящая статья. Прежде чем их сформулировать, объясним некоторые обозначения. Определения, связанные с понятием разбиения, напоминаются в § 1.

Всюду далее $n$ обозначает натуральное число, $P(n)$ — множество всех разбиений $n$ и $\chi^\alpha$ — неприводимый характер группы $S_n$, соответствующий разбиению $\alpha \in P(n)$.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00148) и РФФИ-ГФЕН Китая (код проекта 05–01–39000).

Для $\varepsilon \in \{1,-1\}$ положим $S_n^\varepsilon := \begin{cases} S_n^+ := A_n, & \text{если } \varepsilon = 1, \\ S_n^- := S_n \setminus A_n, & \text{если } \varepsilon = -1. \end{cases}$ Как обычно, корень функции $\varphi$ из некоторого множества $G$ в поле $\mathbb{C}$ есть элемент $x \in G$ такой, что $\varphi(x) = 0$. Для $\alpha, \beta \in P(n)$ запись «$\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$» означает, что характеры $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ имеют одно и то же множество корней на $S_n^\varepsilon$ (знак $\sim$ можно читать как «эквивалентно»); $[\alpha]$ — диаграмма Юнга разбиения $\alpha$; $\mathrm{H}^\alpha(m)$ — множество всех крюков длины $m$ в $[\alpha]$; $l_H$ — длина ноги крюка $H$; $\alpha - H$ — разбиение, диаграмма которого получается удалением из $[\alpha]$ косого крюка $R(H)$; запись $\alpha =' \beta$ означает, что разбиения $\alpha$ и $\beta$ или равны, или ассоциированы (знак $='$ можно прочесть как «квазиравно»).

**Лемма 1** [3, лемма 3.4]. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$, где $\varepsilon \in \{1,-1\}$. Предположим, что $[\alpha]$ имеет единственный крюк $H$ некоторой длины $m$, а $[\beta]$ не имеет крюков длины $m$. Тогда $\alpha - H = (\alpha - H)'$ и $\varepsilon = (-1)^m$.*

(Несколько более слабая версия леммы 1 использовалась в [1].)

**Лемма 2** [3, лемма 3.7]. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$, где $\varepsilon \in \{1,-1\}$. Предположим, что $[\alpha]$ имеет точно два крюка $H$ и $K$ некоторой длины $m$, а $[\beta]$ не имеет крюков длины $m$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) *$\varepsilon = (-1)^{m+1}$, $\alpha - H =' \alpha - K$ и $l_H + l_K$ нечетно;*

(2) *$\varepsilon = (-1)^m$ и либо $\alpha - H =' \alpha - K$, либо разбиения $\alpha - H$ и $\alpha - K$ оба самоассоциированы.*

В настоящей работе доказывается следующая теорема, существенно обобщающая обе эти леммы. В доказательстве теоремы они не используются.

**Теорема.** *Пусть $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$, где $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\varepsilon \in \{1,-1\}$. Предположим, что $[\alpha]$ имеет хотя бы один крюк некоторой длины $m$, а $[\beta]$ не имеет крюков длины $m$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) *$\varepsilon = (-1)^m$, $\alpha$ имеет единственный крюк $H$ длины $m$ и разбиение $\alpha - H$ самоассоциировано;*

(2) *$\varepsilon = -1$, $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$ (в частности, $\chi^\alpha$ и $\chi^\beta$ тождественно равны нулю на $S_n^\varepsilon$).*

Очевидно, при условии (2) $\alpha$ имеет не более одного крюка $H$ длины $m$ с самоассоциированным $\alpha - H$ и множество $N$ всех крюков $Q$ из $\mathrm{H}^\alpha(m)$ с несамоассоциированными разбиениями $\alpha - Q$ можно разбить на некоторое число двухэлементных подмножеств $\{H, K\}$ таких, что $\alpha - H = (\alpha - K)'$, причем $N = \mathrm{H}^\alpha(m)$ при четном $m$.

Пусть при условии теоремы $l := |\mathrm{H}^\alpha(m)|$. При $l = 1$ из теоремы непосредственно вытекает лемма 1, а при $l = 2$ — следующее усиление леммы 2.

**Следствие 1.** *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1,-1\}$ и $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$. Предположим, что $[\alpha]$ имеет точно два крюка $H$ и $K$ некоторой длины $m$, а $[\beta]$ не имеет крюков длины $m$. Тогда*

$$\varepsilon = -1, \quad \alpha = \alpha', \quad \beta = \beta' \quad \text{и} \quad \alpha - H = (\alpha - K)'.$$

Утверждение «$l_H + l_K$ нечетно» в п. (1) леммы 2 (где $\varepsilon = (-1)^{m+1}$) вытекает из следствия 1, поскольку согласно следствию предложения 2.2 из равенств $\alpha = \alpha'$ и $\alpha - H = (\alpha - K)'$ следует, что $l_H + l_K = m - 1$.

При $l = 3$ из теоремы вытекает

**Следствие 2.** *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$, где $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Предположим, что $[\alpha]$ имеет точно три крюка некоторой длины $m$, а $[\beta]$ не имеет крюков длины $m$. Тогда $\varepsilon = -1$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $m$ нечетно и $\mathrm{H}^\alpha(m) = \{S, H, K\}$, где $\alpha - S = (\alpha - S)'$ и $\alpha - H = (\alpha - K)'$.*

Действительно, при условии следствия 2 должно быть выполнено утверждение (2) теоремы, из которого, очевидно, следует требуемое заключение.

Отметим еще два очевидных и полезных следствия теоремы.

**Следствие 3.** *Пусть $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$, где $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Предположим, что разбиения $\alpha$ и $\beta$ не являются оба самоассоциированными. Тогда из того, что $[\alpha]$ имеет крюк $H$ некоторой длины $m$ такой, что $\alpha - H \neq (\alpha - H)'$, следует, что $[\beta]$ также имеет крюк длины $m$.*

**Следствие 4.** *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на $A_n$. Если $[\alpha]$ имеет крюк $H$ некоторой длины $m$, а $[\beta]$ не имеет крюков длины $m$, то $m$ четно, $\mathrm{H}^\alpha(m) = \{H\}$ и $\alpha - H = (\alpha - H)'$.*

Доказательство теоремы приводится в § 4. Необходимые сведения о разбиениях и о характерах групп $S_n$ и $A_n$ содержатся в § 1. В § 2 выясняется связь свойств разбиения $\alpha$ со свойствами «остаточных разбиений» $\alpha - H$ и $\alpha - K$ для двух его крюков $H$ и $K$ равной длины. Доказано, что разбиения $\alpha - H$ и $\alpha - K$ не могут быть оба самоассоциированы (предложение 2.1); и если $\alpha - H =' \alpha - K$, то $\alpha = \alpha'$, а крюки $H$ и $K$ симметричны относительно главной диагонали в $[\alpha]$ (предложение 2.2).

В § 3 рассматривается $\mathbb{C}$-пространство $\mathrm{CF}(S_n^-)$, состоящее из ограничений классовых функций группы $S_n$ на $S_n^-$, и указывается некоторый его естественный базис. Результаты § 2, 3 существенно используются в доказательстве теоремы, хотя представляют и самостоятельный интерес. В § 5 рассмотрены некоторые примеры.

Обозначения, используемые в этой статье, в основном стандартны (см., например, [9, 10]). В частности, $\mathrm{Cl}(G)$ — множество всех классов сопряженных элементов группы $G$; $g^G$ — класс сопряженных элементов группы $G$, содержащий элемент $g \in G$; $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы $G$; $\varphi|_K$ — ограничение классовой функции $\varphi$ группы $G$ на ее подмножестве $K$; $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ — множества всех комплексных и всех натуральных чисел соответственно; $\{\dots \mid \dots\}$ — множество всех $\dots$, таких, что $\dots$; $\dot\cup$ — знак объединения попарно не пересекающихся множеств.

Запись $A := B$ (читается: «$A$ по определению равно $B$») означает, что $A$ есть обозначение для $B$. Если $\alpha$ — разбиение и $(i, j) \in [\alpha]$, то положим $\alpha^{ij} := \alpha - H$, где $H = H_{ij}^\alpha$ (см. § 1). Если $\varphi$ и $\psi$ — классовые функции группы $G$, $S \subseteq G$ и функции $\varphi|_S$ и $\psi|_S$ имеют одно и то же множество корней, то мы говорим, что $\varphi$ и $\psi$ *имеют одно и то же множество корней на* $S$ (или *являются равнокорневыми на* $S$), и пишем «$\varphi \sim \psi$ на $S$». Характеры $\varphi$ и $\psi$ группы $G$ называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого подмножества $M$ из $G$ пропорциональны ограничения $\varphi$ и $\psi$ на $M$ и их ограничения на $G \setminus M$.

Полученные в этой статье результаты автор надеется применить для расширения результатов статьи [3] и, в частности, для доказательства следующей выдвинутой в [1] гипотезы: знакопеременная группа $A_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$ не имеет полупропорциональных неприводимых характеров.

## § 1. Разбиения и характеры групп $S_n$ и $A_n$

Напомним необходимые нам определения и известные результаты о разбиениях и характерах симметрических и знакопеременных групп (см. [10, 11]). Множество всех неприводимых характеров и множество всех классов сопряженных элементов симметрической группы $S_n$ находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством $P(n)$ всех разбиений числа $n$. Если $\alpha$ — такое разбиение, то $\chi^\alpha$ и $C_\alpha$ обозначают соответствующие ему неприводимый характер и класс сопряженных элементов группы $S_n$.

*Разбиение* натурального числа $n$ есть последовательность $\alpha = (a_1, \dots, a_l)$ натуральных чисел такая, что $a_1 \geq \dots \geq a_l$ и $n = a_1 + \dots + a_l$. Длину $l$ разбиения $\alpha$ обозначают через $l(\alpha)$. *Знаком* разбиения $\alpha \in P(n)$ называется число $\operatorname{sign}(\alpha) := (-1)^{n-l(\alpha)}$, а также знак этого числа. Разбиение $\alpha$ имеет знак $+$, если и только если $C_\alpha \subseteq A_n$. Каждому разбиению $\alpha = (a_1, \dots, a_l) \in P(n)$ сопоставляется его *диаграмма Юнга* (или просто *диаграмма*) $[\alpha] := \{(i,j) \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq a_i\}$. На рисунке ее обычно изображают в виде $l$-строчной таблицы, состоящей из $n$ равных квадратных клеток, так, что $i$-я строка имеет $a_i$ клеток и начальные клетки всех строк находятся в одном столбце. Клетки (элементы) вида $(i,i)$ диаграммы образуют ее *главную диагональ*. Говорят, что разбиения $\alpha$ и $\beta$ *ассоциированы*, если диаграмма одного из них получается из диаграммы другого отражением относительно главной диагонали. Разбиение, ассоциированное с $\alpha$, обозначается через $\alpha'$. Множество всех клеток $(i,j)$ диаграммы $[\alpha]$ таких, что $[\alpha]$ не содержит клетки $(i+1, j+1)$, называется ее *границей*.

*Крюком* диаграммы $[\alpha]$ (или разбиения $\alpha$) с вершиной $(i,j)$ называется множество $H_{ij}^\alpha := \{(i,j)\} \cup A \cup L$, где $A := \{(i, j+k) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*рука крюка*) и $L := \{(i+k, j) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*нога крюка*). (При необходимости индексы разделяются запятой; например, $H_{2,13}^\alpha$ .) *Косым крюком* с вершиной $(i,j)$ диаграммы $[\alpha]$ называется часть границы диаграммы $[\alpha]$, «вырезанная» крюком $H_{ij}^\alpha$. Его обозначают через $R_{ij}^\alpha$ или через $R(H_{ij}^\alpha)$. Косые крюки диаграммы $[\alpha]$ — это в точности те связные части ее границы, после удаления которых из $[\alpha]$ остается диаграмма некоторого разбиения (какого-либо меньшего числа). *Длиной* крюка (косого крюка, диагонали, ноги крюка) называется его (или ее) мощность. Длина главной диагонали диаграммы $[\alpha]$ обозначается через $d(\alpha)$. Положим $h_{ij}^\alpha := \left|H_{ij}^\alpha\right| \ \left(= \left|R_{ij}^\alpha\right|\right)$. Для обозначения обычного словарного (лексикографического) порядка на множестве $P(n)$ (при любом $n$) употребляется знак $\leq$. Например, $(5,3,2,1) < (5,4,1,1)$.

*Разбиением числа* 0 называют пустую (длины 0) последовательность натуральных чисел, обозначаемую через $()$, и считают, что $[()] = \varnothing$ и $()' = ()$. Часто разбиения записывают в условной форме, заменяя подпоследовательность $a, \dots, a$ длины $m \geq 0$ на $a^m$. Например, $(4, 3^2, 1) := (4,3,3,1)$ и $(5, 1^0) := (5)$.

Пусть $\alpha = (a_1, \dots, a_l) \in P(n)$. Ему естественным образом сопоставляется класс $C_\alpha$ сопряженных элементов группы $S_n$, элементы которого разлагаются в произведение $l$ независимых циклов длин $a_1, \dots, a_l$. Понятно, что отображение $\alpha \mapsto C_\alpha$ $(\alpha \in P(n))$ является взаимно однозначным отображением из $P(n)$ на $\mathrm{Cl}(S_n)$.

Взаимно однозначное отображение $\alpha \mapsto \chi^\alpha$ из $P(n)$ на $\mathrm{Irr}(S_n)$ строится следующим образом. Пусть $S_\alpha$ — подгруппа Юнга, соответствующая $\alpha$, т. е. стабилизатор в $S_n$ совокупности множеств $A_i$ $(i = 1, \dots, l)$, где $A_1$ — множество первых $\alpha_1$ членов последовательности $(1, \dots, n)$, $A_2$ — множество следующих $\alpha_2$ членов этой последовательности, и т. д. Очевидно, $S_\alpha$ изоморфна $S_{\alpha_1} \times$

$\dots \times S_{\alpha_l}$. Доказывается, что если взять главный характер подгруппы $S_\alpha$ и знакопеременный характер подгруппы $S_{\alpha'}$ и индуцировать их на $S_n$, то эти индуцированные характеры имеют точно одну общую неприводимую часть. Это и есть характер $\chi^\alpha$.

**Предложение 1.1.** (1) $\mathrm{Cl}(S_n) = \{C_\alpha \mid \alpha \in P(n)\}$, $|\mathrm{Cl}(S_n)| = |P(n)|$.

(2) $\mathrm{Irr}(S_n) = \{\chi^\alpha \mid \alpha \in P(n)\}$, $|\mathrm{Irr}(S_n)| = |P(n)|$.

(3) $\chi^{(n)} = 1_{S_n}$ *(главный характер группы* $S_n$*),* $\chi^{(1^n)} = \xi$ *— знакопеременный характер* $S_n$ *(линейный характер с ядром* $A_n$*).*

(4) $\chi^{\alpha'} = \chi^\alpha \xi$ *для всех* $\alpha \in P(n)$ *(характеры* $\chi^\alpha$ *и* $\chi^{\alpha'}$ *называются ассоциированными).*

(5) $\chi^\alpha$ *исчезает на* $S_n \setminus A_n$*, если и только если* $\alpha = \alpha'$ $(\alpha \in P(n))$.

(6) *Неприводимые характеры группы* $S_n$ *принимают лишь целые значения.*

(Для доказательства см. теоремы 2.1.7, 2.1.8, 2.1.11, 2.3.15 в [10] или утверждения 2.3, 4.12, 6.7 в [11].)

**Предложение 1.2** (теорема Мурнагана — Накаямы). *Пусть* $\alpha \in P(n)$, $k \in \mathbb{N}$, $x$ *— произвольная перестановка элементов* $1, \dots, n-k$ *и* $z$ *— циклическая перестановка остальных* $k$ *элементов* $n-k+1, \dots, n$. *Тогда*

$$\chi^\alpha(z \times x) = \sum_{\substack{(i,j)\in[\alpha],\\ h_{ij}^\alpha = k}} (-1)^{l_{ij}^\alpha} \chi^{\alpha^{ij}}(x),$$

*где* $l_{ij}^\alpha$ *— длина ноги крюка* $H_{ij}^\alpha$ *(при этом считается, что* $\chi^{()}(x) = 1$*, а пустая сумма равна нулю).*

(См. теорему 2.4.7 в [10] или утверждение 21.1 в [11].)

**Предложение 1.3** [10, 1.2.10]. *Пусть* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in P(n)$ *и* $C_\alpha \subseteq A_n$. *Тогда либо* $C_\alpha \in \mathrm{Cl}(A_n)$*, либо* $C_\alpha$ *— объединение двух классов сопряженных элементов группы* $A_n$. *Последнее имеет место, если и только если* $n > 1$*, а числа* $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ *нечетны и попарно различны.*

**Предложение 1.4** [10, теорема 2.5.7]. *Пусть* $n > 1$, $P_1(n) := \{\alpha \in P(n) \mid \alpha \neq \alpha'\}$ *и* $P_2(n) := \{\alpha \in P(n) \mid \alpha = \alpha'\}$.

(1) *Если* $\alpha \in P_1(n)$*, то* $\chi^\alpha|_{A_n} = \chi^{\alpha'}|_{A_n} \in \mathrm{Irr}(A_n)$.

(2) *Если* $\alpha \in P_2(n)$*, то* $\chi^\alpha|_{A_n} = \chi^\alpha_+ + \chi^\alpha_-$ *, где* $\chi^\alpha_+$ *и* $\chi^\alpha_-$ *— различные характеры из* $\mathrm{Irr}(A_n)$*, сопряженные в* $S_n$ *(какому из них приписать индекс плюс, а какому индекс минус, безразлично).*

(3) $\mathrm{Irr}(A_n) = I_1 \dot\cup I_2$*, где* $I_1 = \{\chi^\alpha|_{A_n} \mid \alpha \in P_1(n)\}$, $|I_1| = \frac{1}{2}|P_1(n)|$*, и* $I_2 = \{\chi^\alpha_+, \chi^\alpha_- \mid \alpha \in P_2(n)\}$, $|I_2| = 2|P_2(n)|$.

## § 2. Об остаточных диаграммах двух крюков разбиения

Результаты этого параграфа существенно используются в доказательстве теоремы и представляют также самостоятельный интерес.

**Предложение 2.1.** *Пусть* $H$ *и* $K$ *— крюки равной длины разбиения* $\alpha$. *Тогда по крайней мере одно из разбиений* $\alpha - H$ *и* $\alpha - K$ *не самоассоциировано.*

Доказательство. Пусть вершины крюков $H$ и $K$ находятся в клетках $(i,j)$ и $(k,l)$ соответственно, т. е. $H = H_{ij}^\alpha$, $K = H_{kl}^\alpha$, $\alpha - H = \alpha^{ij}$ и $\alpha - K = \alpha^{kl}$.

(Напомним, что $\alpha^{ij}$ — разбиение с диаграммой $[\alpha] \setminus R^{\alpha}_{ij}$.) Так как по условию $\left|H^{\alpha}_{ij}\right| = \left|H^{\alpha}_{kl}\right|$, то $i \neq k$ и $j \neq l$. Без ограничения общности можно считать, что $i < k$ и, следовательно, $j > l$. Из-за возможности поменять местами $\alpha$ и $\alpha'$ можно считать, что $i \leq l$. Итак, мы считаем, что $i < k$, $i \leq l < j$.

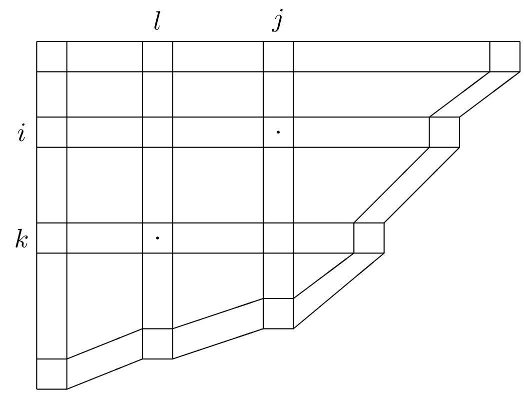
$[\alpha] =$ 


Рис. 1.

На рис. 1 схематично изображена диаграмма $[\alpha]$. Наклонные линии на ее границе заменяют некоторые ступенчатые линии. Выделены три строки (1-я, $i$-я и $k$-я) и три столбца (1-й, $l$-й и $j$-й), а также граница диаграммы. Вершины крюков $H$ и $K$ помечены точками. На рис. 1 клетка $(k, j)$ находится внутри диаграммы, хотя в действительности граница диаграммы может проходить и через саму эту клетку и выше-левее ее. Однако, как увидит читатель, приводимые ниже аргументы не зависят от особенностей такого расположения. Обозначим через $a_s$ длину $s$-й строки, а через $b_s$ — длину $s$-го столбца в $[\alpha]$.

Предположим (от противного), что разбиения $\alpha - H$ и $\alpha - K$ оба самоассоциированы.

Если $i = l$, то, как видно из рис. 1, должно быть $a_i - 1 = b_i$ ввиду равенства $\alpha^{ij} = (\alpha^{ij})'$ и одновременно $a_i = b_i - 1$ ввиду равенства $\alpha^{kl} = (\alpha^{kl})'$. Но эти равенства противоречат друг другу.

Следовательно, $i < l$. Но тогда (см. рис. 1) должно быть $a_i - 1 = b_i$, так как $\alpha^{ij} = (\alpha^{ij})'$, и $a_i = b_i$, так как $\alpha^{kl} = (\alpha^{kl})'$. Снова получилось противоречие.

Предложение 2.1 доказано.

**Предложение 2.2.** *Пусть* $H^{\alpha}_{ij}$ *и* $H^{\alpha}_{kl}$ *— крюки (равной длины) некоторого разбиения* $\alpha$. *Тогда*

(1) $\alpha^{ij} = \alpha^{kl} \iff (i, j) = (k, l)$,

(2) $\alpha^{ij} = (\alpha^{kl})' \neq \alpha^{kl} \iff \alpha = \alpha'$ *и* $(i, j) = (l, k)$.

Доказательство. Ясно, что доказательства требуют лишь стрелки слева направо.

(1) Пусть $\alpha^{ij} = \alpha^{kl}$. Если $i < k$, то длина $i$-й строки в $\alpha^{kl}$ будет равна длине $i$-й строки в $\alpha$, а длина $i$-й строки в $\alpha^{ij}$ меньше. Так же противоречиво неравенство $k < i$. Следовательно, $i = k$.

Подобно доказывается, что $j = l$. (Если, например, $j < l$, то длина $j$-го столбца в $\alpha^{kl}$ будет равна длине $j$-го столбца в $\alpha$, а длина $j$-го столбца в $\alpha^{ij}$ меньше.)

Итак, $(i, j) = (k, l)$.

(2) Пусть $\alpha^{ij} = (\alpha^{kl})' \neq \alpha^{kl}$. По п. (1) $(i,j) \neq (k,l)$. Так как $\left|H_{ij}^{\alpha}\right| = \left|H_{kl}^{\alpha}\right|$, то $i \neq k$ и $j \neq l$ (поскольку $\left|H_{ij}^{\alpha}\right|$ больше, чем $\left|H_{i,j+1}^{\alpha}\right|$ и $\left|H_{i+1,j}^{\alpha}\right|$ при любых $i,j$). Не ограничивая общности, можно считать, что $i < k$. Тогда $j > l$. Из-за возможности поменять местами $\alpha$ и $\alpha'$ можно считать, что $i \leq l$. Итак, мы считаем, что

$$i < k, i \leq l < j. \tag{2.1}$$

На рис. 2 изображены диаграммы $[\alpha]$ и $[\alpha']$ (параметры выбраны произвольно, но с соблюдением соотношений (2.1)). Вершины крюков $H_{ij}^{\alpha}$ и $H_{kl}^{\alpha}$ помечены точками. Согласно условию п. (2) диаграмма $X = [\alpha^{ij}]$, полученная выбрасыванием из $[\alpha]$ косого крюка $R_{ij}^{\alpha}$ (его клетки помечены крестиками), должна совпадать с диаграммой $Y = [(\alpha')^{lk}]$, полученной выбрасыванием из $[\alpha']$ косого крюка $R_{lk}^{\alpha'}$ (клетки которого помечены кружочками). Наша цель — сравнив эти диаграммы $X$ и $Y$, установить самоассоциированность разбиения $\alpha$.

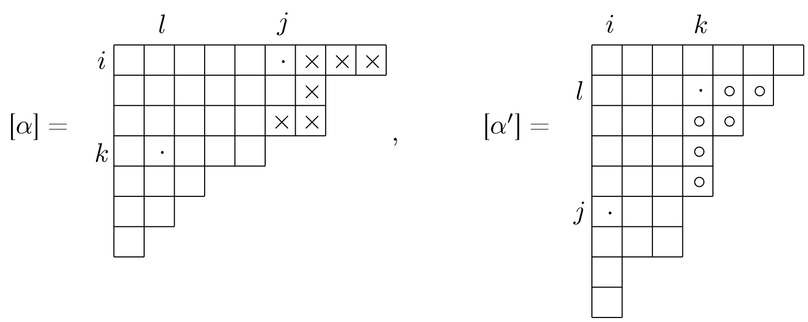



Рис. 2.

На рис. 2 взято $i = 1$, и мы сейчас докажем, что действительно можно принять такое предположение. Если $i > 1$ (т. е. крестики не попадают в первую строку диаграммы $[\alpha]$), то первые $i-1$ строк диаграмм $[\alpha]$ и $[\alpha']$ должны иметь одну и ту же длину (будучи первыми $i-1$ строками диаграмм $X$ и $Y$ соответственно) и, значит, крюки $H_{ss}^{\alpha}$ при $s \leq i-1$ самоассоциированы. Поэтому достаточно доказать самоассоциированность диаграммы, полученной удалением из $[\alpha]$ этих крюков.

Таким образом, мы можем считать, что $i = 1$ (как на рис. 2). Первые столбцы в $X$ и $Y$ являются первыми столбцами диаграмм $[\alpha]$ и $[\alpha']$ соответственно. Поскольку они должны быть равными (так как $X = Y$), крюк $H_{11}^{\alpha}$ самоассоциирован:

$$H_{11}^{\alpha} = (1 + a, 1^a), \quad \text{где } a \geq 1. \tag{2.2}$$

Если $l > 1$ (как на рис. 2), то длины первых строк в $X$ и $Y$ будут различными (вторая равна $1 + a$, а первая меньше). Следовательно, $l = 1$, и мы должны поправить рис. 2 так, что несколько кружочков попадут в первую строку. Это можно сделать, например, стерев первый столбец в $[\alpha]$ и первую строку в $[\alpha']$. Так как длины первых строк этих диаграмм равны по (2.2) и диаграммы $X$ и $Y$ одинаковы, число крестиков (слева) и число кружочков (справа) в этих строках должно быть одинаково (опять рис. 2 нуждается в поправке). Но последняя клетка второй строки в $[\alpha]$ должна находиться под самым левым крестиком первой строки, а последняя клетка второй строки в $[\alpha']$ — под самым левым кружочком первой строки. Поэтому длины вторых строк этих диаграмм равны, т. е.

$$\text{крюк } H^\alpha_{22} \text{ самоассоциирован.}$$

Подобно для любого $s$ с $2 \leq s \leq d(\alpha)-1$ из того, что длины $s$-х строк диаграмм $[\alpha]$ и $[\alpha']$ равны, мы выводим, что число $r_s$ крестиков (слева) и число кружочков (справа) в этих строках одинаково и длины $(s+1)$-х строк равны (при $r_s = 0$ они равны ввиду равенства $X = Y$). Другими словами, из того, что крюк $H^\alpha_{ss}$ самоассоциирован, следует, что крюк $H^\alpha_{s+1,s+1}$ самоассоциирован.

Следовательно, диаграмма $[\alpha]$ самоассоциирована, и теперь очевидно, что $(i, j) = (l, k)$.

Предложение 2.2 доказано.

**Следствие.** *Пусть $\alpha$ — некоторое разбиение и $H$ и $K$ — различные крюки длины $m$ в $[\alpha]$ такие, что $\alpha - H =' \alpha - K$. Тогда*

(а) $\alpha = \alpha'$,

(б) *$H$ и $K$ симметричны относительно главной диагонали в $[\alpha]$,*

(в) $l_H + l_K = m - 1$.

Доказательство. По условию следствия $H = H^\alpha_{ij}$, $K = H^\alpha_{kl}$ для некоторых $i, j, k, l$ и выполнено условие в левой части утверждения (2) предложения 2.2. Согласно этому утверждению $\alpha = \alpha'$ и $(i, j) = (l, k)$, т. е. выполнены условия (а) и (б). Но тогда $H = [(1 + a, b)]$ при некоторых целых неотрицательных $a, b$ и $K = [(1 + b, a)]$. Поэтому $l_H + l_K = b + a = |H| - 1 = m - 1$, т. е. верно (в).

Следствие доказано.

## § 3. Пространство $\mathbf{CF}(S_n^-)$ и его базис

Определение 3.1. Пусть $\mathrm{CF}(S_n^-)$ обозначает векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, состоящее из ограничений на $S_n^-$ всех классовых функций группы $S_n$, с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число. Определим в $\mathrm{CF}(S_n^-)$ скалярное произведение

$$(\varphi, \psi)_{S_n^-} := \frac{1}{|S_n^-|} \sum_{x \in S_n^-} \varphi(x)\overline{\psi(x)} \quad (\varphi, \psi \in \mathrm{CF}(S_n^-)).$$

Положим $I^-(S_n) := \{\chi^\alpha|_{S_n^-} \mid \alpha \in P(n),\ \alpha > \alpha'\}$.

Очевидно, $(a\alpha + b\beta, \gamma)_{S_n^-} = a(\alpha, \gamma)_{S_n^-} + b(\beta, \gamma)_{S_n^-}$ и $(\gamma, a\alpha + b\beta)_{S_n^-} = \bar{a}(\gamma, \alpha)_{S_n^-} + \bar{b}(\gamma, \beta)_{S_n^-}$ для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{CF}(S_n^-)$ и $a, b \in \mathbb{C}$.

**Предложение 3.1.** *$I^-(S_n)$ есть ортонормированный базис пространства $\mathrm{CF}(S_n^-)$.*

Доказательство. Поскольку классовые функции группы являются линейными комбинациями ее неприводимых характеров [9, 2A18], то $\mathrm{CF}(S_n^-) = \mathbb{C}[\{\chi|_{S_n^-} \mid \chi \in \mathrm{Irr}(S_n)\}]$ (множество всех линейных комбинаций элементов множества $\{\chi|_{S_n^-} \mid \chi \in \mathrm{Irr}(S_n)\}$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$). Отсюда и из пп. (4), (5) предложения 1.1 (согласно которым $\chi^\alpha|_{S_n^-} = -\chi^{\alpha'}|_{S_n^-}$ при $\alpha \neq \alpha'$ и $\chi^\alpha|_{S_n^-} = 0$ при $\alpha = \alpha'$) следует, что

$$\mathrm{CF}(S_n^-) = \mathbb{C}[I^-(S_n)]. \tag{3.1}$$

Пусть $\varphi, \psi \in I^-(S_n)$. Тогда $\varphi = \chi^\alpha|_{S_n^-}$ и $\psi = \chi^\beta|_{S_n^-}$ для некоторых $\alpha, \beta \in P(n)$ с $\alpha > \alpha'$ и $\beta > \beta'$. Если $\varphi \neq \psi$, то $\alpha \notin \{\beta, \beta'\}$ и по пп. (1), (3) предложения 1.4 $\chi^\alpha|_{A_n}$ и $\chi^\beta|_{A_n}$ — различные неприводимые характеры группы $A_n$. Поэтому, используя первое соотношение ортогональности для группы $S_n$ и затем для группы $A_n$, получаем

$$\begin{aligned}0 = (\chi^\alpha, \chi^\beta)_{S_n} &= \frac{1}{|S_n|}\sum_{x\in S_n}\chi^\alpha(x)\overline{\chi^\beta(x)}\\ &= \frac{1}{|S_n|}\Big(\sum_{x\in A_n}\chi^\alpha(x)\overline{\chi^\beta(x)} + \sum_{x\in S_n^-}\chi^\alpha(x)\overline{\chi^\beta(x)}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\big(\chi^\alpha|_{A_n}, \chi^\beta_{A_n}\big)_{A_n} + \frac{1}{2}(\varphi,\psi)_{S_n^-} = \frac{1}{2}(\varphi,\psi)_{S_n^-}.\end{aligned}$$

Итак,

$$(\varphi,\psi)_{S_n^-} = 0 \text{ для различных } \ \phi,\psi\in I^-(S_n). \tag{3.2}$$

Подобно получаем

$$\begin{aligned}1 = (\chi^\alpha, \chi^\alpha)_{S_n} &= \frac{1}{|S_n|}\sum_{x\in S_n}\chi^\alpha(x)\overline{\chi^\alpha(x)}\\ &= \frac{1}{2}((\chi^\alpha|_{A_n}, \chi^\alpha|_{A_n})_{A_n} + (\varphi,\varphi)_{S_n^-}) = \frac{1}{2}(1 + (\varphi,\varphi)_{S_n^-}),\end{aligned}$$

откуда

$$(\varphi,\varphi)_{S_n^-} = 1 \text{ для всех } \varphi\in I^-(S_n). \tag{3.3}$$

Из (3.2) и (3.3) следует, что функции из $I^-(S_n)$ линейно независимы (если $\sum\limits_{\varphi\in I^-(S_n)} c_\varphi\varphi = 0$ с $c_\varphi\in\mathbb{C}$, то $c_\psi = \big(\sum\limits_{\varphi\in I^-(S_n)} c_\varphi\varphi, \psi\big)_{S_n^-} = 0$ для всех $\psi\in I^-(S_n)$). Таким образом, из (3.1)–(3.3) следует, что $I^-(S_n)$ есть ортонормированный базис в $\mathrm{CF}(S_n^-)$.

Предложение 3.1 доказано.

**Следствие.** *Число классов сопряженных элементов группы $S_n$, содержащихся в $S_n^-$, равно $|\{\alpha\in P(n) \mid \alpha > \alpha'\}|$.*

Доказательство. Если $S_n^-$ состоит из $s$ классов сопряженных элементов группы $S_n$ с представителями $g_1,\dots,g_s$, то пространство $\mathrm{CF}(S_n^-)$ содержит $s$ функций $\xi_1,\dots,\xi_s$ таких, что $\xi_i(g_j) = \delta_{ij}$ при $\{i,j\}\subseteq\{1,\dots,s\}$, которые, очевидно, образуют его базис. Отсюда и из предложения 3.1 следует, что $s = |I^-(S_n)| = |\{\alpha\in P(n)\mid\alpha>\alpha'\}|$ $(= \frac{1}{2}|\{\alpha\in P(n)\mid\alpha\neq\alpha'\}|)$.

Следствие доказано.

Замечание. Пусть, как и выше, $S_n^-$ состоит из $s$ классов сопряженных элементов группы $S_n$ с представителями $g_1,\dots,g_s$. По следствию $|I^-(S_n)| = s$, и, положив $I^-(S_n) = \{\chi_1,\dots,\chi_s\}$, мы можем рассмотреть $s\times s$-матрицу

$$X = X(S_n^-) \text{ с элементами } X_{ij} = \chi_i(g_j).$$

Имеются некоторые основания назвать ее *таблицей характеров* смежного класса $S_n^-$. Соотношения (3.2) и (3.3), которые можно записать в виде

$$\sum_{l=1}^{s}|g_l{}^{S_n}|\chi_i(g_l)\overline{\chi_j(g_l)} = \frac{n!}{2}\delta_{ij},$$

играют роль первого соотношения ортогональности этой таблицы. Можно доказать для нее и «второе соотношение ортогональности»:

$$\sum_{l=1}^{s}\chi_l(g_i)\overline{\chi_l(g_j)} = \frac{|C_{S_n}(g_i)|}{2}\delta_{ij}.$$

Интересно, что при $n \in \{2,3,4,5\}$ матрица $X(S_n^-)$ совпадает (при некотором упорядочении строк и столбцов) с таблицей характеров группы $S_{n-2}$. При бóльших $n$ эта закономерность нарушается, но возможно, что существует некоторая другая, учитывающая какие-либо свойства группы $S_n$.

## § 4. Доказательство теоремы

Для доказательства теоремы нам необходима следующая лемма из [3]. Для удобства читателя приведем ее доказательство.

**Лемма 4.1** [3, лемма 3.3]. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$, где $\varepsilon \in \{1,-1\}$. Предположим, что $[\alpha]$ или $[\beta]$ имеет крюк некоторой длины $m$. Тогда*

$$\sum_{H \in \mathrm{H}^\alpha(m)} (-1)^{l_H} \chi^{\alpha - H} \sim \sum_{K \in \mathrm{H}^\beta(m)} (-1)^{l_K} \chi^{\beta - K} \text{ на } S_{n-m}^\delta, \text{ где } \delta = (-1)^{m+1}\varepsilon.$$

(*Как обычно, пустая сумма считается равной нулю.*)

Доказательство. Рассмотрим множество всех элементов группы $S_n$ вида $z \times x$, где $x \in S_{n-m}$ и $z$ — фиксированная циклическая перестановка $m$ элементов $n-m+1, \ldots, n$. По предложению 1.2

$$\chi^\alpha(z \times x) = \sum_{H \in \mathrm{H}^\alpha(m)} (-1)^{l_H} \chi^{\alpha - H}(x), \quad \chi^\beta(z \times x) = \sum_{K \in \mathrm{H}^\beta(m)} (-1)^{l_K} \chi^{\beta - K}(x).$$

Очевидно, $\mathrm{sign}(z \times x) = (-1)^{m+1} \,\mathrm{sign}(x)$, и потому

$$z \times x \in S_n^\varepsilon, \text{ если и только если } x \in S_{n-m}^\delta, \text{ где } \delta = (-1)^{m+1}\varepsilon.$$

Следовательно, при любом $x \in S_{n-m}^\delta$ правые части приведенных выше равенств могут быть равны нулю только одновременно, поскольку по условию леммы левые части обладают этим свойством.

Лемма 4.1 доказана.

Приступим к доказательству теоремы, считая выполненным ее условие. Пусть $l$ — число крюков длины $m$ в $[\alpha]$ и $\mathrm{H}^\alpha(m) = \{H_1, \ldots, H_l\}$. Положим

$$\alpha_i := \alpha - H_i \text{ и } \nu_i := l_{H_i} \text{ при } i \in \{1, \ldots, l\}.$$

Тогда по предложению 2.2

$$\alpha_i \neq \alpha_j \text{ при } i \neq j. \tag{4.1}$$

Далее, по лемме 4.1

$$\sum_{i=1}^{l} (-1)^{\nu_i} \chi^{\alpha_i} \sim 0 \text{ на } S_{n-m}^\delta, \text{ где } \delta = (-1)^{m+1}\varepsilon \tag{4.2}$$

(здесь 0 — нулевой обобщенный характер группы $S_{n-m}$).

Пусть $N$ — множество всех крюков $H_i$ из $\mathrm{H}^\alpha(m)$ таких, что $\alpha_i \neq (\alpha_i)'$. Предположим, что нумерация крюков $H_i$ выбрана так, что $N = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ $(0 \leq s \leq l)$, т. е. в $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ первые $s$ разбиений не самоассоциированы, а остальные $l-s$ разбиений самоассоциированы. Согласно предложению 2.1

$$l - s \leq 1. \tag{4.3}$$

Случай 1. Пусть $\varepsilon = (-1)^{m+1}$ (т. е. $\delta = 1$). Тогда утверждение (4.2) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{l}(-1)^{\nu_i}\chi^{\alpha_i}|_{A_{n-m}} = 0. \tag{4.4}$$

Из п. (3) предложения 1.4 следует, что равенство (4.4) равносильно системе следующих равенств:

$$\sum_{i=1}^{s}(-1)^{\nu_i}\chi^{\alpha_i}|_{A_{n-m}} = 0, \tag{4.5}$$

$$\sum_{i=s+1}^{l}(-1)^{\nu_i}\chi^{\alpha_i}|_{A_{n-m}} = 0. \tag{4.6}$$

(При $s = 0$ тривиально (отсутствует) первое равенство, а при $s = l$ — второе.)

Предположим, что $s < l$. Тогда согласно (4.3) $l = s + 1$ и, следовательно, равенство (4.6) равносильно равенству $\chi^{\alpha_l}|_{A_{n-m}} = 0$, что противоречиво.

Следовательно, $s = l$, т. е. $N = \mathrm{H}^{\alpha}(m)$. Поскольку в равенстве (4.5) все ограничения $\chi^{\alpha_i}|_{A_{n-m}}$ принадлежат $\mathrm{Irr}(A_n)$ по п. (1) предложения 1.4 и характеры из $\mathrm{Irr}(A_n)$ линейно независимы, то для каждого индекса $i \in \{1,\dots,s\}$ найдется отличный от него индекс $j \in \{1,\dots,s\}$ такой, что

$$(-1)^{\nu_i}\chi^{\alpha_i}|_{A_{n-m}} + (-1)^{\nu_j}\chi^{\alpha_j}|_{A_{n-m}} = 0.$$

Отсюда и из п. (1) предложения 1.4 следует, что

$$\alpha_i =' \alpha_j \text{ и } \nu_i + \nu_j \text{ нечетно.} \tag{4.7}$$

Согласно предложению 2.1 и его следствию из (4.7) получаем $\alpha_i = \alpha_j'$, $\alpha = \alpha'$, $\nu_i + \nu_j = m - 1$, и тем самым $m$ четно и $\varepsilon = -1$. Кроме того, из $\alpha = \alpha'$ следует, что $\chi^{\alpha}$ исчезает на $S_n^-$ по п. (5) предложения 1.1, а так как $\chi^{\alpha} \sim \chi^{\beta}$ на $S_n^-$, то $\chi^{\beta}$ исчезает на $S_n^-$, и снова по п. (5) предложения 1.1 $\beta = \beta'$.

Таким образом, в случае 1 верно утверждение (2) теоремы при четном $m$ (где $H$ и $K$ выступают в роли $H_i$ и $H_j$).

Случай 2. Пусть $\varepsilon = (-1)^m$ (т. е. $\delta = -1$).

Если $s = 0$, то ввиду (4.3) выполнено утверждение (1) теоремы.

Пусть $s > 0$. Так как по п. (5) предложения 1.1 $\chi^{\alpha_i}|_{S^-_{n-m}} = 0$ для самоассоциированных $\alpha_i$, равенство (4.2) равносильно равенству

$$\sum_{i=1}^{s}(-1)^{\nu_i}\chi^{\alpha_i}|_{S^-_{n-m}} = 0. \tag{4.8}$$

Положим $\widetilde{\alpha}_i := \alpha_i$, если $\alpha_i > (\alpha_i)'$, и $\widetilde{\alpha}_i := (\alpha_i)'$, если $\alpha_i < (\alpha_i)'$. Во втором случае согласно п. (4) предложения 1.1 $\chi^{\alpha_i} = -\chi^{\widetilde{\alpha}_i}$. Поэтому (4.8) равносильно равенству

$$\sum_{i=1}^{s}\mu_i\chi^{\widetilde{\alpha}_i}|_{S^-_{n-m}} = 0, \quad \text{где } \mu_i = \pm 1. \tag{4.9}$$

Значение $\mu_i$ здесь можно указать точнее:

$$\mu_i = (-1)^{\nu_i}\sigma_i, \quad \text{где } \sigma_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_i > (\alpha_i)', \\ -1, & \text{если } \alpha_i < (\alpha_i)'. \end{cases} \tag{4.10}$$

Поскольку в равенстве (4.9) все функции $\chi^{\widetilde{\alpha}_i}|_{S^-_{n-m}}$ лежат в $I^-(S_n)$, а согласно предложению 3.1 элементы из $I^-(S_n)$ линейно независимы, то из этого равенства следует, что $s$ четно и для каждого индекса $i \in \{1,\dots,s\}$ найдется отличный от него индекс $j \in \{1,\dots,s\}$ такой, что

$$\mu_i\chi^{\widetilde{\alpha}_i}|_{S^-_{n-m}} + \mu_j\chi^{\widetilde{\alpha}_j}|_{S^-_{n-m}} = 0,$$

и, следовательно,

$$\widetilde{\alpha}_i = \widetilde{\alpha}_j \text{ и } \mu_i = -\mu_j. \tag{4.11}$$

Из (4.10) и второго равенства в (4.11) вытекает, что

$$(-1)^{\nu_i+\nu_j} = -\sigma_i\sigma_j, \tag{4.12}$$

а из первого равенства в (4.11) — что

$$\alpha_i =' \alpha_j.$$

Согласно предложению 2.2 отсюда $\alpha_i = (\alpha_j)'$, и ввиду следствия этого предложения $\alpha = \alpha'$ и $\nu_i + \nu_j = m - 1$. Кроме того, из $\alpha_i = (\alpha_j)'$ следует, что $\sigma_i = -\sigma_j$ и по (4.13) $\nu_i + \nu_j$ четно. Итак, $\alpha = \alpha'$, $\sigma_i = -\sigma_j$, $m$ нечетно и $\varepsilon = -1$.

Таким образом, в случае 2 выполнено или условие (1), или условие (2) с нечетным $m$.

Теорема доказана.

## § 5. Примеры

Рассмотрим некоторые примеры, показывающие возможности применения теоремы и ее следствий.

Пример 1. Рассмотрим разбиения $\alpha = (2 + a, 2, 1^a)$ и $\beta = (a, a, 2, 1^2)$ числа $n = 2a + 4$, где $a > 2$. Предположим, что

$$\chi^\alpha \sim \chi^\beta \text{ на } A_n. \tag{5.1}$$

Диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ изображены на рис. 3.

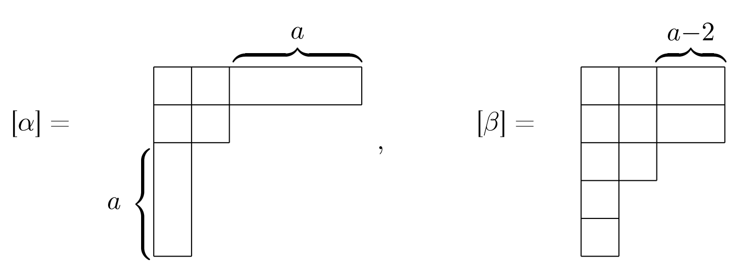



Рис. 3.

Легко увидеть, что диаграмма $[\alpha]$ имеет точно два крюка $H^\alpha_{12}$ и $H^\alpha_{21}$ длины $a + 2$, а диаграмма $[\beta]$ не имеет крюков такой длины $\big(h^\beta_{12} = a + 1,\ h^\beta_{21} = a + 3,\ h^\beta_{22} = a,\ h^\beta_{31} = 4\big)$. Поэтому к изучению ситуации (5.1) можно применить лемму 2 при $\varepsilon = 1$ $\big(A_n = S^+_n\big)$ и $m = a + 2$. Тогда при $H = H^\alpha_{12}$ и $K = H^\alpha_{21}$ должно быть выполнено одно из утверждений (1) и (2) этой леммы. Из рис. 3 видно, что $\alpha^{12} = (\alpha^{21})' \neq \alpha^{21}$ и $l_{H_{12}} + l_{H_{21}} = 1 + a$. Поэтому утверждение (1) леммы 2 не может быть выполнено, так как одновременно не могут быть верны соотношения: $1 = (-1)^{a+1}$ и $a+1$ нечетно. Значит, должно быть верно ее утверждение (2), т. е. $1 = (-1)^a$. Таким образом, применение леммы 2 в ситуации (5.1) дает лишь одно ограничение: $a$ четно.

Теперь к изучению ситуации (5.1) применим следствие 1. Поскольку по условию $\varepsilon = 1$, заключение этого следствия здесь не может быть выполнено. Таким образом, применение к ситуации (5.1) следствия 1 дает больший эффект: ситуация (5.1) невозможна.

(Вместо следствия 1 здесь можно было применить и следствие 4.)

Пример 2. Предположим, что

$$\chi^\alpha \sim \chi^\beta \text{ на } S_n^\varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1), \tag{5.2}$$

где $\alpha = (3+a, 3, 3, 1^b)$ и $\beta = (4+c, 4, 2, 1^c)$ $(a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. Здесь $n = 9+a+b = 10+2c$ и, в частности,

$$a + b = 1 + 2c \text{ и без ограничения общности } a > b. \tag{5.3}$$

Из таблиц характеров групп $S_{10}$ и $S_{11}$ видно, что при $c \leq 1$ ситуация (5.2) для данных $\alpha$ и $\beta$ невозможна. Поэтому далее мы считаем, что

$$c \geq 2. \tag{5.4}$$

Рассмотрим диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ (рис. 4).

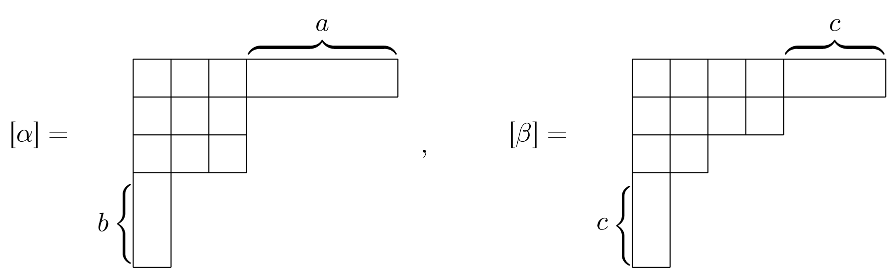



Рис. 4.

Так как $\alpha \neq \alpha'$ и диаграмма $[\alpha]$ имеет крюк $H_{12}^\alpha$ длины $4+a$ такой, что разбиение $\alpha^{12} = (2^2, 1^{1+b})$ не самоассоциировано, согласно следствию 3 диаграмма $[\beta]$ также имеет крюк длины $4+a$. Главный крюк $H_{11}^\beta$, очевидно, имеет бо́льшую длину, а наибольшая из длин других крюков в $[\beta]$ есть $5+c$ $(= h_{12}^\beta = h_{21}^\beta)$. Поскольку $a \geq c+1$ по (5.3), отсюда следует, что $4+a = 5+c$, т. е. $a = 1+c$ и $b = c$. Далее, диаграмма $[\beta]$ имеет крюк $H_{31}^\beta$ длины $2+c = 2+b = 1+a$, причем $\beta^{31}$ не является самоассоциированным. Так как $\beta \neq \beta'$, снова по следствию 3 (но уже с переменой ролей $\alpha$ и $\beta$) диаграмма $[\alpha]$ должна иметь крюк длины $2+b = 1+a = 2+c \geq 4$ (неравенство следует из (5.4)). Однако это противоречиво, что видно из рис. 4.

Таким образом, ситуация (5.2) при данных $\alpha$ и $\beta$ невозможна.

Пример 3. Предположим, что $\chi^\alpha \sim \chi^\beta$ на $S_n^\varepsilon$ $(\alpha, \beta \in P(n),\ \varepsilon = \pm 1)$, где разбиение $\beta$ не имеет крюков длины 2 и $\alpha \neq \alpha'$. Никаких других ограничений на $\alpha$ не накладывается (в частности, $\alpha$ может иметь сколько угодно крюков длины 2). Покажем, что в этом случае $\varepsilon = 1$, $\alpha =' (3)$ и $\beta = (2, 1)$.

Легко увидеть, что отсутствие у $\beta$ крюков длины 2 равносильно тому, что для некоторого $s \geq 1$ $\beta = (s, s-1, \dots, 2, 1)$ (т. е. каждая следующая строка диаграммы $[\beta]$ на единицу меньше предыдущей; рис. 5) и, следовательно, $n = \frac{(s+1)s}{2}$. В частности, $\beta = \beta'$. Поскольку $\alpha \neq \alpha'$, то $\alpha$ должно иметь крюки длины 2.

Следовательно, в рассматриваемой ситуации можно применить теорему настоящей статьи при $m = 2$. Так как $\alpha \neq \alpha'$, должно быть выполнено первое утверждение теоремы, т. е. $\varepsilon = (-1)^m = 1$ и

$$\mathrm{H}^{\alpha}(2) = \{H\}, \quad \text{где } \alpha - H \text{ самоассоциировано.} \tag{5.5}$$

Без ограничения общности (поскольку мы можем поменять местами $\alpha$ и $\alpha'$) будем считать, что $H$ есть крюк-строка. Тогда $H$ — объединение двух клеток $(i, j)$ и $(i, j+1)$ при некоторых $i, j$. Предположим, что $i > 1$. Обозначим через $b_l$ длину $l$-го столбца диаграммы $[\alpha]$ ($l \geq 1$). Так как $H$ — единственный крюк длины 2 в $[\alpha]$ (по (5.5)), очевидно, последовательности $(b_1, \dots, b_j)$ и $(b_{j+1}, \dots, b_k)$ длин столбцов с первого по $j$-й и с $(j+1)$-го по последний представляют собой арифметические прогрессии с разностью единица, $b_j = b_{j+1}$ и $b_k = 1$. Но тогда в $[\alpha]$ число столбцов на единицу больше, чем число строк, а это противоречит самоассоциированности диаграммы $[\alpha - H]$. Поэтому крюк $H$ расположен в первой строке диаграммы $[\alpha]$. Отсюда и из (5.5) следует, что

$$\alpha = \gamma + (2), \quad \text{где } \gamma = \gamma' \in P(n-2). \tag{5.6}$$

(Как обычно, последовательности складываются покомпонентно: если в (5.6) $\gamma = (c_1, \dots, c_k)$, то $\alpha = (c_1 + 2, c_2, \dots, c_k)$, см. рис. 5.)

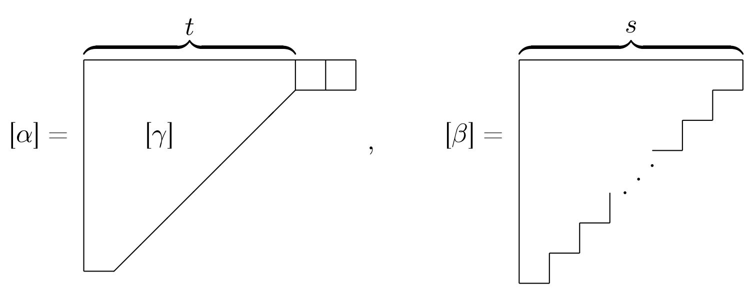



Рис. 5.

Теперь из (5.5) и (5.6) следует, что $\gamma$ не имеет крюков длины 2 и, значит, $\gamma = (t, t-1, \dots, 2, 1)$ при некотором $t \geq 1$. Поэтому $n = \frac{(s+1)s}{2} = \frac{(t+1)t}{2} + 2$, где $t \leq s - 1$, откуда $(s+1)s = (t+1)t + 4 \leq s(s-1) + 4$, $s \leq 2$ и тогда $s = 2$, $t = 1$, $\alpha = (3)$ и $\beta = (2, 1)$.

Итак, мы доказали, что если $\chi^{\alpha} \sim \chi^{\beta}$ на $S_n^{\varepsilon}$, где $\alpha \neq \alpha'$ и $\beta$ не имеет крюков длины 2, то $\varepsilon = 1$, $\alpha =' (3)$ и $\beta = (2, 1)$.

Из таблицы характеров группы $S_3$ видно, что верно и обратное утверждение: $\chi^{(3)} \sim \chi^{(2,1)}$ на $A_n$.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Белоногов В. А.* О неприводимых характерах групп $S_n$ и $A_n$ // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 977–994.

**2.** *Белоногов В. А.* О равнокорневых неприводимых характерах групп $S_n$ и $A_n$ // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 1. С. 3–25.

**3.** *Белоногов В. А.* О некоторых парах неприводимых характеров групп $S_n$ и $A_n$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 1. С. 11–43.

**4.** *Белоногов В. А.* О малых взаимодействиях в конечных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 3–18.

**5.** *Белоногов В. А.* Малые взаимодействия в группах $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$, $\mathrm{PGL}_3(q)$ и $\mathrm{PGU}_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 17–47.

**6.** *Белоногов В. А.* Малые взаимодействия в группах $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$, $\mathrm{PSL}_3(q)$ и $\mathrm{PSU}_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 3–27.

**7.** *Белоногов В. А.* О нулях в таблицах характеров групп $S_n$ и $A_n$ // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 24–43.

**8.** *Белоногов В. А.* О нулях в таблицах характеров групп $S_n$ и $A_n$. II // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 643–663.

**9.** *Белоногов В. А.* Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990.

**10.** *James G., Kerber A.* The representation theory of the symmetric group. London: Addison-Wesley, 1981.

**11.** *Джеймс Г.* Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982.


*Статья поступила 22 мая 2007 г.*

Белоногов Вячеслав Александрович
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620219
belonogov@imm.uran.ru