Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 512.55

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДАЛГЕБР В СВОБОДНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

В. М. Петроградский, А. А. Смирнов

Аннотация. Пусть L — конечно порожденная ограниченная алгебра Ли над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Обозначим через $a_n(L)$ число ограниченных подалгебр $H \subseteq L$ таких, что $\dim_{\mathbb{F}_q} L/H = n$, $n \geq 0$. Пусть $\tilde{a}_n(L)$ — число подалгебр, которые дополнительно удовлетворяют условию максимальности. Для свободной ограниченной алгебры Ли $L = F_d$ ранга $d \geq 2$ установлена асимптотика для $\tilde{a}_n(F_d)$ и показано, что она совпадает с асимптотикой для $a_n(F_d)$, найденной первым автором ранее. Подход основан на изучении действий ограниченных алгебр дифференцированиями на кольцах срезанных многочленов. Установлено, что максимальным подалгебрам соответствуют так называемые примитивные действия. Полученный результат означает, что «почти все» ограниченные подалгебры конечной коразмерности $H \subset F_d$ максимальны. Он аналогичен соответствующим результатам для свободных групп и свободных ассоциативных алгебр.

Ключевые слова: ограниченная алгебра Ли, алгебра Витта, коалгебра, перечислительная комбинаторика, рост подгрупп.

§ 1. Введение

Понятие *роста подгрупп* нашло многочисленные применения в теории групп [1]. Пусть G — конечно порожденная группа. Для натурального числа n обозначим через $a_n(G)$ число подгрупп в G индекса n. Данные числа действительно конечны, возникает последовательность *роста подгрупп* $a_n(G)$, $n \geq 1$. В [2] найдены точные рекуррентные соотношения и вычислена асимптотика для последовательности $a_n(G_d)$, где G_d — свободная группа конечного ранга d. Имеет место неравенство $a_n(G) \leq a_n(G_d)$, $n \geq 1$, где G — произвольная d-порожденная группа. Рассматривается также последовательность $\tilde{a}_n(G)$, равная числу *максимальных* подгрупп индекса n. Если G_d — свободная группа конечного ранга $d > 1$, то $a_n(G_d) \approx \tilde{a}_n(G_d)$ при $n \to \infty$ [1]. Иными словами, «почти все» подгруппы конечного индекса в G_d максимальны.

Имеют место аналогичные утверждения для следующих двух классов алгебраических объектов. Во-первых, пусть L — конечно порожденная ограниченная алгебра Ли над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Пусть $a_m(L)$ — число ограниченных подалгебр $H \subseteq L$ таких, что $\dim_{\mathbb{F}_q}(L/H) = m$, $m \geq 0$. Райли и Ташич доказали, что числа $a_m(L)$ конечны [3]. Таким образом, возникает последовательность *роста подалгебр* $a_m(L)$, $m \geq 0$. Оценки, найденные в работе [3], достаточно велики. Первым автором найдены точные рекуррентные формулы и вычислена асимптотика для последовательности $a_m(F_d)$, где F_d — свободная ограниченная алгебра Ли конечного ранга над конечным полем [4]. Доказано также, что

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00080).

$a_n(L) \leq a_n(F_d)$, $n \geq 0$, где L — произвольная d-порожденная ограниченная алгебра Ли [4].

Во-вторых, пусть A — конечно порожденная ассоциативная алгебра над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Определим последовательность *роста односторонних идеалов* $a_n(A)$ как число левых идеалов $J \subset A$ таких, что $\dim_{\mathbb{F}_q}(A/J) = n$, $n \geq 1$. Аналогично определим последовательность роста односторонних *максимальных* идеалов $\tilde{a}_n(A)$. Пусть A_d — свободная ассоциативная алгебра ранга d. Первым автором найдены рекуррентные соотношения для $a_n(A_d)$, доказано, что $a_n(A) \leq a_n(A_d)$ для произвольной d-порожденной ассоциативной алгебры A [5]. Вычислены также асимптотики и доказано, что $a_n(A_d) \approx \tilde{a}_n(A_d)$, $n \to \infty$, если $d > 1$ [5]. Иными словами, «почти все» односторонние идеалы $J \subset A_d$, где $d > 1$, максимальны. По-видимому, причина возникновения этих аналогий состоит в том, что свободная ассоциативная алгебра так же, как свободные группы и свободные алгебры Ли, является Шрайеровым объектом в следующем смысле: всякий односторонний идеал $J \subset A_d$ является свободным модулем над A_d.

Сформулируем основной результат работы [4].

Теорема 1 [4]. *Пусть F_d — свободная ограниченная алгебра Ли ранга $d \geq 1$ над полем $\mathbb{F}_q$. Обозначим $a_n = a_n(F_d)$ для $n \geq 0$. Тогда*

(1) $a_0 = 1$ *и имеет место следующая рекуррентная зависимость при $n \geq 1$:*

$$a_n = q^{(d-1)np^n+n}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-q^{-i}} - \sum_{m=1}^{n} a_{n-m}\frac{q^{-(d-1)np^{n-m}-n}}{\prod\limits_{i=1}^{m}(1-q^{-i})}\right);$$

(2) *в случае $d \geq 2$ выполняется следующая асимптотика:*

$$a_n = \theta q^{(d-1)np^n+n}\left(1 - \frac{q^{-n}}{q-1} + O(q^{-2n})\right),\ n \to \infty, \quad \theta = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{-i}};$$

(3) *пусть L — произвольная d-порожденная p-алгебра Ли, тогда $a_n(L) \leq a_n(F_d)$ для всех $n \geq 0$.*

Пусть также $\tilde{a}_m(L)$ — число *максимальных* (по включению) ограниченных подалгебр $H \subseteq L$ таких, что $\dim_{\mathbb{F}_q}(L/H) = m$, где $m \geq 0$. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема, перечисляющая максимальные подалгебры в свободных ограниченных алгебрах Ли.

Теорема 2. *Пусть F_d — свободная ограниченная алгебра Ли ранга $d \geq 2$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики $p > 0$. Тогда*

(1) $\tilde{a}_n(F_d) = a_n(F_d)(1 + O(q^{-p^{n-1}}))$, $\quad n \to \infty$;

(2) *имеет место асимптотика*

$$\widetilde{a}_n(F_d) = \theta q^{(d-1)np^n+n}\left(1 - \frac{q^{-n}}{q-1} + O(q^{-2n})\right),\ n \to \infty,\ \text{где } \theta = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{-i}};$$

(3) *пусть L — произвольная ограниченная d-порожденная алгебра Ли, тогда $\tilde{a}_n(L) \leq \tilde{a}_n(F_d)$, $n \geq 0$.*

Тот факт, что последовательности $a_n(F_d)$ и $\widetilde{a}_n(F_d)$ имеют одинаковую асимптотику, мы интерпретируем следующим образом.

Следствие 1. *Ограниченная подалгебра конечной коразмерности в свободной ограниченной алгебре Ли F_d ранга $d \geq 2$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$ является максимальной с вероятностью* 1.

Полученный результат является аналогом упомянутых выше утверждений для свободных групп [1] и свободных ассоциативных алгебр [5]. Согласно теореме 1 число всех подалгебр растет достаточно быстро. Но из одного этого факта наш основной результат не следует, так как теоретически возможна такая структура подалгебр, число которых быстро растет, однако число максимальных подалгебр конечно.

Структура работы следующая. В § 2 даются основные определения, излагаются методы и результаты работы [4]. Наш подход основан на дальнейшем исследовании действия ограниченных алгебр на кольцах срезанных многочленов дифференцированиями. В § 3 мы доказываем технические леммы о действиях ограниченных алгебр на срезанных многочленах, в § 4 — основной результат.

§ 2. Коалгебры и транзитивные действия

Далее основное поле K всегда имеет характеристику $p > 0$. Пусть L — алгебра Ли. Обозначаем $\operatorname{ad} x: L \to L$, где $\operatorname{ad} x(y) = [x, y]$ для $x, y \in L$.

Определение. Алгебра Ли L называется *ограниченной* (или *p-алгеброй Ли*), если она снабжена дополнительной унарной операцией $x \mapsto x^{[p]}$, $x \in L$, удовлетворяющей следующим условиям:

(1) $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$ для всех $\lambda \in K, x \in L$;

(2) $\operatorname{ad}(x^{[p]}) = (\operatorname{ad} x)^p$ для всех $x \in L$;

(3) $(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x, y)$, где $i s_i(x, y)$ — коэффициент при t^{i-1} в формальном многочлене $\operatorname{ad}(tx + y)^{p-1}(x) \in L[t]$, $x, y \in L$.

Предположим, что L — ограниченная алгебра Ли. Обозначим через J идеал универсальной обертывающей алгебры $U(L)$, порожденный всеми элементами $x^{[p]} - x^p$, где $x \in L$. Фактор-алгебра $u(L) = U(L)/J$ называется *ограниченной обертывающей алгеброй* алгебры L. По поводу свойств ограниченных алгебр см. [6–8]. Все подалгебры в p-алгебрах Ли подразумеваются ограниченными.

Пусть $\{v_i \mid i \in I\}$ — линейно упорядоченный базис L. Тогда по теореме Пуанкаре — Биргкофа — Витта ограниченная обертывающая алгебра имеет следующий канонический базис [7]:

$$u(L) = \left\langle v_{i_1}^{\alpha_1} \cdots v_{i_m}^{\alpha_m} \mid i_1 < \cdots < i_m,\ 0 \leq \alpha_i < p;\ m \geq 0 \right\rangle_K.$$

Также будем записывать эти базисные элементы в виде $v^\alpha = v_{i_1}^{\alpha_1} \cdots v_{i_m}^{\alpha_m}$, где $\alpha = (\alpha_i \mid 0 \leq \alpha_i < p,\ i \in I)$, причем только конечное число компонент α_i ненулевое. Введем обозначения: $|\alpha| = \sum_{i \in I} \alpha_i$, $\alpha! = \prod_{i \in I} \alpha_i!$, $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i \in I} \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

Ограниченная обертывающая алгебра $u(L)$ имеет идеал коразмерности один, называемый *пополняющим идеалом*: $\omega(L) = \langle v^\alpha \mid |\alpha| > 0 \rangle_K$. Пространство $u(L)$ обладает структурой *коалгебры* [9] со следующими *копроизведением* Δ и *коединицей* ϵ:

$$\Delta: u(L) \to u(L) \otimes u(L), \quad \Delta(v^\alpha) = \sum_{\beta + \gamma = \alpha} \binom{\alpha}{\beta} v^\beta \otimes v^\gamma;$$

$$\epsilon : u(L) \to K, \quad \epsilon(v^\alpha) = \begin{cases} 1, & |\alpha| = 0, \\ 0, & |\alpha| > 0. \end{cases}$$

Структура коалгебры на $u(L)$ задает на дуальном пространстве $u(L)^* = \mathrm{Hom}_K(u(L), K)$ структуру алгебры со следующим произведением [10]. Пусть $f, g \in u(L)^*$, тогда

$$(f \cdot g)(a) = (f \otimes g)(\Delta a) = \sum f(a_{(1)}) g(a_{(2)}),$$

где в обозначениях Свидлера $\Delta a = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ для $a \in u(L)$. Дуальная алгебра коалгебры $u(L)$ изоморфна кольцу срезанных многочленов [9]:

$$u(L)^* \cong \mathbf{B}_I[t_i \mid i \in I] = K[t_i \mid i \in I] / \big(t_i^p \mid i \in I\big).$$

Пусть ограниченная алгебра Ли L содержит ограниченную подалгебру $H \subset L$, причем $\dim_K L/H = n$. Выберем базисы $L = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_K \oplus H$ и $H = \langle v_i \mid i \in I \rangle_K$. Зафиксируем на них линейный порядок так, что $x_1 < \dots < x_n < v_i$, $i \in I$. Получаем базис

$$u(L) = \big\langle x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} v_{i_1}^{\gamma_{i_1}} \cdots v_{i_k}^{\gamma_{i_k}} \mid i_1 < \dots < i_k;\ 0 \le \alpha_i, \gamma_j < p;\ k \ge 0 \big\rangle_K.$$

Обозначим символом B коалгебру $u(L)$. Базисные мономы будем записывать в виде $x^\alpha v^\gamma$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\gamma = (\gamma_i \mid i \in I)$. Тогда структура коалгебры B будет задаваться так:

$$\Delta(x^\alpha v^\gamma) = \sum_{\alpha' + \alpha'' = \alpha;\, \gamma' + \gamma'' = \gamma} \binom{\alpha}{\alpha'} \binom{\gamma}{\gamma'} x^{\alpha'} v^{\gamma'} \otimes x^{\alpha''} v^{\gamma''}; \tag{1}$$

$$\epsilon(x^\alpha v^\gamma) = \begin{cases} 1, & |\alpha| = |\gamma| = 0, \\ 0, & |\alpha| + |\gamma| > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим пространство $J = u(L) \cdot \omega(H) = \langle x^\alpha v^\gamma \mid |\gamma| \ge 1 \rangle_K = u(L) \cdot H$. Это коидеал в B, т. е. $\Delta(J) \subset J \otimes B + B \otimes J$ и $\epsilon(J) = 0$ (следует из (1) и (2) и построения J). Возникает структура фактор-коалгебры на пространстве B/J (см. [9]):

$$\Delta : B/J \to B/J \otimes B/J \cong (B \otimes B)/(J \otimes B + B \otimes J);$$

$$\epsilon : B/J \to K, \quad \epsilon(x + J) = \epsilon(x),\ x \in B.$$

Пространство $B/J = u(L)/u(L)H$ будем обозначать через $u(L/H)$, имея в виду полученную структуру коалгебры (и только ее). Обозначим также $\bar{x}^\alpha = x^\alpha + J \in u(L/H)$. Получаем базис

$$u(L/H) = \langle \bar{x}^\alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ 0 \le \alpha_i < p \rangle_K, \quad \dim_K u(L/H) = p^n,$$

причем структура коалгебры выглядит так:

$$\Delta(\bar{x}^\alpha) = \sum_{\beta + \gamma = \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \bar{x}^\beta \otimes \bar{x}^\gamma, \quad \epsilon(\bar{x}^\alpha) = \begin{cases} 1, & |\alpha| = 0, \\ 0, & |\alpha| > 0. \end{cases}$$

Определение. Линейное отображение $\phi : C \to C$ на коалгебре C называется *дифференцированием*, если для всех $c \in C$, $\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ выполняется

$$\Delta(\phi(c)) = \sum(\phi(c_{(1)}) \otimes c_{(2)} + c_{(1)} \otimes \phi(c_{(2)})).$$

Рассмотрим действие алгебры L на $C = u(L)/J$, задаваемое умножением слева, где $J = u(L)H$. А именно, пусть $z \in L$, $\bar{v} = v + J \in u(L)/J$, тогда задаем действие так: $z * \bar{v} = zv + J$. Это приводит также к действию на дуальной алгебре C^*. А именно, рассмотрим естественное отображение $\langle\ ,\ \rangle : C^* \times C \to K$. Пусть $f \in C^*$, $z \in L$, тогда полагаем $\langle z * f, w\rangle = -\langle f, z * w\rangle$ для $w \in C$. Отображение $x \mapsto -x$, $x \in L$, продолжается до антиавтоморфизма $v \mapsto v^T$, $v \in u(L)$. Получаем $\langle v * f, w\rangle = \langle f, v^T * w\rangle$ для $v \in u(L)$, $w \in C$.

Аналогично всякий линейный оператор на коалгебре $\phi : C \to C$ задает отображение на двойственной алгебре $\phi^* : C^* \to C^*$, причем ϕ — дифференцирование тогда и только тогда, когда ϕ^* является дифференцированием [9].

Введем стандартную коалгебру $\mathbf{C}_n = \mathbf{C}[c_1, \dots, c_n]$. Ее базис состоит из символов $c^\alpha = c_1^{\alpha_1} \cdots c_n^{\alpha_n}$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $0 \le \alpha_i < p$. Элемент, соответствующий набору $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, обозначаем через $1 \in \mathbf{C}_n$. Коумножение и коединица в ней определяются так:

$$\Delta(c^\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} c^\beta \otimes c^\gamma; \quad \epsilon(c^\alpha) = \begin{cases} 1, & |\alpha| = 0, \\ 0, & |\alpha| > 0. \end{cases}$$

Определение. Пусть L — ограниченная алгебра Ли. Будем говорить, что *L действует на* $\mathbf{C}_n$, если задан гомоморфизм $L \to \operatorname{Der} \mathbf{C}_n$. Это действие обозначаем через $a * c$, где $a \in u(L)$, $c \in \mathbf{C}_n$. Будем называть действие *транзитивным*, если и только если $u(L) * 1 = \mathbf{C}_n$, где $1 \in \mathbf{C}_n$.

Рассмотрим кольцо срезанных многочленов

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{B}_n(K) = K[t_1, \dots, t_n]/(t_1^p, \dots, t_n^p).$$

Это локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}(\mathbf{B}_n)$, натянутым на мономы ненулевой степени. Множество всех дифференцирований кольца $\mathbf{B}_n$ образует простую ограниченную алгебру Ли, которая называется *алгеброй Витта* $\mathbf{W}_n$ [8]. Она имеет следующий базис:

$$\operatorname{Der} \mathbf{B}_n = \mathbf{W}_n = \left\langle t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n} \frac{\partial}{\partial t_j} \mid 0 \le \alpha_i < p,\ 1 \le j \le n \right\rangle_K. \tag{3}$$

Сформулируем также необходимые нам результаты работы [4].

Лемма 1 [4, лемма 3.2]. *Пусть $H \subset L$ — ограниченная подалгебра коразмерности n. Пусть C^* — дуальная алгебра к коалгебре $C = u(L/H)$. Тогда*

(1) *$C \cong \mathbf{C}_n$;*

(2) *$C^* \cong \mathbf{B}_n$;*

(3) *$\operatorname{Der} C \cong \operatorname{Der} C^* \cong \mathbf{W}_n$;*

(4) *действие L на $u(L/H)$ левыми умножениями индуцирует дифференцирования C и C^*;*

(5) *L действует транзитивно на $u(L/H)$;*

(6) *$H = \operatorname{Ann}_L(1) = \{x \in L \mid x * 1 = 0\}$.*

Заметим, что свойства (1)–(3) позволяют говорить о действии алгебры L на $\mathbf{C}_n$ как о действии алгебры L на $\mathbf{B}_n$.

Лемма 2 [4, лемма 3.7]. *Пусть p-алгебра Ли L действует дифференцированиями на $\mathbf{C}_n$ (или, что эквивалентно, на $\mathbf{B}_n$). Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *L действует транзитивно на $\mathbf{C}_n$;*

(2) *в L найдется ограниченная подалгебра $H \subset L$ такая, что $\dim L/H = n$, причем имеет место изоморфизм коалгебр и L-модулей $u(L/H) \cong \mathbf{C}_n$.*

(3) *$\mathbf{B}_n$ — L-простая алгебра (т. е. не имеет нетривиальных L-инвариантных идеалов).*

§ 3. Действия на срезанных многочленах

Докажем несколько технических лемм о действиях ограниченных алгебр на срезанных многочленах.

Лемма 3. *Пусть $h(m,k)$ — число различных вложений $\mathbf{B}_k$ в $\mathbf{B}_m$ над полем $\mathbb{F}_q$, где $k \in \{1,\dots,m-1\}$. Обозначим $\theta = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^{-j})^{-1}$. Имеет место оценка*

$$h(m,k) < \theta q^{(p^m-p^k)k}.$$

Доказательство. Посчитаем число всевозможных различных вложений $\phi : \mathbf{B}_k(x_1,\dots,x_k) \hookrightarrow \mathbf{B}_m(t_1,\dots,t_m)$. Имеем

$$\phi(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} t_j + z_{i,j}, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{F}_q,\ z_{ij} \in \mathfrak{m}^2(\mathbf{B}_m),\ i = 1,\dots,k;$$

$$\operatorname{rank}(\alpha_{ij} \mid 1 \le i \le k, 1 \le j \le m) = k.$$

Мы выбираем k линейно независимых векторов $(\alpha_{i1},\dots,\alpha_{im}) \in \mathbb{F}_q^m$, где $i = 1,\dots,k$, следующим числом способов:

$$(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{k-1}).$$

Идеал $\mathfrak{m}^2(\mathbf{B}_m)$ состоит из элементов степени не менее 2, и $\dim_{\mathbb{F}_q} \mathfrak{m}^2(\mathbf{B}_m) = p^m - m - 1$. Поэтому слагаемые z_{ij} выбираются следующим числом способов: $(q^{p^m-m-1})^k$. В итоге получим такое число возможностей для выбора $\phi(x_i)$, $i = 1,\dots,k$:

$$(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{k-1})q^{(p^m-m-1)k}. \tag{4}$$

Однако не только данная система векторов порождает подалгебру $\phi(\mathbf{B}_k)$. Количество таких систем векторов, порождающих эту же подалгебру, получаем, положив m равным k. Это же число нам дает порядок группы автоморфизмов алгебры $\mathbf{B}_k$:

$$|\operatorname{Aut}\mathbf{B}_k| = (q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})q^{(p^k-k-1)k}. \tag{5}$$

Таким образом, количество вложений можно получить, разделив (4) на (5):

$$\begin{aligned} h(m,k) &= \frac{(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})} q^{(p^m-p^k-m+k)k} \\ &= \frac{(1-q^{-m})(1-q^{1-m})\cdots(1-q^{k-1-m})}{(1-q^{-k})(1-q^{-k+1})\cdots(1-q^{-1})} q^{(m-k)k} q^{(p^m-p^k-m+k)k} \\ &\le \frac{q^{(p^m-p^k)k}}{\prod_{j=1}^{k}(1-q^{-j})} < \theta q^{(p^m-p^k)k}. \end{aligned}$$

Лемма 4. *Пусть $L = L(a_1, \dots, a_d)$ — ограниченная d-порожденная алгебра Ли над $\mathbb{F}_q$. Рассмотрим действия $\phi : L \to \operatorname{Der} \mathbf{B}_m(t_1, \dots, t_m)$, которые оставляют инвариантной фиксированную подалгебру $\mathbf{B}_k = \mathbf{B}_k(t_1, \dots, t_k) \subset \mathbf{B}_m$, где $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Тогда для числа таких действий имеем оценку $g(m,k) \le q^{dmp^m - dk(p^m - p^k)}$.*

Доказательство. Из инвариантности подалгебры $\mathbf{B}_k$ имеем $\phi(a_i)(t_j) = f_j^{(i)} \in \mathbf{B}_k(t_1, \dots, t_k)$ для всех $i = 1, \dots, d$ и $j = 1, \dots, k$. Получаем

$$\phi(a_i) = \sum_{j=1}^{k} f_j^{(i)}(t_1, \dots, t_k) \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{j=k+1}^{m} f_j^{(i)}(t_1, \dots, t_k, \dots, t_m) \frac{\partial}{\partial t_j}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Первое слагаемое является суммой дифференцирований вида $\lambda_{\alpha,j} t_1^{\alpha_1} \cdots t_k^{\alpha_k} \frac{\partial}{\partial t_j}$, где $\lambda_{\alpha,j} \in \mathbb{F}_q$, $0 \le \alpha_i < p$, $1 \le j \le k$, количество таких слагаемых не больше чем q^{kp^k}. Аналогично вторую сумму можно выбрать не более чем $q^{(m-k)p^m}$ способами. Вспоминая, что L имеет d порождающих, получаем оценку

$$g(m,k) \le (q^{kp^k} q^{(m-k)p^m})^d = q^{dmp^m - dk(p^m - p^k)}.$$

Лемма 5. *Пусть $L = L(a_1, \dots, a_d)$ — ограниченная d-порожденная алгебра Ли над $\mathbb{F}_q$, $d \ge 2$. Пусть $c_m(L)$ — число гомоморфизмов $\phi : L \to \operatorname{Der} \mathbf{B}_m(t_1, \dots, t_m)$ таких, что существует инвариантная подалгебра $B \subset \mathbf{B}_m$, причем $B \cong \mathbf{B}_k$ для некоторого $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Тогда имеет место оценка*

$$c_m(L) \le q^{dmp^m} O(q^{-p^{m-1}}), \quad m \to \infty.$$

Доказательство. Из двух предыдущих лемм имеем

$$c_m \le \sum_{k=1}^{m-1} h(m,k) g(m,k) \le \theta q^{dmp^m} \sum_{k=1}^{m-1} q^{-(d-1)k(p^m - p^k)}.$$

Заметим, что $f(k) = (d-1)k(p^m - p^k) \ge p^m - p^k$, где $k = 1, \dots, m-1$. Поскольку правая часть строго монотонна, достаточно рассмотреть оценку первым членом геометрической прогрессии $f(k) \ge p^m - p^{m-1} \ge p^{m-1}$.

§ 4. Перечисление ограниченных подалгебр

Вернемся к нашей задаче по перечислению подалгебр. Пусть L — конечно порожденная ограниченная алгебра Ли над $\mathbb{F}_q$. Пусть $H \subset L$ — ограниченная подалгебра коразмерности n. Тогда возникает действие дифференцированиями на коалгебре $C = u(L/H)$ и соответственно дифференцированиями на ее сопряженной алгебре $C^* \cong \mathbf{B}_n$, причем эти действия транзитивны.

Действия $\psi, \psi' : L \to \operatorname{Der} \mathbf{B}_n$ называем *сопряженными*, если найдется автоморфизм $\tau : \mathbf{B}_n \to \mathbf{B}_n$ такой, что $\psi'(x) = \tau \circ \psi(x) \circ \tau^{-1}$ для всех $x \in L$. Порядок группы автоморфизмов равен (5) (или см. [4]):

$$|\operatorname{Aut} \mathbf{B}_n| = q^{n(p^n - n - 1)} \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i) = q^{np^n - n} \prod_{i=1}^{n} (1 - q^{-i}).$$

Более того, имеет место соответствие, установленное в [4].

Лемма 6 [4, лемма 4.1]. *Пусть L — конечно порожденная ограниченная алгебра Ли над $\mathbb{F}_q$. Тогда*

(1) *существует биективное соответствие между подалгебрами коразмерности n в L и классами сопряженности транзитивных действий L на $\mathbf{B}_n$;*

(2) *количество подалгебр $a_n(L)$ коразмерности n в L и число $b_n(L)$ транзитивных действий $L \to \operatorname{Der} \mathbf{B}_n$ связаны следующим соотношением:*

$$b_n(L) = a_n(L) \cdot |\operatorname{Aut} \mathbf{B}_n|, \quad n \geq 0.$$

Пусть L — p-алгебра Ли и $H \subset L$ — ее собственная ограниченная подалгебра. Предположим, что H не максимальна, т. е. существует ограниченная подалгебра H_0 такая, что все вложения цепочки $H \subset H_0 \subset L$ собственные.

Рассмотрим соответствующие коалгебры $u(L/H)$ и $u(L/H_0)$. Выбор подходящих базисов показывает, что существует сюръективный канонический гомоморфизм (коалгебр и L-модулей) $\phi : u(L/H) \to u(L/H_0)$. Тогда имеет место вложение дуальных алгебр:

$$\phi^* : u(L/H_0)^* \hookrightarrow \ u(L/H)^*.$$

Пусть для определенности $\dim_{\mathbb{F}_q}(L/H_0) = k$, а $\dim_{\mathbb{F}_q}(L/H) = m$. Тогда $u(L/H)^* \cong \mathbf{B}_m$, $u(L/H_0)^* \cong \mathbf{B}_k$ и возникает вложение колец $\phi^* : \mathbf{B}_k \hookrightarrow \mathbf{B}_m$. Тем самым $\mathbf{B}_m$ содержит L-инвариантную подалгебру $B = \phi^*(\mathbf{B}_k) \cong \mathbf{B}_k$.

Определение. Назовем гомоморфизм $\phi : L \to \operatorname{Der} \mathbf{B}_m$ *примитивным*, если он транзитивен и не существует собственного L-инвариантного подкольца $B \subset \mathbf{B}_m$ такого, что $B \cong \mathbf{B}_k$ для некоторого числа $k \in \{1, \dots, m-1\}$.

Пусть $\tilde{a}_n(L)$ — число *максимальных* подалгебр коразмерности n в L и $\tilde{b}_n(L)$ — число *примитивных* гомоморфизмов $L \to \operatorname{Der} \mathbf{B}_n$. Докажем результат, аналогичный лемме 6.

Лемма 7. *Пусть L — конечно порожденная ограниченная алгебра Ли над $\mathbb{F}_q$. Тогда число максимальных подалгебр $\tilde{a}_n(L)$ и число $\tilde{b}_n(L)$ примитивных гомоморфизмов $L \to \operatorname{Der} \mathbf{B}_n$ связаны соотношением*

$$\tilde{b}_n(L) = \tilde{a}_n(L) \cdot |\operatorname{Aut} \mathbf{B}_n|, \quad n \geq 0.$$

Доказательство. Согласно сделанным выше замечаниям если мы имеем не максимальную подалгебру $H \subset H_0 \subset L$, то соответствующий транзитивный гомоморфизм $\phi : L \to \operatorname{Der} u(L/H)^* \cong \operatorname{Der} \mathbf{B}_m$ не примитивен, так как возникает нетривиальная L-инвариантная подалгебра $u(L/H) \supset u(L/H_0)^* \cong \mathbf{B}_k$. Подалгебре конечной коразмерности соответствует несколько транзитивных гомоморфизма, но все они получаются при действии группы $\operatorname{Aut} \mathbf{B}_m$ сопряжением [4], значит, все они не примитивны.

Докажем обратное утверждение. Пусть транзитивный гомоморфизм $\phi : L \to \operatorname{Der} \mathbf{B}_m$ не примитивен, т. е. по определению содержит L-инвариантную подалгебру $B \cong \mathbf{B}_k$ для некоторого $k \in \{1, \dots, m-1\}$. По лемме 2 существует однозначно определенная подалгебра $H \subset L$ такая, что изоморфны модули и коалгебры $u(L/H) \cong \mathbf{C}_m$. Отождествим для удобства $\mathbf{B}_m = u(L/H)^*$ (мы отождествляем структуры алгебр и L-модулей). Напомним, что $u(L/H) = u(L)/J$, $J = u(L)H$, обозначаем $\bar{v} = v + J$ для $v \in u(L)$. Выберем дополняющий базис $L = \langle x_1, \dots, x_m \rangle_K \oplus H$, тогда в наших обозначениях $u(L/H) = \langle \bar{x}^\alpha \mid \alpha =$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_m),\ 0 \le \alpha_i < p\rangle_K$. Хорошо известно, что дуальный базис кольца срезанных многочленов имеет вид

$$\mathbf{B}_m = \left\langle t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_m^{\alpha_m} \mid 0 \le \alpha_i < p \right\rangle_K, \quad \langle t^\alpha, \bar{x}^\beta \rangle = \alpha! \delta_{\alpha,\beta}. \tag{6}$$

Из структуры алгебр $\mathbf{B}_k \cong B \subset \mathbf{B}_m$ вытекает, что для B существуют порождающие вида

$$f_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} t_j + h_{ij}, \quad \lambda_{ij} \in K,\ h_{ij} \in \mathfrak{m}^2(\mathbf{B}_m), \quad i = 1, \dots, k; \tag{7}$$

$$\operatorname{rank}(\lambda_{ij} \mid 1 \le i \le k, 1 \le j \le m) = k. \tag{8}$$

Пусть $\langle\ ,\ \rangle$ обозначает естественное отображение $\mathbf{B}_m \times u(L/H) \to K$, а также его естественное продолжение $\mathbf{B}_m \times u(L) \to K$, заданное условием $\langle \mathbf{B}_m, J \rangle = 0$.

Рассмотрим подпространство $H_0 = \{x \in L \mid \langle B, x \rangle = 0\} \subseteq L$. Согласно (6) и (7) H_0 совпадает с пересечением ядер линейных функций $f_1, \dots, f_k$, рассматриваемых на L. В силу (8) получаем $\dim L/H_0 = k$. Рассмотрим левый идеал $J_0 = u(L)H_0 \subset u(L)$. Проверим, что он ортогонален подалгебре B. Пусть $h \in H_0$, $v \in u(L)$, воспользуемся L-инвариантностью B:

$$\langle b, vh \rangle = \langle v^T * b, h \rangle \in \langle B, h \rangle = 0, \quad b \in B.$$

Получаем $\langle B, u(L)H_0 \rangle = 0$. Проверим, что H_0 — подалгебра. Пусть $x, y \in H_0$, тогда

$$\langle b, [x,y] \rangle = \langle b, xy \rangle - \langle b, yx \rangle = -\langle x * b, y \rangle + \langle y * b, x \rangle \in \langle B, y \rangle + \langle B, x \rangle = 0, \quad b \in B.$$

Значит, $[x,y] \in H_0$. Проверим, что H_0 — ограниченная подалгебра. Пусть $x \in H_0$, тогда $\langle b, x^{[p]} \rangle = \langle (-x)^{p-1} * b, x \rangle \in \langle B, x \rangle = 0$, $b \in B$.

Получаем нетривиальную цепочку ограниченных подалгебр $H \subset H_0 \subset L$. Таким образом, соответствующая гомоморфизму ϕ подалгебра $H \subset L$ не максимальна.

Осталось вспомнить, что согласно лемме 6 каждой подалгебре $H \subset L$ коразмерности n соответствует $|\operatorname{Aut} \mathbf{B}_n|$ различных транзитивных гомоморфизмов, и применить это соответствие для числа максимальных подалгебр и числа примитивных гомоморфизмов.

Перейдем к доказательству основной теоремы.

Доказательство теоремы 2. Пусть теперь $F_d = F(a_1, \dots, a_d)$ — свободная ограниченная алгебра Ли ранга $d \ge 2$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$.

Из описания (3) базиса алгебры $\mathbf{W}_n$ следует, что $\dim_{\mathbb{F}_q} \mathbf{W}_n = np^n$ и $|\mathbf{W}_n| = q^{np^n}$. Гомоморфизм $\phi : F(a_1, \dots, a_d) \to \mathbf{W}_n$ полностью определяется образами порождающих элементов, поэтому $|\operatorname{Hom}(F_d, \operatorname{Der} \mathbf{B}_n)| = q^{dnp^n}$. Как показано в [4, формула (23)], «почти все» гомоморфизмы транзитивны, и справедлива асимптотика (она также выводится из теоремы 1 и леммы 6)

$$b_n(F_d) = q^{dnp^n}(1 - q^{-dn} + O(q^{-(d-1)pn})), \quad n \to \infty.$$

Для последовательности $c_n(F_d)$ леммы 5 имеем оценку

$$c_n(F_d) \le q^{dnp^n} O(q^{-p^{n-1}}) = b_n(F_d) O(q^{-p^{n-1}}), \quad n \to \infty. \tag{9}$$

По определению транзитивных и примитивных гомоморфизмов для произвольной ограниченной алгебры L

$$b_n(L) - c_n(L) \le \tilde{b}_n(L) \le b_n(L), \quad n \ge 0. \tag{10}$$

Из (9), (10) следует асимптотика

$$\tilde{b}_n(F_d) = b_n(F_d)(1 + O(q^{-p^{n-1}})), \quad n \to \infty.$$

Применяя леммы 6 и 7, приходим к первому утверждению

$$\tilde{a}_n(F_d) = \frac{\tilde{b}_n(F_d)}{|\operatorname{Aut}\mathbf{B}_n|} = \frac{b_n(F_d)(1 + O(q^{-p^{n-1}}))}{|\operatorname{Aut}\mathbf{B}_n|} = a_n(F_d)(1 + O(q^{-p^{n-1}})), \quad n \to \infty.$$

Подставляя асимптотику теоремы 1 для последовательности $a_n(F_d)$, получаем второе утверждение

$$\tilde{a}_n(F_d) = \theta q^{(d-1)np^n + n}\left(1 - \frac{q^{-n}}{q-1} + O(q^{-2n})\right), \quad n \to \infty.$$

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть L — произвольная d-порожденная ограниченная алгебра Ли. Зафиксируем естественный эпиморфизм $\pi : F_d \to L$. Тогда всякий примитивный гомоморфизм $\phi : L \to \operatorname{Der}\mathbf{B}_n$ индуцирует примитивный гомоморфизм $\phi\pi : F_d \to \operatorname{Der}\mathbf{B}_n$. Значит, $\tilde{b}_n(L) \le \tilde{b}_n(F_d)$. По лемме 7 имеем $\tilde{b}_n(L) = \tilde{a}_n(L)|\operatorname{Aut}\mathbf{B}_n|$ и $\tilde{b}_n(F_d) = \tilde{a}_n(F_d)|\operatorname{Aut}\mathbf{B}_n|$. Следовательно, $\tilde{a}_n(L) \le \tilde{a}_n(F_d)$ для всех $n \ge 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lubotzky A., Segal D.* Subgroup growth. New York etc.: Springer-Verl., 2003.
2. *Hall M.* Subgroups of finite index in free groups // Canad. J. Math. 1949. V. 1. P. 187–190.
3. *Riley D., Tasic V.* On the growth of subalgebras in Lie p-algebras // J. Algebra. 2001. V. 237, N 1. P. 273–286.
4. *Petrogradsky V. M.* Growth of subalgebras for restricted Lie algebras and transitive actions // Internat. J. Algebra Comput. 2005. V. 15, N 5–6. P. 1151–1168.
5. *Petrogradsky V. M.* One-sided ideal growth of free associative algebras // Monatsh. Math. 2006. V. 149, N 3. P. 243–249.
6. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
7. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1963.
8. *Strade H., Farnsteiner R.* Modular Lie algebras and their representations. New York etc.: Marcel Dekker, 1988.
9. *Sweedler M. E.* Hopf algebras. New York: W. A. Benjamin, Inc., 1969.
10. *Blattner R. J.* Induced and produced representations of Lie algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 144, N 10. P. 457–474.

Статья поступила 5 апреля 2007 г.

Петроградский Виктор Михайлович, Смирнов Андрей Анатольевич
Ульяновский гос. университет, факультет математики и информационных технологий,
ул. Льва Толстого, 42, Ульяновск 432970
petrogradsky@rambler.ru, dronsmr@yandex.ru