Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 517.518

ОБОБЩЕННЫЕ СДВИГИ БЕССЕЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУПРЯМОЙ

С. С. Платонов

Аннотация. С помощью обобщенных сдвигов Бесселя изучаются задачи теории приближения функций на полупрямой $[0, +\infty)$ в метрике L_p с некоторым весом. Доказана прямая теорема джексоновского типа для модуля гладкости произвольного порядка, построенного на основе обобщенного сдвига Бесселя. Установлена эквивалентность модуля гладкости и K-функционала, построенного по пространству соболевского типа, соответствующего дифференциальному оператору Бесселя. В качестве средства приближения используется некоторый класс целых функций экспоненциального типа. Основным средством для решения этих задач является гармонический анализ Фурье — Бесселя.

Ключевые слова: приближение функций, теоремы Джексона, K-функционал, обобщенный сдвиг Бесселя, модуль гладкости, преобразования Бесселя, целая функция экспоненциального типа.

§ 1. Введение. Формулировка основных результатов

В классической теории приближения функций на прямой $\mathbb{R}$ центральную роль играют операторы сдвига $f(x) \mapsto f(x+y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Так, инфинитезимальным оператором сдвига является оператор дифференцирования, преобразование Фурье представляет собой разложение по собственным функциям оператора сдвига, оператор сдвига используется для построения модулей непрерывности и гладкости, которые являются основными элементами прямых и обратных теорем теории приближений. Различные обобщения операторов сдвига позволяют формулировать естественные аналоги многих задач классической теории приближений. Одним из обобщений операторов сдвига является группа или полугруппа операторов в банаховом пространстве. Различные задачи теории приближений в банаховых пространствах с группой или полугруппой операторов рассматривались, например, в работах [1, 2]. Другим обобщением операторов сдвига являются так называемые «операторы обобщенного сдвига» (см., например, [3, 4]). Эти операторы не обязательно образуют группу или полугруппу, но построенные по ним обобщенные модули гладкости могут быть лучше приспособлены для изучения связей между гладкостными свойствами функций и наилучшими приближениями этих функций в весовых функциональных пространствах, чем обычные модули гладкости. Некоторые результаты о приближении функций с использованием операторов обобщенного сдвига см. в работах [4–6] и в цитированной там литературе. Отметим, что в большинстве работ этого направления рассматривается приближение функций многочленами на конечном отрезке.

На полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ одним из важнейших операторов обобщенного сдвига является обобщенный сдвиг Бесселя [7–9]. Обобщенный сдвиг Бесселя используется при изучении различных задач, связанных с дифференциальными операторами Бесселя (см. статью Я. И. Житомирского [10], книгу И. А. Киприянова [8] и цитированную там литературу). С обобщенным сдвигом Бесселя тесно связан гармонический анализ Фурье — Бесселя, т. е. раздел гармонического анализа, в котором изучаются различные задачи, связанные с интегральными преобразованиями Бесселя (Ганкеля).

В настоящей статье с помощью обобщенных сдвигов Бесселя изучаются задачи теории приближения функций на полупрямой $[0, +\infty)$ в метрике L_p с некоторым весом. Доказана прямая теорема джексоновского типа для модуля гладкости произвольного порядка, построенного на основе обобщенного сдвига Бесселя. Установлена эквивалентность модуля гладкости и K-функционала, построенного по пространству соболевского типа, соответствующего дифференциальному оператору Бесселя. В качестве средства приближения используется некоторый класс целых функций экспоненциального типа.

Перейдем к более подробному изложению результатов. Всюду далее α — действительное число, удовлетворяющее условию $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Пусть

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}_t := \frac{d^2}{dt^2} + \frac{(2\alpha+1)}{t}\frac{d}{dt} \tag{1.1}$$

— дифференциальный оператор Бесселя. Обозначим через $j_\alpha(t)$ нормированную функцию Бесселя первого рода, т. е. $j_\alpha(t) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) J_\alpha(t)/t^\alpha$, где $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода, $\Gamma(x)$ — гамма-функция (см. [7]). Функция $y = j_\alpha(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\mathscr{B}y + y = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$ и $y'(0) = 0$. Функция $j_\alpha(t)$ четная бесконечно дифференцируемая (и даже целая аналитическая).

Мы будем рассматривать функции на промежутке $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ (все функции предполагаются комплекснозначными), но при этом удобно считать, что функции по четности продолжены на всю прямую $\mathbb{R}$. Пусть $C(\mathbb{R}_+)$ — множество четных непрерывных функций на $\mathbb{R}$, $C_c(\mathbb{R}_+)$ — множество непрерывных четных функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем, $C^{(k)}(\mathbb{R}_+)$ — множество четных k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ и $\mathscr{D}_+$ — множество четных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Множества $C(\mathbb{R}_+)$, $C_c(\mathbb{R}_+)$, $C^{(k)}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathscr{D}_+$ являются топологическими векторными пространствами с обычными топологиями. Через $\mathscr{D}'_+$ обозначим множество всех четных обобщенных функций, т. е. линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathscr{D}_+$. Значение функционала $f \in \mathscr{D}'_+$ на функции $\varphi \in \mathscr{D}_+$ будем обозначать через $\langle f, \varphi \rangle$.

Для любого $1 \le p < \infty$ через $L_{p,\alpha}$ обозначим банахово пространство, состоящее из измеримых функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+$ (функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль), для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\int |f(t)|^p t^{2\alpha+1}\, dt \right)^{1/p}.$$

Здесь и в дальнейших формулах интегралы берутся по промежутку $[0, +\infty)$, если отсутствуют пределы интегрирования.

При $p = \infty$ обозначим через $L_{\infty,\alpha}$ множество всех функций $f(t)$, которые равномерно непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}_+$. Норма в пространстве $L_{\infty,\alpha}$

определяется по формуле $\|f\|_{\infty,\alpha} = \|f\|_\infty := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)|$. Пространство $L_{p,\alpha}$ вкладывается в $\mathscr{D}'_+$, если для $f \in L_{p,\alpha}$ и $\varphi \in \mathscr{D}_+$ положить

$$\langle f, \varphi\rangle := \int f(t)\varphi(t)t^{2\alpha+1}\,dt.$$

Следуя Б. М. Левитану [7], для любой функции $f(t) \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$ оператор обобщенного сдвига Бесселя $T^s f(t) = u(t,s)$, $t, s \in \mathbb{R}_+$, определим как решение следующей задачи Коши:

$$\mathscr{B}_t u(t,s) = \mathscr{B}_s u(t,s); \tag{1.2}$$

$$u(t,0) = f(t), \quad \frac{\partial u}{\partial s}(t,0) = 0, \tag{1.3}$$

где $\mathscr{B}_t$ и $\mathscr{B}_s$ — дифференциальные операторы Бесселя, примененные по переменным t и s соответственно. Решение задачи Коши (1.2), (1.3) существует, единственно и может быть выписано в явном виде:

$$T^s f(t) = u(t,s) = c_\alpha \int\limits_0^\pi f(\sqrt{t^2+s^2-2ts\cos\varphi})(\sin\varphi)^{2\alpha}\,d\varphi, \tag{1.4}$$

где

$$c_\alpha = \left(\int\limits_0^\pi (\sin\varphi)^{2\alpha}\,d\varphi\right)^{-1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}. \tag{1.5}$$

По формуле (1.4) оператор T^s продолжается до непрерывного оператора в пространстве $L_{p,\alpha}$ (см. далее § 2).

Для любой функции $f \in L_{p,\alpha}$ разности ${}^*\Delta_h^k f(t)$ порядка k ($k = 1, 2, 3, \dots$) с шагом $h > 0$ и модуль гладкости ${}^*\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha}$ порядка k определим формулами

$${}^*\Delta_h^k f(t) := \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} T^{lh} f(t), \tag{1.6}$$

$${}^*\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha} := \sup_{0<h\le\delta} \left\| {}^*\Delta_h^k f \right\|_{p,\alpha}, \tag{1.7}$$

где $\binom{k}{l}$ — биномиальные коэффициенты, $\delta > 0$.

Обозначим через $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, $\nu > 0$, множество всех функций $\Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\Phi(t)$ — четная целая функция экспоненциального типа ν;

2) $\Phi(t)$ принадлежит классу $L_{p,\alpha}$.

Функции из класса $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ являются естественным средством приближения в пространстве $L_{p,\alpha}$. Различные свойства этих функций (интерполяционные формулы и аналоги неравенств Бернштейна и Никольского) см. в [11]. Наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha}$ функциями из $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ определяется как

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} := \inf\{\|f - \Phi\|_{p,\alpha} : \Phi \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)\}. \tag{1.8}$$

Действие дифференциального оператора $\mathscr{B}$ естественным образом расширяется на пространство обобщенных функций $\mathscr{D}'_+$, если положить

$$\langle \mathscr{B} f, \varphi\rangle := \langle f, \mathscr{B}\varphi\rangle, \quad f \in \mathscr{D}'_+, \ \varphi \in \mathscr{D}_+.$$

В частности, действие оператора Бесселя $\mathscr{B}$ определено и для любой функции $f \in L_{p,\alpha}$, но при этом, вообще говоря, $\mathscr{B} f$ будет обобщенной функцией.

Следующая теорема является аналогом прямой теоремы Джексона в классической теории приближения функций (см. [12, гл. 5]).

Теорема 1.1. *Пусть функции $f, \mathscr{B}f, \dots, \mathscr{B}^m f$ $(m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\})$ принадлежат пространству $L_{p,\alpha}$, где $\mathscr{B}$ — оператор Бесселя. Тогда для любого $\nu > 0$ справедливо неравенство*

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} \le \frac{c}{\nu^{2m}} {}^*\omega_k\left(\mathscr{B}^m f, \frac{1}{\nu}\right)_{p,\alpha},$$

где $c = c(k, m, \alpha) > 0$ — некоторая постоянная.

Пусть $W^m_{p,\alpha}$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$ — пространство Соболева, построенное по дифференциальному оператору $\mathscr{B}$, т. е.

$$W^m_{p,\alpha} := \{f \in L_{p,\alpha} : \mathscr{B}^j f \in L_{p,\alpha},\ j = 1, \dots, m\}. \tag{1.9}$$

Определим K-функционал, построенный по пространствам $L_{p,\alpha}$ и $W^m_{p,\alpha}$:

$$K\big(f, t; L_{p,\alpha}; W^m_{p,\alpha}\big) := \inf\big\{\|f - g\|_{p,\alpha} + t\|\mathscr{B}^m g\|_{p,\alpha} : g \in W^m_{p,\alpha}\big\}, \tag{1.10}$$

где $f \in L_{p,\alpha}$, $t > 0$.

В следующей теореме устанавливается эквивалентность модуля гладкости и K-функционала.

Теорема 1.2. *Существуют положительные числа $c_1 = c_1(m, \alpha)$ и $c_2 = c_2(m, \alpha)$ такие, что справедливы неравенства*

$$(1/c_1)^*\omega_{2m-1}(f, \delta)_{p,\alpha} \le K\big(f, \delta^{2m}; L_{p,\alpha}; W^m_{p,\alpha}\big) \le c_1{}^*\omega_{2m-1}(f, \delta)_{p,\alpha}, \tag{1.11}$$

$$(1/c_2)^*\omega_{2m}(f, \delta)_{p,\alpha} \le K\big(f, \delta^{2m}; L_{p,\alpha}; W^m_{p,\alpha}\big) \le c_2{}^*\omega_{2m}(f, \delta)_{p,\alpha}, \tag{1.12}$$

где $f \in L_{p,\alpha}$, $\delta > 0$.

Следствие 1.1. *Модули гладкости ${}^*\omega_{2m-1}(f, \delta)_{p,\alpha}$ и ${}^*\omega_{2m}(f, \delta)_{p,\alpha}$ эквивалентны, т. е. для $f \in L_{p,\alpha}$ и $\delta > 0$ справедливо неравенство*

$$(1/c_3)^*\omega_{2m-1}(f, \delta)_{p,\alpha} \le {}^*\omega_{2m}(f, \delta)_{p,\alpha} \le c_3{}^*\omega_{2m-1}(f, \delta)_{p,\alpha},$$

где $c_3 = c_3(m, \alpha)$ — некоторая положительная постоянная.

Доказательство теорем 1.1 и 1.2 является основной целью работы. В § 2 приводятся необходимые сведения из гармонического анализа Фурье — Бесселя. В § 3 доказываются вспомогательные результаты, а в § 4 — основные теоремы, причем сначала доказывается слабый вариант неравенства Джексона (теорема 4.1), затем с помощью этого неравенства доказывается теорема 1.2 и из нее выводится теорема 1.1.

Обобщенные сдвиги Бесселя и пространства $L_{p,\alpha}$ имеют простой геометрический смысл, если число α целое или полуцелое. Если $\alpha = \frac{n}{2} - 1$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, то пространство $L_{p,\alpha}$ изоморфно подпространству радиальных функций в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, где функция $F(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ называется *радиальной*, если $F(gx) = F(x)$ для всех ортогональных преобразований $g \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. Изоморфизм задается отображением $P : f(t) \mapsto F(x) = f(|x|)$, где $f(t) \in L_{p, \frac{n}{2}-1}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. При этом изоморфизме обобщенный сдвиг Бесселя соответствует оператору усреднения по сферам, т. е. если $P(f(t)) = F(x)$, то

$$P(T^s f(t)) = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma F(x + sw)\, dw,$$

где σ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, $w \in \sigma$, dw — элемент площади сферы, $|\sigma|$ — полная площадь всей сферы. Модули гладкости, построенные на основе оператора усреднения по сферам, используются в теории приближений функций (см., например, [13, 14]).

Отметим, что разности ${}^*\Delta_h^k f$ вводились и использовались в других задачах Л. Н. Ляховым в [15]. Отметим также, что конечные разности и модули гладкости на основе обобщенного сдвига Бесселя можно определять и другими способами. Так, например, конечные разности $\Delta_h^k f$ и модуль гладкости $\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha}$ можно определить по формулам $\Delta_h^k f := (T^h - I)f$, $\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha} := \sup\limits_{0<h\le\delta} \left\|\Delta_h^k f\right\|_{p,\alpha}$, где I — единичный оператор. Так как обобщенные сдвиги T^h не образуют полугруппу, разности Δ_h^k и ${}^*\Delta_h^k$ различные. Теоремы джексоновского типа на основе модуля гладкости $\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha}$ будут рассмотрены в другой статье.

§ 2. Преобразование Бесселя и обобщенные сдвиги Бесселя

Преобразованием Бесселя называется следующее интегральное преобразование [7, 8, 16]:

$$\mathscr{F} : f(t) \mapsto \hat{f}(\lambda) = \int f(t) j_\alpha(\lambda t) t^{2\alpha+1}\, dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \tag{2.1}$$

Обратное преобразование Бесселя задается формулой

$$\mathscr{F}^{-1} : g(\lambda) \mapsto \tilde{g}(t) = (2^\alpha \Gamma(\alpha+1))^{-2} \int g(\lambda) j_\alpha(\lambda t) \lambda^{2\alpha+1}\, d\lambda, \tag{2.2}$$

т. е. прямое и обратное преобразования Бесселя отличаются только числовым множителем $(2^\alpha \Gamma(\alpha+1))^{-2}$.

Пусть $\mathscr{S}$ — пространство основных функций на $\mathbb{R}$, т. е. множество всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$, убывающих при $|t| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|t|^{-1}$. Обычным образом пространство $\mathscr{S}$ снабжается топологией и становится локально выпуклым пространством (см. [17] или [12]). Пусть $\mathscr{S}'$ — множество линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{S}$, т. е. пространство обобщенных функций медленного роста. Обычным образом $\mathscr{S}'$ снабжается структурой топологического векторного пространства. Через $\mathscr{S}_+$ обозначим подпространство в $\mathscr{S}$, состоящее из четных функций. Пространство $\mathscr{S}_+$ снабжается индуцированной из пространства $\mathscr{S}$ топологией. Пусть $\mathscr{S}'_+$ — пространство четных обобщенных функций медленного роста, т. е. множество линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{S}_+$. Для $f \in \mathscr{S}'_+$ и $\varphi \in \mathscr{S}_+$ через $\langle f, \varphi \rangle$ будем обозначать значение функционала f на функции φ. Пространства $L_{p,\alpha}$, $1 \le p \le \infty$, вкладываются в пространство $\mathscr{S}'_+$, если для $f(t) \in L_{p,\alpha}$ и $\varphi(t) \in \mathscr{S}_+$ положить

$$\langle f, \varphi \rangle := \int f(t)\varphi(t) t^{2\alpha+1}\, dt. \tag{2.3}$$

Так как дифференциальный оператор Бесселя удовлетворяет условию

$$\langle \mathscr{B}\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \mathscr{B}\varphi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathscr{S}_+,$$

то действие оператора $\mathscr{B}$ естественным образом продолжается на обобщенные функции по формуле

$$\langle \mathscr{B}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathscr{B}\varphi \rangle, \quad f \in \mathscr{S}'_+,\ \varphi \in \mathscr{S}_+. \tag{2.4}$$

Если $h(t)$ — любая четная бесконечно дифференцируемая функция, у которой любая производная растет при $t \to \infty$ не быстрее некоторой степени t (будем называть такие функции *бесконечно дифференцируемыми функциями полиномиального роста*), то определено произведение функции $h(t)$ на обобщенную функцию $f \in \mathscr{S}'_+$. По определению $\langle hf, \varphi \rangle := \langle f, h\varphi \rangle$, $\varphi \in \mathscr{S}_+$. Будем также называть такие функции $h(t)$ *мультипликаторами* на пространстве $\mathscr{S}'_+$.

Пусть a — произвольное положительное число. Оператор растяжения $\Gamma^a : \varphi(t) \mapsto \varphi(at)$ является автоморфизмом пространства $\mathscr{S}_+$. Этот оператор можно распространить и на обобщенные функции. Если $f \in \mathscr{S}'_+$, то по определению

$$\langle \Gamma^a f, \varphi \rangle := a^{-2\alpha-2} \langle f, \Gamma^{\frac{1}{a}} \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{S}'_+. \tag{2.5}$$

Для краткости мы будем использовать запись $f(at)$ вместо $\Gamma^a f$ и для случая, когда f — обобщенная функция.

Известно (см. [10]), что прямое и обратное преобразования Бесселя являются взаимно обратными автоморфизмами пространства $\mathscr{S}_+$. Для обобщенных функций медленного роста преобразование Бесселя определяется по формуле [10]

$$\langle \mathscr{F}(f), \varphi \rangle := \langle f, \mathscr{F}(\varphi) \rangle, \quad f \in \mathscr{S}'_+, \ \varphi \in \mathscr{S}_+. \tag{2.6}$$

Тогда $\mathscr{F}(f) \in \mathscr{S}'_+$ и $\mathscr{F}$ является автоморфизмом пространства $\mathscr{S}'_+$. Обратное преобразование Бесселя отличается от прямого преобразования Бесселя только числовым множителем: $\mathscr{F}^{-1} = (2^\alpha \Gamma(\alpha+1))^{-2} \mathscr{F}$.

Отметим важное свойство преобразования Бесселя: если $f \in \mathscr{S}'_+$, то

$$\mathscr{F}(\mathscr{B} f) = (-\lambda^2) \mathscr{F}(f). \tag{2.7}$$

Для функции $j_\alpha(t)$ можно выписать следующее интегральное представление (см. [18, формула 8.411(8)]):

$$j_\alpha(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)} \int_{-1}^{1} (1-u^2)^{\alpha-1/2} \cos(tu)\, du. \tag{2.8}$$

Из представления (2.8) следует, что $|j_\alpha(t)| \le 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$, причем равенство достигается только при $t = 0$. Отметим также, что функция $j_\alpha(t)$ и все ее производные $j_\alpha^{(k)}(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$. Это вытекает из представления (2.8) и из теоремы Римана — Лебега.

Для функций из класса $L_{1,\alpha}$ преобразование Бесселя можно определить непосредственно по формуле (2.1). При этом если $f(t) \in L_{1,\alpha}$, то функция $\hat{f}(\lambda)$ непрерывная, ограниченная ($\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_{1,\alpha}$) и $\hat{f}(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Если дополнительно выполняется условие $\mathscr{B}^n f \in L_{1,\alpha}$, то для функции $\hat{f}(\lambda)$ справедлива оценка

$$|\hat{f}(\lambda)| \le \frac{c(n)}{\lambda^{2n}}, \quad \lambda > 0, \tag{2.9}$$

где $c(n)$ — некоторая постоянная. Действительно, из (2.7) вытекает, что

$$\mathscr{F}(\mathscr{B}^n f)(\lambda) = (-1)^n \lambda^{2n} \hat{f}(\lambda),$$

а так как функция $\mathscr{F}(\mathscr{B}^n f)$ непрерывная и ограниченная, неравенство (2.9) справедливо при $c(n) = \|\mathscr{F}(\mathscr{B}^n f)\|_\infty$.

Пусть Γ^a — оператор растяжения (см. (2.5)), $a > 0$. Легко видеть, что $\mathscr{F}(\Gamma^a f) = a^{-2\alpha-2}\Gamma^{1/a}(\mathscr{F}(f))$, $f \in \mathscr{S}'_+$, т. е. если $\mathscr{F}(f(t)) = \hat{f}(\lambda)$, то

$$\mathscr{F}(f(at)) = a^{-2\alpha-2}\hat{f}\big(\lambda/a\big). \tag{2.10}$$

Определение обобщенного сдвига Бесселя $T^s f(t)$ и его явный вид приведены в § 1. По формуле (1.4) оператор T^s распространяется на все четные непрерывные функции, в частности, на функции из $\mathscr{S}_+$. Легко видеть, что T^s является непрерывным оператором в $\mathscr{S}_+$.

Приведем некоторые свойства обобщенного сдвига Бесселя (см. [7, 8]), всюду $t, s, \lambda \in \mathbb{R}_+$:

$$T^s j_\alpha(\lambda t) = j_\alpha(\lambda s) j_\alpha(\lambda t); \tag{2.11}$$

самосопряженность оператора T^s: если $f(t)$ — непрерывная функция из класса $L_{1,\alpha}$ и $g(t)$ — непрерывная, четная и ограниченная функция на $\mathbb{R}$, то

$$\int (T^s f(t)) g(t) t^{2\alpha+1}\, dt = \int f(t)(T^s g(t)) t^{2\alpha+1}\, dt; \tag{2.12}$$

$$T^s f(t) = T^t f(s). \tag{2.13}$$

С учетом (2.12) мы можем расширить действие обобщенного сдвига Бесселя на пространство обобщенных функций $\mathscr{S}'_+$. По определению

$$\langle T^s f, \varphi\rangle := \langle f, T^s \varphi\rangle \tag{2.14}$$

для $f \in \mathscr{S}'_+$, $\varphi \in \mathscr{S}_+$. Тогда T^s будет линейным непрерывным оператором в пространстве $\mathscr{S}'_+$.

Следующие соотношения связывают обобщенные сдвиги Бесселя и преобразование Бесселя:

$$\mathscr{F}(T^s f) = j_\alpha(s\lambda)\mathscr{F}(f), \quad T^s(\mathscr{F}(f)) = \mathscr{F}(j_\alpha(st) f(t)), \quad f \in \mathscr{S}'_+. \tag{2.15}$$

Проверим, что *операторы T^s и $\mathscr{B}$ перестановочны*, т. е.

$$\mathscr{B}(T^s f) = T^s(\mathscr{B} f), \quad f \in \mathscr{S}'_+. \tag{2.16}$$

Свойство (2.16) можно доказать, применив к обеим частям формулы (2.16) преобразование Бесселя. Из свойств (2.7) и (2.15) следует, что

$$\mathscr{F}(\mathscr{B}(T^s f)) = (-\lambda^2) j_\alpha(s\lambda)\hat{f}(\lambda) = \mathscr{F}(T^s(\mathscr{B} f)).$$

Проверим, что обобщенный сдвиг Бесселя T^s является непрерывным оператором в банаховом пространстве $L_{p,\alpha}$ при $1 \le p \le \infty$. Из формулы (1.4) для оператора T^s вытекает, что

$$\|T^s f\|_\infty \le \|f\|_\infty, \tag{2.17}$$

поэтому T^s является непрерывным оператором в $L_{\infty,\alpha}$. Пусть $1 \le p < \infty$. Проверим, что

$$|T^s f(t)|^p \le T^s\left(|f(t)|^p\right) \tag{2.18}$$

для любой непрерывной функции $f(t)$. Для этого на отрезке $[0, \pi]$ введем вероятностную меру $dm(\varphi) = c_\alpha (\sin\varphi)^{2\alpha}\, d\varphi$, где c_α — коэффициент из формулы (1.4). Используя формулу (1.4) и неравенство Гёльдера, получим

$$|T^s f(t)| = \left| \int\limits_0^\pi f(\sqrt{t^2+s^2-2ts\cos\varphi}) \cdot 1\, dm(\varphi) \right|$$

$$\le \left(\int\limits_0^\pi |f(\sqrt{t^2+s^2-2ts\cos\varphi})|^p\, dm(\varphi) \right)^{1/p} \left(\int\limits_0^\pi dm(\varphi) \right)^{1/q} = (T^s(|f(t)|^p))^{1/p},$$

где $1/p + 1/q = 1$. Из последнего неравенства вытекает неравенство (2.18).

Проверим, что

$$\|T^s f\|_{p,\alpha} \le \|f\|_{p,\alpha} \tag{2.19}$$

при $f \in \mathscr{S}_+$. Действительно, используя (2.18) и самосопряженность оператора T^s, получим

$$\begin{aligned}\|T^s f\|_{p,\alpha}^p &= \int |T^s f(t)|^p t^{2\alpha+1}\,dt \le \int T^s(|f(t)|^p)\cdot 1\,t^{2\alpha+1}\,dt\\ &= \int |f(t)|^p (T^s 1) t^{2\alpha+1}\,dt = \int |f(t)|^p t^{2\alpha+1}\,dt = \|f\|_{p,\alpha}^p,\end{aligned}$$

откуда вытекает (2.19). При этом было использовано очевидное равенство $T^s 1 = 1$.

Так как $\mathscr{S}_+$ является плотным линейным подмножеством в банаховом пространстве $L_{p,\alpha}$ при $p < \infty$, из неравенства (2.19) следует, что оператор T^s продолжается по непрерывности с $\mathscr{S}_+$ до ограниченного оператора T^s в $L_{p,\alpha}$ и неравенство (2.19) остается справедливым и для любой функции $f \in L_{p,\alpha}$.

Свертка функций $f(t)$ и $g(t)$ на $\mathbb{R}_+$ определяется соотношением [7]

$$(f * g)(s) := \int (T^s f(t)) g(t) t^{2\alpha+1}\,dt. \tag{2.20}$$

Свертка имеет смысл, когда определен интеграл в правой части (2.20), в частности, когда $f, g \in \mathscr{S}_+$, причем тогда и свертка $f * g$ принадлежит $\mathscr{S}_+$.

Приведем некоторые свойства свертки.

1. Свертка ассоциативна, т. е. $(f * g) * h = f * (g * h)$.

2. Свертка коммутативна, т. е.

$$f * g = g * f. \tag{2.21}$$

3. При преобразовании Бесселя свертка функций переходит в произведение, т. е.

$$\widehat{(f * g)}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda). \tag{2.22}$$

4. Имеют место равенства

$$\mathscr{B}(f * g) = (\mathscr{B} f) * g = f * (\mathscr{B} g). \tag{2.23}$$

Эти свойства справедливы при $f, g, h \in \mathscr{S}_+$ и остаются справедливыми и при значительно более слабых условиях на функции f, g и h (см. [8, 10]).

5. Если $f \in L_{1,\alpha}$, $g \in L_{p,\alpha}$, $1 \le p \le \infty$, то свертки $f * g$ и $g * f$ определены и принадлежат $L_{p,\alpha}$. При этом $f * g = g * f$ и

$$\|f * g\|_{p,\alpha} \le \|f\|_{1,\alpha} \|g\|_{p,\alpha}. \tag{2.24}$$

Далее нам понадобится еще свертка функций для случая, когда f — обобщенная функция из класса $\mathscr{S}'_+$, а g — функция из класса $\mathscr{S}_+$. В этом случае свертка $f * g$ определяется формулой

$$(f * g)(s) := \langle f, T^s g \rangle, \quad s \in \mathbb{R}_+. \tag{2.25}$$

Тогда $(f * g)(s)$ является четной бесконечно дифференцируемой функцией полиномиального роста. Отметим также, что в этом случае остаются справедливыми свойства (2.22) и (2.23).

Через $\operatorname{supp} f$ будем обозначать носитель функции f. Если f — обычная или обобщенная функция на $\mathbb{R}_+$, то $\operatorname{supp} f$ — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}_+$. Если $f \in \mathscr{S}'_+$ и $\operatorname{supp} f$ — компактное подмножество, то преобразование Бесселя $\hat{f}(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение на комплексные значения λ и продолженная функция $\hat{f}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, является целой четной функцией. Следующие теоремы (см., например, [8] или [16]) являются аналогами теоремы Пэли — Винера.

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi(t) \in \mathscr{S}_+$ и $\widehat{\varphi}(\lambda)$ — ее преобразование Бесселя. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\operatorname{supp} \varphi \subseteq [0, \nu]$;

2) $\widehat{\varphi}(\lambda)$ *— целая четная функция и для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ найдется постоянная c_m такая, что $|\widehat{\varphi}(\lambda)| \le c_m\,(1 + |\lambda|)^{-m} e^{\nu|\operatorname{Im}\lambda|}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Теорема 2.2. *Пусть $f(t) \in \mathscr{S}'_+$ и $\hat{f}(\lambda)$ — ее преобразование Бесселя. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\operatorname{supp} f \subseteq [0, \nu]$;

2) $\hat{f}(\lambda)$ *— целая четная функция и для некоторых постоянных $C, N > 0$ справедливо неравенство $|\hat{f}(\lambda)| \le C(1 + |\lambda|)^N e^{\nu|\operatorname{Im}\lambda|}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Из теоремы 2.2, в частности, вытекает, что если $f \in \mathscr{S}'_+$ и $\operatorname{supp} f \subseteq [0, \nu]$, то $\hat{f}(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа ν.

В качестве следствия из теоремы 2.2 получим одно полезное свойство функций из класса $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ (определение класса $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ см. в § 1).

Предложение 2.1. *Если $\Phi(\lambda) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, то $\widetilde{\Phi} = \mathscr{F}^{-1}(\Phi)$ — обобщенная функция с компактным носителем и $\operatorname{supp} \widetilde{\Phi} \subseteq [0, \nu]$.*

Доказательство. Если $\Phi(\lambda) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, то $\Phi(\lambda)$ является четной целой функцией экспоненциального типа ν, которая на действительной оси $\mathbb{R}$ принадлежит классу $L_{p,\alpha}$. Тогда на $\mathbb{R}$ функция $\Phi(\lambda)$ принадлежит и обычному классу $L_p(\mathbb{R})$ (без веса). По известным свойствам целых функций (см. [12, гл. 3]) если $\Phi(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа ν и $\Phi(\lambda) \in L_p(\mathbb{R})$, то она ограничена на $\mathbb{R}$ и для некоторой постоянной $A > 0$ справедливо неравенство

$$|\Phi(\lambda)| \le A e^{\nu|\operatorname{Im}\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.26}$$

Из (2.26) следует, что для функции $\Phi(\lambda)$ выполняется условие 2 теоремы 2.2. Поэтому из теоремы 2.2 вытекает, что $\operatorname{supp} \widetilde{\Phi} \subseteq [0, \nu]$.

§ 3. Вспомогательные результаты

Для доказательства теорем 1.1 и 1.2 нам потребуются некоторые вспомогательные (но представляющие и самостоятельный интерес) результаты.

С учетом определения конечной разности (1.6) из (2.15) следует, что образ ${}^*\Delta_h^k f(t)$ при преобразовании Бесселя имеет вид

$$\widehat{{}^*\Delta_h^k f}(\lambda) = \left(\sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} j_\alpha(lh\lambda) \right) \hat{f}(\lambda). \tag{3.1}$$

Введем обозначение

$$j_{\alpha,k}(\lambda) := \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} j_\alpha(l\lambda), \tag{3.2}$$

тогда

$$\widehat{{}^*\Delta_h^k f}(\lambda) = j_{\alpha,k}(h\lambda) \hat{f}(\lambda). \tag{3.3}$$

Лемма 3.1. 1. *Функция $j_{\alpha,k}(\lambda)$ целая четная.*

2. *При $\lambda\to\infty$ функция $j_{\alpha,k}(\lambda)$ стремится к 1 и все ее производные $j^{(n)}_{\alpha,k}(\lambda)$, $n\in\mathbb{N}$, стремятся к нулю.*

3. *В точке $\lambda=0$ функция $j_{\alpha,k}(\lambda)$ имеет нуль кратности k при k четном и нуль кратности $(k+1)$ при k нечетном.*

Доказательство. Свойство 1 следует из аналогичного свойства функции $j_\alpha(\lambda)$. Свойство 2 вытекает из того, что функция $j_\alpha(\lambda)$ и все ее производные стремятся к нулю при $\lambda\to\infty$.

Обозначим через D_k следующий линейный оператор, действующий в пространстве $C(\mathbb{R}_+)$:

$$D_k : g(\lambda)\mapsto \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}g(l\lambda).$$

Заметим, что каждая функция λ^n, $n\in\mathbb{N}$, является собственной функцией оператора D_k с собственным значением $c(n,k)$, где

$$c(n,k)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}l^n.$$

Числа $c(n,k)$ выражаются через хорошо известные в комбинаторике числа Стирлинга второго рода $S(n,k)$: $c(n,k)=(-1)^k k! S(n,k)$ (см., например, [19]). Известно, что $S(n,k)=0$ при $n<k$ и $S(n,k)>0$ при $n\ge k$, поэтому $c(n,k)=0$ при $n<k$ и $c(n,k)\ne 0$ при $n\ge k$.

Функцию $j_\alpha(\lambda)$ можно разложить в степенной ряд

$$j_\alpha(\lambda)=\sum_{r=0}^{\infty}a_{2r}\lambda^{2r}, \tag{3.4}$$

где a_{2r} — некоторые ненулевые коэффициенты. Тогда

$$j_{\alpha,k}(\lambda)=D_k(j_\alpha(\lambda))=\sum_{r=0}^{\infty}a_{2r}c(2r,k)\lambda^{2r}. \tag{3.5}$$

С учетом того, что $c(2r,k)=0$ при $2r<k$, получим, что первым ненулевым слагаемым в правой части (3.5) будет $a_k c(k,k)\lambda^k$, если k — четное число, и $a_{k+1}c(k+1,k)\lambda^{k+1}$, если k — нечетное число. Это доказывает п. 3 леммы.

При $k\ge 2r-1$, $k,r\in\mathbb{N}$, рассмотрим функцию

$$g_{k,r}(t):=\mathscr{F}^{-1}(\lambda^{-2r}j_{\alpha,k}(\lambda)). \tag{3.6}$$

Преобразование Бесселя определено, так как функция $\lambda^{-2r}j_{\alpha,k}(\lambda)$ бесконечно дифференцируемая и стремится к нулю при $\lambda\to\infty$, но, вообще говоря, пока можно только сказать, что $g_{k,r}$ — обобщенная функция из $\mathscr{S}'_+$, но далее будет показано, что $g_{k,r}\in L_{1,\alpha}$.

Лемма 3.2. *При любом $d>0$, $d\in\mathbb{R}$, функция $K_d(\lambda):=\mathscr{F}((1+t^2)^{-d})$ принадлежит классу $L_{1,\alpha}$.*

Доказательство проводится аналогично тому, как в книге [20, гл. V, § 3] доказывается, что преобразование Фурье от функции $(1+x^2)^{-d}$ (ядро бесселева потенциала) принадлежит классу $L_1(\mathbb{R})$. Отметим только основные элементы доказательства.

Воспользуемся тождеством

$$(1+t^2)^{-d} = \frac{1}{\Gamma(d)} \int\limits_0^\infty e^{-\delta t^2} e^{-\delta} \delta^d \frac{d\delta}{\delta}. \tag{3.7}$$

Известно, что преобразование Бесселя от функции $e^{-\delta t^2}$, $\delta > 0$, имеет вид (см. [21, гл. 8, п. 8.6, формула (10)])

$$\mathscr{F}(e^{-\delta t^2})(\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\delta^{\alpha+1}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\delta}}. \tag{3.8}$$

Из равенств (3.7) и (3.8) легко получить, что

$$\mathscr{F}((1+t^2)^{-d})(\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(d)} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{4\delta}} e^{-\delta} \delta^{d-\alpha-1} \frac{d\delta}{\delta}. \tag{3.9}$$

Тогда

$$\|\mathscr{F}((1+t^2)^{-d})\|_{1,\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(d)} \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{4\delta}} \lambda^{2\alpha+1} d\lambda \right) e^{-\delta} \delta^{d-\alpha-1} \frac{d\delta}{\delta}$$
$$= \frac{(\Gamma(\alpha+1))^2 2^{2\alpha+1}}{\Gamma(d)} \int\limits_0^\infty e^{-\delta} \delta^d \frac{d\delta}{\delta} = 2^{2\alpha+1} (\Gamma(\alpha+1))^2 < \infty.$$

Следовательно, $\mathscr{F}\left((1+t^2)^{-d}\right) \in L_{1,\alpha}$.

Лемма 3.3. *При $k \geq 2r-1$ функция $g_{k,r}(x)$ принадлежит классу $L_{1,\alpha}$.*

Доказательство. 1. Так как прямое и обратное преобразования Бесселя отличаются только числовым множителем, будем доказывать, что $\mathscr{F}(t^{-2r} j_{\alpha,k}(t)) \in L_{1,\alpha}$. Поскольку (см. (2.15))

$$\mathscr{F}\left(j_{\alpha,k}(t)(1+t^2)^{-d}\right) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} (T^l K_d)(\lambda),$$

а оператор T^h переводит пространство $L_{1,\alpha}$ в себя, то из леммы 3.2 следует, что

$$\mathscr{F}(j_{\alpha,k}(t)(1+t^2)^{-d}) \in L_{1,\alpha}. \tag{3.10}$$

2. Функцию t^{-2r} можно представить в виде $t^{-2r} = s^r(1-s)^{-r}$, где $s = (1+t^2)^{-1}$. При $|s| < 1$ функцию $s^r(1-s)^{-r}$ можно разложить в ряд: $s^r(1-s)^{-r} = \sum\limits_{m=r}^{\infty} c_m s^m$ с некоторыми коэффициентами c_m. Пусть $P_N(s) = \sum\limits_{m=r}^{N} c_m s^m$ — частичная сумма этого ряда.

Пусть $R(x)$ — произвольная рациональная функция и для некоторого натурального d выполняется равенство $R(x) = o(x^{-d})$ при $x \to \infty$. Тогда очевидно, что для всех производных $R^{(n)}(x)$ будет справедливо равенство $R^{(n)}(x) = o(x^{-d-n})$ и, в частности, $R^{(n)}(x) = o(x^{-d})$.

Рассмотрим функцию $\Psi_N(t) := j_{\alpha,k}(t) R_N(t)$, где $R_N(t) := t^{-2r} - P_N((1+t^2)^{-1})$. Заметим, что $R_N(t) = o(t^{-2N})$ при $t \to \infty$, а так как $R_N(t)$ — рациональная функция, с учетом написанного выше для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$R_N^{(n)}(t) = o(t^{-2N}). \tag{3.11}$$

Поскольку функция $j_{\alpha,k}(t)$ и все ее производные ограничены на $\mathbb{R}_+$, из (3.11) вытекает, что

$$\Psi_N^{(n)}(t) = o(t^{-2N}), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.12}$$

при $t \to \infty$.

Пусть $\mathscr{B}$ — дифференциальный оператор Бесселя. Из (3.12) следует, что при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$ справедлива оценка

$$(\mathscr{B}^n \Psi_N)(t) = o(t^{-2N}) \tag{3.13}$$

при $t \to \infty$.

Если взять число N достаточно большим (достаточно взять $N = [\alpha] + 2$, $[x]$ — целая часть числа x), то из (3.13) следует, что $(\mathscr{B}^n \Psi_N)(t) \in L_{1,\alpha}$ при любом $n \in \mathbb{Z}_+$. Так как $(\mathscr{B}^n \Psi_N)(t) \in L_{1,\alpha}$, то из свойства (2.9) вытекает, что

$$|\widehat{\Psi_N}(\lambda)| \le \frac{c(n)}{\lambda^{2n}} \tag{3.14}$$

для некоторой постоянной $c(n) > 0$. Из оценки (3.14) получаем, что

$$\widehat{\Psi_N}(\lambda) \in L_{1,\alpha}. \tag{3.16}$$

3. Представим функцию $t^{-2r} j_{\alpha,k}(t)$ в виде

$$t^{-2r} j_{\alpha,k}(t) = \Psi_N(t) + j_{\alpha,k}(t) P_N((1+t^2)^{-1}).$$

Так как $\mathscr{F}(\Psi_N) \in L_{1,\alpha}$ (см. (3.15)) и $\mathscr{F}(j_{\alpha,k}(t) P_N((1+t^2)^{-1})) \in L_{1,\alpha}$ (следует из (3.10)), то и $\mathscr{F}(t^{-2r} j_{\alpha,k}(t)) \in L_{1,\alpha}$.

Аналогично функции $g_{k,r}(t)$ (см. (3.6)) определим функцию

$$g_{k,r}^h(t) := \mathscr{F}^{-1}(\lambda^{-2r} j_{\alpha,k}(h\lambda)), \tag{3.16}$$

где $k, r \in \mathbb{N}$, $k \ge 2r - 1$, $h > 0$. В частности, $g_{k,r}^1(t) = g_{k,r}(t)$.

Лемма 3.4. *Имеет место равенство*

$$\left\|g_{k,r}^h\right\|_{1,\alpha} = h^{2r} \|g_{k,r}\|_{1,\alpha}. \tag{3.17}$$

Доказательство. Если $\mathscr{F}^{-1}(f(\lambda)) = \tilde{f}(t)$ и $h > 0$ — произвольное число, то легко видеть, что

$$\mathscr{F}^{-1}(f(h\lambda)) = h^{-(2\alpha+2)} \tilde{f}(t/h). \tag{3.18}$$

Поэтому $g_{k,r}^h(t) = h^{2r} \mathscr{F}^{-1}((h\lambda)^{-2r} j_{\alpha,k}(h\lambda)) = h^{2r} g_{k,r}(t/h) h^{-(2\alpha+2)}$, откуда вытекает (3.17).

Пусть функция $f(t)$ принадлежит пространству Соболева $W_{p,\alpha}^r$, т. е. $f, \mathscr{B}f, \ldots, \mathscr{B}^r f \in L_{p,\alpha}$.

Лемма 3.5. *Если $f \in W_{p,\alpha}^r$ и $k \ge 2r - 1$, то функцию ${}^*\Delta_h^k f$ можно представить в виде свертки*

$$^*\Delta_h^k f = (-1)^r g_{k,r}^h * (\mathscr{B}^r f). \tag{3.19}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = \mathscr{B}^r f$, тогда $\widehat{\varphi}(\lambda) = (-1)^r \lambda^{2r} \hat{f}(\lambda)$. Для доказательства равенства (3.19) сделаем преобразования Бесселя от левой и правой частей в формуле (3.19). Тогда (см. (3.3)) $\widehat{^*\Delta_h^k f}(\lambda) = j_{\alpha,k}(h\lambda) \hat{f}(\lambda)$. С другой стороны, $\mathscr{F}\left(g_{k,r}^h * \varphi\right) = \mathscr{F}\left(g_{k,r}^h\right) \widehat{\varphi}(\lambda) = \lambda^{-2r} j_{\alpha,k}(h\lambda)(-1)^r \lambda^{2r} \hat{f}(\lambda) = (-1)^r j_{\alpha,k}(h\lambda) \hat{f}(\lambda)$, откуда следует (3.19).

Лемма 3.6. *Для любой функции $f \in W^r_{p,\alpha}$, $k \geq 2r-1$, $1 \leq p \leq \infty$, справедливо неравенство*
$$\left\| {}^*\Delta^k_h f \right\|_{p,\alpha} \leq ch^{2r} \|\mathscr{B}^r f\|_{p,\alpha}, \tag{3.20}$$
где $c = c(k, r, \alpha)$ — некоторая постоянная.

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = \mathscr{B}^r f$. Из лемм 3.3, 3.4 и свойства (2.24) свертки вытекает, что
$$\left\| {}^*\Delta^k_h f \right\|_{p,\alpha} \leq \left\| g^h_{k,r} \right\|_{1,\alpha} \|\varphi\|_{p,\alpha} \leq ch^{2r} \|\varphi\|_{p,\alpha},$$
где $c = \|g_{k,r}\|_{1,\alpha}$.

Если $h \in \mathscr{S}'_+$, то условие $\operatorname{supp} h \subseteq [0, \nu]$ эквивалентно тому, что для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}_+$ из того, что $\operatorname{supp} \varphi \subset (\nu, +\infty)$, следует равенство $\langle h, \varphi \rangle = 0$.

Лемма 3.7. *Пусть $f(x) \in L_{1,\alpha}$, $g(x) \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$. Если $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [0, \nu]$, то свертка $f * g$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$.*

Доказательство. Из того, что $f \in L_{1,\alpha}$, $g \in L_{p,\alpha}$, вытекает, что $f * g \in L_{p,\alpha}$ (см. (2.24)) и, следовательно, $f * g \in \mathscr{S}'_+$. Проверим, что $\operatorname{supp} \widehat{f * g} \subseteq [0, \nu]$.

Пусть $\varphi \in \mathscr{D}_+$ и $\operatorname{supp} \varphi \subset (\nu, +\infty)$. Используя свойства обобщенного сдвига Бесселя (см. (2.13)–(2.15)) и изменяя порядок интегрирования, получим
$$\begin{aligned}\langle \widehat{f * g}, \varphi \rangle = \langle f * g, \widehat{\varphi} \rangle &= \int \left(\int (T^\lambda f(s)) g(s) s^{2\alpha+1}\, ds \right) \widehat{\varphi}(\lambda) \lambda^{2\alpha+1}\, d\lambda \\ &= \int \left(\int (T^s f(\lambda)) \widehat{\varphi}(\lambda) \lambda^{2\alpha+1}\, d\lambda \right) g(s) s^{2\alpha+1}\, ds \\ &= \int \left(\int f(\lambda) (T^s \widehat{\varphi}(\lambda)) \lambda^{2\alpha+1}\, d\lambda \right) g(s) s^{2\alpha+1}\, ds. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Учитывая (2.15), получаем, что $T^s \widehat{\varphi} = T^s \mathscr{F}(\varphi(t)) = \mathscr{F}(j_\alpha(st)\varphi(t))$. Функция $\psi(t) = j_\alpha(st)\varphi(t)$ содержится в классе $\mathscr{D}_+$ и $\operatorname{supp} \psi \subset (\nu, +\infty)$, а так как $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [0, \nu]$, то
$$\int f(\lambda)(T^s \widehat{\varphi}(\lambda)) \lambda^{2\alpha+1}\, d\lambda = \int \hat{f}(t) j_\alpha(st) \varphi(t) t^{2\alpha+1}\, dt = \langle \hat{f}, \psi \rangle = 0. \tag{3.22}$$

Из (3.21) и (3.22) следует, что $\langle \widehat{f * g}, \varphi \rangle = 0$, поэтому $\operatorname{supp} \widehat{f * g} \subseteq [0, \nu]$.

Из теоремы 2.2 вытекает, что $f * g = \mathscr{F}^{-1}(\widehat{f * g})$ является целой функцией экспоненциального типа ν, а поскольку $f * g \in L_{p,\alpha}$, то $f * g \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, что завершает доказательство леммы 3.7.

Предложение 3.1. *Для модуля гладкости ${}^*\omega_k(f, t)_{p,\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, справедливы следующие свойства.*

1°. *По переменной t функция ${}^*\omega_k(f, t)_{p,\alpha}$ не убывает.*

2°. ${}^*\omega_k(f + g, t)_{p,\alpha} \leq {}^*\omega_k(f, t)_{p,\alpha} + {}^*\omega_k(g, t)_{p,\alpha}, \quad f, g \in L_{p,\alpha}$.

3°. ${}^*\omega_k(f, t)_{p,\alpha} \leq 2^k \|f\|_{p,\alpha}$.

4°. *Если $f \in W^r_{p,\alpha}$, то ${}^*\omega_k(f, t)_{p,\alpha} \leq ct^{2r} \|\mathscr{B}^r f\|_{p,\alpha}$ для любого $k \geq 2r - 1$, где $c = c(k, r, \alpha)$ — постоянная.*

Доказательство. Свойства 1° и 2° сразу следуют из определения модуля гладкости ${}^*\omega_k(f, t)_{p,\alpha}$. Свойство 3° вытекает из определения ${}^*\omega_k(f, t)_{p,\alpha}$ и из того, что $\|T^h f\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha}$ для $f \in L_{p,\alpha}$ (см. (2.17) и (2.19)). Свойство 4° получаем из леммы 3.6.

Пусть $\eta(\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям: $\eta(\lambda) \ge 0$; $\eta(\lambda) = 1$ при $0 \le \lambda \le \frac{3}{2}$ и $\eta(\lambda) = 0$ при $\lambda \ge 2$. В дальнейшем будем считать, что функция $\eta(\lambda)$ фиксирована, и мы не будем уточнять, что постоянные в оценках зависят от η.

Определим семейство операторов P_ν для $\nu > 0$ по формуле

$$P_\nu(f) = \mathscr{F}^{-1}(\eta(\lambda/\nu)\hat{f}(\lambda)). \tag{3.23}$$

Оператор P_ν можно также записать в виде свертки

$$P_\nu(f) = \rho_\nu * f, \tag{3.24}$$

где

$$\rho_\nu = \mathscr{F}^{-1}\left(\eta(\lambda/\nu)\right). \tag{3.25}$$

Функция $\eta(\lambda/\nu)$ принадлежит классу $\mathscr{D}_+$ и тем более классу $\mathscr{S}_+$, поэтому $\rho_\nu(t) \in \mathscr{S}_+ \subset L_{1,\alpha}$. Из формулы (3.24) следует, что оператор P_ν переводит пространство $L_{p,\alpha}$ в себя.

Предложение 3.2. *Пусть $f \in L_{p,\alpha}$, $\nu > 0$, $1 \le p \le \infty$. Тогда*

1°) $P_\nu(f) \in \mathfrak{M}(2\nu, p, \alpha)$ *и* $P_\nu(\Phi) = \Phi$ *для любой функции* $\Phi \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$,

2°) $\|P_\nu(f)\|_{p,\alpha} \le c_1\|f\|_{p,\alpha}$,

3°) $\|f - P_\nu(f)\|_{p,\alpha} \le c_2 E_\nu(f)_{p,\alpha}$,

где $c_1 = c_1(\alpha)$ и $c_2 = c_2(\alpha)$ — некоторые постоянные, $E_\nu(f)_{p,\alpha}$ — наилучшее приближение функции f функциями из $\mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ (см. (1.8)).

Доказательство. 1. Так как $\operatorname{supp}\hat{\rho}_\nu \subseteq [0, 2\nu]$, то $P_\nu(f) = \rho_\nu * f \in \mathfrak{M}(2\nu, p, \alpha)$ по лемме 3.7. Если $\Phi \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, то по предложению 2.1 $\widehat{\Phi}(\lambda)$ — обобщенная функция с носителем на $[0, \nu]$, а так как $\eta(\lambda/\nu) = 1$ на $\left[0, \frac{3}{2}\nu\right]$, то $\widehat{\Phi}(\lambda) = \eta(\lambda/\nu)\widehat{\Phi}(\lambda)$ и, следовательно, $P_\nu(\Phi) = \Phi$.

2. Из (3.24) следует, что

$$\|P_\nu(f)\|_{p,\alpha} \le \|\rho_\nu\|_{1,\alpha}\|f\|_{p,\alpha}. \tag{3.26}$$

Если

$$\rho(t) := \mathscr{F}^{-1}(\eta(\lambda)), \tag{3.27}$$

то $\rho_\nu(t) = \nu^{2\alpha+2}\rho(\nu t)$ (см. формулу (3.18)), поэтому

$$\|\rho_\nu(t)\|_{1,\alpha} = \int \nu^{2\alpha+2}|\rho(\nu t)|t^{2\alpha+1}\,dt = \|\rho\|_{1,\alpha}. \tag{3.28}$$

Таким образом, $\|P_\nu(f)\|_{p,\alpha} \le c_1\|f\|_{p,\alpha}$, где $c_1 = \|\rho\|_{1,\alpha}$.

3. Возьмем произвольную функцию $\Phi \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$, удовлетворяющую неравенству $\|f - \Phi\|_{p,\alpha} \le 2E_\nu(f)_{p,\alpha}$. Используя равенство $P_\nu(\Phi) = \Phi$ и свойство 2°, получим, что

$$\begin{aligned}\|f - P_\nu(f)\|_{p,\alpha} &= \|f - \Phi + P_\nu(\Phi - f)\|_{p,\alpha}\\ &\le \|f - \Phi\|_{p,\alpha} + c_1\|f - \Phi\|_{p,\alpha} \le 2(1 + c_1)E_\nu(f)_{p,\alpha},\end{aligned}$$

откуда вытекает неравенство 3° с $c_2 = 2(1 + c_1)$.

§ 4. Доказательство основных теорем

В следующей теореме доказывается слабый вариант неравенства Джексона. Всюду далее k — произвольное натуральное число, $m \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Теорема 4.1. *Пусть функции $f, \mathscr{B}f, \dots, \mathscr{B}^m f$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$ принадлежат пространству $L_{p,\alpha}$. Тогда для любого $\nu > 0$ справедливо неравенство*

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} \le \frac{c}{\nu^{2m}} {}^*\omega_k \left(\mathscr{B}^m f, \frac{A}{\nu}\right)_{p,\alpha}, \tag{4.1}$$

где $c = c(k, m, \alpha)$ и $A = A(k, \alpha)$ — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. 1. Так как

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} \le \|f - P_{\nu/2}(f)\|_{p,\alpha}, \quad \left\|{}^*\Delta^k_{A/\nu}(\mathscr{B}^m f)\right\|_{p,\alpha} \le {}^*\omega_k(\mathscr{B}^m f, A/\nu)_{p,\alpha},$$

для доказательства неравенства (4.1) достаточно доказать неравенство

$$\|f - P_{\nu/2}(f)\|_{p,\alpha} \le c\nu^{-2m} \left\|{}^*\Delta^k_{A/\nu}(\mathscr{B}^m f)\right\|_{p,\alpha}. \tag{4.2}$$

Возьмем преобразование Бесселя от функции $f - P_{\nu/2}(f)$. Используя свойства преобразования Бесселя (см. (2.7), (2.15), (3.3)), получим

$$\mathscr{F}(f - P_{\nu/2}(f)) = (1 - \eta(2\lambda/\nu))\hat{f}(\lambda) = (-1)^m \frac{(1 - \eta(2\lambda/\nu))}{\lambda^{2m} j_{\alpha,k}(A\lambda/\nu)} j_{\alpha,k}(A\lambda/\nu)$$
$$\times (-1)^m \lambda^{2m} \hat{f}(\lambda) = \nu^{-2m}(-1)^m \frac{(1 - \eta(2\lambda/\nu))}{(\lambda/\nu)^{2m} j_{\alpha,k}(A\lambda/\nu)} \mathscr{F}\left({}^*\Delta^k_{A/\nu}(\mathscr{B}^m f)\right). \tag{4.3}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) := (-1)^m \frac{(1 - \eta(2\lambda))}{\lambda^{2m} j_{\alpha,k}(A\lambda)}, \tag{4.4}$$

где A — положительное число, которое будет уточнено в дальнейшем. Функцию $j_{\alpha,k}(\lambda)$ представим в виде

$$j_{\alpha,k}(\lambda) = 1 - \gamma(\lambda), \tag{4.5}$$

где

$$\gamma(\lambda) := \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} \binom{k}{l} j_\alpha(l\lambda). \tag{4.6}$$

Поскольку $j_\alpha(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, то и $\gamma(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Выберем число $A > 0$ так, чтобы при $\lambda \ge \frac{A}{2}$ выполнялось неравенство $\gamma(\lambda) \le \frac{1}{2}$. При таком выборе числа A знаменатель в формуле (4.4) не равен нулю при $\lambda \ge \frac{1}{2}$, так как $j_{\alpha,k}(A\lambda) = 1 - \gamma(A\lambda) \ge \frac{1}{2}$. С другой стороны, $1 - \eta(2\lambda) = 0$ при $0 \le \lambda \le \frac{1}{2}$, поэтому функция $\varphi(\lambda)$ бесконечно дифференцируемая. Очевидно, что функция $\varphi(\lambda)$ принадлежит классу мультипликаторов на пространстве $\mathscr{S}'_+$ (т. е. $\varphi(\lambda)$ — бесконечно дифференцируемая четная функция, у которой каждая производная возрастает при $\lambda \to \infty$ не быстрее некоторой степени λ).

2. Определим семейство операторов σ_ν, $\nu > 0$, на пространстве $\mathscr{S}'_+$ по формуле

$$\sigma_\nu(g) := \mathscr{F}^{-1}(\varphi(\lambda/\nu)\hat{g}(\lambda)), \quad g \in \mathscr{S}'_+, \tag{4.7}$$

где функция φ определяется формулой (4.4).

Проверим, что оператор σ_ν переводит пространство $L_{p,\alpha}$, $1 \le p \le \infty$, в себя и для любой функции $g \in L_{p,\alpha}$ справедливо неравенство

$$\|\sigma_\nu(g)\|_{p,\alpha} \le c_1 \|g\|_{p,\alpha}, \tag{4.8}$$

где $c_1 = c_1(k, \alpha)$ — постоянная.

Для функции $j_\alpha(x)$ при $x \to \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула (см., например, [22, гл. 7, п. 7.13.1]):

$$j_\alpha(x) = \frac{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}} x^{-\alpha-1/2} \left(\cos\left(x - \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right). \tag{4.9}$$

Из (4.9) вытекает, что

$$j_\alpha(x) = O(x^{-\alpha-1/2}) \tag{4.10}$$

при $x \to \infty$. Из формулы

$$\frac{dj_\alpha}{dx}(x) = \frac{x j_{\alpha+1}(x)}{(2\alpha+2)} \tag{4.11}$$

(см., например, [18, формула 8.472]) и (4.10) следует, что и для всех производных $j_\alpha^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, справедлива оценка

$$j_\alpha^{(n)}(x) = O(x^{-\alpha-1/2}) \tag{4.12}$$

при $x \to \infty$.

Из оценок (4.10), (4.12) и определения функции $\gamma(\lambda)$ (см. (4.6)) вытекает, что аналогичные оценки справедливы и для функции $\gamma(\lambda)$, т. е.

$$\gamma^{(n)}(\lambda) = O(\lambda^{-\alpha-1/2}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.13}$$

при $\lambda \to \infty$.

Пусть

$$Q_N(s) = 1 + s + s^2 + \cdots + s^N, \tag{4.14}$$

тогда

$$\frac{1}{1-s} - Q_N(s) = \frac{s^{N+1}}{1-s} = o(s^N)$$

при $s \to 0$. Подставляя $s = \gamma(\lambda)$ и используя (4.13) получим, что

$$\frac{1}{1-\gamma(\lambda)} - Q_N(\gamma(\lambda)) = o(\lambda^{-N(\alpha+1/2)}) \tag{4.15}$$

при $\lambda \to \infty$.

3. Представим функцию $\varphi(\lambda)$ в виде суммы

$$\varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda), \tag{4.16}$$

где

$$\varphi_1(\lambda) := (-1)^m \frac{(1-\eta(2\lambda))}{\lambda^{2m}} \left(\frac{1}{1-\gamma(\lambda)} - Q_N(\gamma(\lambda))\right),$$

$$\varphi_2(\lambda) := (-1)^m \frac{(1-\eta(2\lambda))}{\lambda^{2m}} Q_N(\gamma(\lambda)).$$

Так как функции $\varphi_1(\lambda)$ и $\varphi_2(\lambda)$ принадлежат классу мультипликаторов на $\mathscr{S}'_+$, оператор σ_ν можно представить в виде суммы операторов

$$\sigma_\nu(g) = \sigma_\nu^{(1)}(g) + \sigma_\nu^{(2)}(g), \tag{4.17}$$

где $\sigma_\nu^{(i)}(g) := \mathscr{F}^{-1}(\varphi_i(\lambda/\nu)\hat{g}(\lambda))$, $i = 1, 2$. Если взять N достаточно большим (например, $N = \left[\frac{2}{2\alpha+1}\right] + 2$), то из асимптотики (4.15) следует, что $\varphi_1(\lambda) \in L_{1,\alpha}$. Из оценки (4.13) легко также получить, что и все производные $\varphi_1^{(n)}(\lambda)$ содержатся в классе $L_{1,\alpha}$, а из этого, рассуждая, как при доказательстве леммы 3.3 (п. 2)), — что $\mathscr{F}^{-1}(\varphi_1(\lambda)) \in L_{1,\alpha}$.

Введем временные обозначения

$$G_1(t) := \mathscr{F}^{-1}(\varphi_1(\lambda)), \quad G_{1,\nu}(t) := \mathscr{F}^{-1}(\varphi_1(\lambda/\nu)), \ \nu > 0.$$

Оператор $\sigma_\nu^{(1)}$ можно представить в виде свертки

$$\sigma_\nu^{(1)}(g) = G_{1,\nu} * g. \tag{4.18}$$

Так как $G_{1,\nu} \in L_{1,\alpha}$, то из $g \in L_{p,\alpha}$ следует, что $\sigma_\nu^{(1)}(g) \in L_{p,\alpha}$ и $\left\|\sigma_\nu^{(1)}(g)\right\|_{p,\alpha} \le \|G_{1,\nu}\|_{1,\alpha}\|g\|_{p,\alpha}$, а поскольку $G_{1,\nu}(t) = \nu^{2\alpha+2}G_1(\nu t)$ (см. (2.10)), то $\|G_{1,\nu}\|_{1,\alpha} = \|G_1\|_{1,\alpha}$, поэтому

$$\left\|\sigma_\nu^{(1)}(g)\right\|_{p,\alpha} \le c_2\|g\|_{p,\alpha}, \tag{4.19}$$

где $c_2 = \|G_1\|_{1,\alpha}$.

Заметим, что для любой функции $g(t) \in L_{p,\alpha}$ и для любого $s > 0$

$$\mathscr{F}^{-1}(j_\alpha(s\lambda)\hat{g}(\lambda)) = T^s g(t)$$

(см. (2.15)), следовательно, используя (2.19), получим

$$\|\mathscr{F}^{-1}\left(j_\alpha(s\lambda)\hat{g}(\lambda)\right)\|_{p,\alpha} = \|T^s g\|_{p,\alpha} \le \|g\|_{p,\alpha}. \tag{4.20}$$

Определим оператор Φ_ν по формуле

$$\Phi_\nu(g) := \mathscr{F}^{-1}(\gamma(\lambda/\nu)\hat{g}(\lambda)), \quad g \in \mathscr{S}'_+. \tag{4.21}$$

Из оценки (4.20) и определения функции $\gamma(t)$ (см. (4.6)) вытекает, что

$$\|\Phi_\nu(g)\|_{p,\alpha} = \left\|\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l+1}\binom{k}{l}T^{l/\nu}g(t)\right\|_{p,\alpha} \le 2^k\|g\|_{p,\alpha}. \tag{4.22}$$

4. При исследовании оператора $\sigma_\nu^{(2)}$ рассмотрим два случая: $m = 0$ и $m \ge 1$. При $m = 0$ оператор $\sigma_\nu^{(2)}$ имеет вид

$$\sigma_\nu^{(2)}(g) = \mathscr{F}^{-1}((1 - \eta(2\lambda/\nu)Q_N(\gamma(\lambda/\nu))\hat{g}(\lambda)). \tag{4.23}$$

Правая часть в (4.23) представляет собой линейную комбинацию функций $\Phi_\nu^j(g)$ и $\rho_{\nu/2} * \left(\Phi_\nu^j(g)\right)$, $j = 0, 1, \ldots, N$, где $\rho_{\nu/2}(t) = \mathscr{F}^{-1}(\eta(2\lambda/\nu))$ (см. (3.25)). Используя (4.22), получим, что

$$\left\|\Phi_\nu^j(g)\right\|_{p,\alpha} \le 2^{kj}\|g\|_{p,\alpha} \le 2^{kN}\|g\|_{p,\alpha}, \quad \left\|\rho_{\nu/2} * \left(\Phi_\nu^j(g)\right)\right\|_{p,\alpha} \le \|\rho\|_{1,\alpha}2^{kN}\|g\|_{p,\alpha},$$

где $\rho(t) = \mathscr{F}^{-1}(\eta(\lambda))$. Поэтому при $m = 0$

$$\left\|\sigma_\nu^{(2)}(g)\right\|_{p,\alpha} \le c_3\|g\|_{p,\alpha}, \tag{4.24}$$

где $c_3 = c_3(k, \alpha)$ — некоторая постоянная.

5. Пусть $m \ge 1$. Докажем, что функция

$$\zeta_m(t) := \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{1 - \eta(2\lambda)}{\lambda^{2m}}\right) \tag{4.25}$$

принадлежит классу $L_{1,\alpha}$. Для доказательства будем использовать методы, аналогичные методам из п. 2 доказательства леммы 3.3. Функцию λ^{-2m} можно представить в виде $\lambda^{-2m} = u^m(1-u)^{-m}$, где $u = (1+\lambda^2)^{-1}$. При $|u| < 1$ функцию $u^m(1-u)^{-m}$ можно разложить в степенной ряд: $u^m(1-u)^{-m} = \sum\limits_{j=m}^{\infty} a_j u^j$ с некоторыми коэффициентами a_j. Пусть $P_M(u) = \sum\limits_{j=m}^{M} a_j u^j$ — частичная сумма этого ряда. Пусть $Q_M(\lambda) := P_M((1+\lambda^2)^{-1})$, $R_M(\lambda) := \lambda^{-2M} - Q_M(\lambda)$, тогда $R_M(\lambda) = o(\lambda^{-2m})$ при $\lambda \to \infty$, а так как $R_M(\lambda)$ — рациональная функция, то и для всех производных $R_M^{(n)}(\lambda)$ справедливо равенство

$$R_M^{(n)}(\lambda) = o(\lambda^{-2M}), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.26}$$

при $\lambda \to \infty$.

Рассмотрим функцию $\Lambda_M(\lambda) := (1-\eta(2\lambda))R_M(\lambda)$. Так как функция $1 - \eta(2\lambda)$ и все ее производные ограничены на $\mathbb{R}_+$, из (4.26) вытекает, что

$$\Lambda_M^{(n)}(\lambda) = o(\lambda^{-2M}), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.27}$$

при $\lambda \to \infty$. Из равенства (4.27), дословно повторяя рассуждения из п. 2 доказательства леммы 3.3, получим, что

$$\mathscr{F}^{-1}\left(\Lambda_M(\lambda)\right) \in L_{1,\alpha} \tag{4.28}$$

при достаточно большом M (например, $M = [\alpha] + 2$).

Представим функцию $\zeta_m(t)$ в виде

$$\zeta_m(t) = \mathscr{F}^{-1}(\Lambda_M(\lambda)) + \mathscr{F}^{-1}(Q_M(\lambda)) - \mathscr{F}^{-1}(\eta(2\lambda)Q_M(\lambda)). \tag{4.29}$$

Так как $\mathscr{F}^{-1}((1+\lambda^2)^{-d}) \in L_{1,\alpha}$ для любого $d > 0$ (см. лемму 3.2), то $\mathscr{F}^{-1}(Q_M(\lambda)) \in L_{1,\alpha}$. Поскольку функция $\eta(2\lambda)P_M((1+\lambda^2)^{-2})$ принадлежит классу $\mathscr{S}_+$ (даже классу $\mathscr{D}_+$), то $\mathscr{F}^{-1}(\eta(2\lambda)Q_M(\lambda)) \in \mathscr{S}_+ \subset L_{1,\alpha}$. Наконец, с учетом (4.28) получаем, что каждое слагаемое из правой части (4.29) принадлежит классу $L_{1,\alpha}$, тогда и функция $\zeta_m(t)$ тоже принадлежит $L_{1,\alpha}$.

6. Введем обозначения

$$G_2(t) := \mathscr{F}^{-1}(\varphi_2(\lambda)), \quad G_{2,\nu}(t) := \mathscr{F}^{-1}(\varphi_2(\lambda/\nu)).$$

Из определения $Q_N(s)$ (см. (4.14)), определения оператора Φ_1 (см. (4.21)) и определения функции $\zeta_m(t)$ (см. (4.25)) вытекает, что

$$G_2(t) = (-1)^m \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{(1-\eta(2\lambda))}{\lambda^{2m}} Q_N(\gamma(\lambda))\right) = (-1)^m \sum_{j=0}^{N} \Phi_1^j(\zeta_m) \in L_{1,\alpha}.$$

Тогда функция $G_{2,\nu}(t)$ также принадлежит классу $L_{1,\alpha}$ и $\|G_{2,\nu}\|_{1,\alpha} = \|G_2\|_{1,\alpha}$.

Оператор $\sigma_\nu^{(2)}$ можно представить в виде свертки

$$\sigma_\nu^{(2)}(g) = G_{2,\nu} * g. \tag{4.30}$$

Если $g \in L_{p,\alpha}$, то из (4.30) следует, что $\sigma_\nu^{(2)}(g) \in L_{p,\alpha}$ и

$$\left\|\sigma_\nu^{(2)}(g)\right\|_{p,\alpha} \le c_4 \|g\|_{p,\alpha}, \tag{4.31}$$

где $c_4 = \|G_2\|_{1,\alpha}$.

7. Из равенства (4.17) и из неравенств (4.19), (4.24), (4.31) вытекает неравенство (4.8). Возьмем в качестве $g(t)$ функцию $g(t) = {}^*\Delta_{A/\nu}^k(\mathscr{B}^m f)$. Из (4.3), (4.4) и (4.8) следует, что

$$\|f - P_{\nu/2}(f)\|_{p,\alpha} = \nu^{-2m}\left\|\sigma_\nu\left({}^*\Delta_{A/\nu}^k(\mathscr{B}^m f)\right)\right\|_{p,\alpha} \le c_1\nu^{-2m}\left\|{}^*\Delta_{A/\nu}^k(\mathscr{B}^m f)\right\|_{p,\alpha},$$

что доказывает (4.2) и тем самым завершает доказательство теоремы 4.1.

Предложение 4.1. *Пусть m — произвольное натуральное число, $k = 2m$ или $k = 2m - 1$. Для любых $f \in L_{p,\alpha}$ и $\nu > 0$ справедливо неравенство*

$$\|\mathscr{B}^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha} \le c\nu^{2m*}\omega_k\left(f, \frac{a}{\nu}\right)_{p,\alpha}, \tag{4.32}$$

где $c = c(k, \alpha)$ и $a = a(k, \alpha)$ — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Так как $\left\|{}^*\Delta^k_{a/\nu} f\right\|_{p,\alpha} \le {}^*\omega_k(f, a/\nu)_{p,\alpha}$, для доказательства неравенства (4.32) достаточно доказать неравенство

$$\|\mathscr{B}^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha} \le c\nu^{2m}\left\|{}^*\Delta^k_{a/\nu} f\right\|_{p,\alpha}. \tag{4.33}$$

Возьмем преобразование Бесселя от функции $\mathscr{B}^m(P_\nu(f))$. Используя свойства преобразования Бесселя (см. (2.7), (2.15), (3.3)), получим

$$\mathscr{F}(\mathscr{B}^m(P - \nu(f))) = (-1)^m\lambda^{2m}\eta(\lambda/\nu)\hat{f}(\lambda) = (-1)^m\frac{\lambda^{2m}\eta(\lambda/\nu)}{j_{\alpha,k}(a\lambda/\nu)}j_{\alpha,k}(a\lambda/\nu)\hat{f}(\lambda)$$
$$= \nu^{2m}(-1)^m\frac{(\lambda/\nu)^{2m}\eta(\lambda/\nu)}{j_{\alpha,k}(a\lambda/\nu)}\mathscr{F}\left({}^*\Delta^k_{a/\nu} f\right). \tag{4.34}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(\lambda) := (-1)^m\frac{\lambda^{2m}\eta(\lambda)}{j_{\alpha,k}(a\lambda)}, \tag{4.35}$$

где a — положительное число, которое будет уточнено в дальнейшем. Из леммы 3.1 следует, что функция $j_{\alpha,k}(\lambda)$ имеет при $\lambda = 0$ нуль кратности $2m$, поэтому ее можно представить в виде $j_{\alpha,k}(\lambda) = \lambda^{2m}h_{\alpha,k}(\lambda)$, где $h_{\alpha,k}(\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ и $h_{\alpha,k}(0) \ne 0$. Тогда

$$\psi(\lambda) = (-1)^m\frac{\eta(\lambda)}{a^{2m}h_{\alpha,k}(a\lambda)}. \tag{4.36}$$

Выберем число $a > 0$ так, чтобы $h_{\alpha,k}(\lambda) \ne 0$ при $\lambda \in [0, 2a]$. При $\lambda \in [0, 2]$ знаменатель в формуле (4.36) не равен 0, а при $\lambda > 2$ будет $\eta(\lambda) \equiv 0$. Поэтому функция $\psi(\lambda)$ бесконечно дифференцируемая и даже $\psi(\lambda) \in \mathscr{D}_+$.

Пусть $\Psi(t) := \mathscr{F}^{-1}(\psi(\lambda))$, $\Psi_\nu(t) := \mathscr{F}^{-1}(\psi(\lambda/\nu))$, тогда $\Psi, \Psi_\nu \in \mathscr{S}_+$ и из (4.34) следует, что

$$\mathscr{B}^m(P_\nu(f)) = \nu^{2m}\Psi_\nu * \left({}^*\Delta^k_{a/\nu} f\right). \tag{4.37}$$

Из свойств свертки вытекает, что

$$\|\mathscr{B}^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha} \le \nu^{2m}\|\Psi_\nu\|_{1,\alpha}\left\|{}^*\Delta^k_{a/\nu} f\right\|_{p,\alpha}, \tag{4.38}$$

а так как $\|\Psi_\nu\|_{1,\alpha} = \|\Psi\|_{1,\alpha}$, то из (4.38) получаем неравенство (4.33) с $c = \|\Psi\|_{1,\alpha}$.

Перейдем к доказательству теоремы 1.2. Пусть $K\left(f, t; L_{p,\alpha}, W^m_{p,\alpha}\right)$ — K-функционал, построенный по пространствам $L_{p,\alpha}$ и $W^m_{p,\alpha}$ (см. (1.10)), $f \in L_{p,\alpha}$, $t > 0$. Для краткости введем обозначение

$$K_m(f, t)_{p,\alpha} := K\left(f, t^{2m}; L_{p,\alpha}, W^m_{p,\alpha}\right). \tag{4.39}$$

Неравенства (1.11) и (1.12), которые нужно доказать, можно переписать в виде

$$c_1{}^*\omega_k(f, t)_{p,\alpha} \le K_m(f, t)_{p,\alpha} \le c_2{}^*\omega_k(f, t)_{p,\alpha}, \tag{4.40}$$

где $k = 2m$ или $k = 2m - 1$, $c_1 = c_1(k, \alpha)$ и $c_2 = c_2(k, \alpha)$ — постоянные.

Доказательство теоремы 1.2. 1. Пусть $f \in L_{p,\alpha}$, g — произвольная функция из пространства $W^m_{p,\alpha}$. Используя свойства модуля гладкости ${}^*\omega_k(f,t)_{p,\alpha}$ (см. предложение 3.1), получим

$$\begin{aligned} {}^*\omega_k(f,t)_{p,\alpha} &\le {}^*\omega_k(f-g,t)_{p,\alpha} + {}^*\omega_k(g,t)_{p,\alpha} \\ &\le 2^k\|f-g\|_{p,\alpha} + ct^{2m}\|\mathscr{B}^m g\|_{p,\alpha} \le c_3(\|f-g\|_{p,\alpha} + t^{2m}\|\mathscr{B}^m g\|_{p,\alpha}), \end{aligned}$$

где $c_3 = \max\{2^k, c\}$. Взяв точную нижнюю грань по всем $g \in W^m_{p,\alpha}$, имеем

$$ {}^*\omega_k(f,t)_{p,\alpha} \le c_3 K_m(f,t)_{p,\alpha}, \tag{4.41}$$

откуда приходим к левому неравенству в (4.40).

2. Если взять $g = P_\nu(f)$, $\nu > 0$, то из определения $K_m(f,t)_{p,\alpha}$ следует, что

$$K_m(f,t)_{p,\alpha} \le \|f - P_\nu(f)\|_{p,\alpha} + t^{2m}\|\mathscr{B}^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha}. \tag{4.42}$$

По предложению 3.2 (п. 3°) справедливо неравенство

$$\|f - P_\nu(f)\|_{p,\alpha} \le c_4 E_\nu(f)_{p,\alpha}, \tag{4.43}$$

откуда, пользуясь теоремой 3.1, имеем $\|f - P_\nu(f)\|_{p,\alpha} \le c_5{}^*\omega_k(f, A/\nu)_{p,\alpha}$. Из предложения 3.3 следует, что

$$\|\mathscr{B}^m(P_\nu(f))\|_{p,\alpha} \le c_6\nu^{2m*}\omega_k(f, a/\nu)_{p,\alpha}. \tag{4.44}$$

Пусть $D = \max\{a, A\}$. Из (4.42)–(4.44), пользуясь монотонностью ${}^*\omega_k(f,t)_{p,\alpha}$ по t, получим

$$K_m(f,t)_{p,\alpha} \le c_7(1 + (t\nu)^{2m})^*\omega_k(f, D/\nu)_{p,\alpha}, \tag{4.45}$$

где $c_7 = \max\{c_5, c_6\}$. Взяв в неравенстве (4.45) $\nu = \frac{D}{t}$, имеем $K_m(f,t)_{p,\alpha} \le c_7(1 + D^{2m})^*\omega_k(f, 1/t)_{p,\alpha}$, откуда вытекает правое неравенство в (4.40) с $c_2 = c_7(1 + D^{2m})$, что завершает доказательство теоремы 1.2.

В качестве следствия теоремы 1.2 получим еще одно важное свойство модуля гладкости ${}^*\omega_k(f,t)_{p,\alpha}$.

Предложение 4.2. *Существует постоянная $c = c(k,\alpha)$ такая, что при $f \in L_{p,\alpha}$, $t > 0$, $\delta > 0$, справедливо неравенство*

$$ {}^*\omega_k(f, \delta t)_{p,\alpha} \le c\max\{1, \delta^{2m}\}^*\omega_k(f,t)_{p,\alpha}, \tag{4.46}$$

где $k = 2m$ или $k = 2m - 1$.

Доказательство. Из определения K-функционала легко вывести неравенство $K_m(f, \delta t)_{p,\alpha} \le \max\{1, \delta^{2m}\}K_m(f,t)_{p,\alpha}$, откуда с помощью (4.40) приходим к неравенству (4.46).

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $f \in W^r_{p,\alpha}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, m — произвольное натуральное число, $k = 2m$ или $k = 2m - 1$. Воспользуемся теоремой 3.1 и неравенством (4.46):

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} \le \frac{c_1}{\nu^{2r}}{}^*\omega_k\left(\mathscr{B}^r f, \frac{A}{\nu}\right)_{p,\alpha} \le \frac{c_1 c\max\{1, A^{2m}\}}{\nu^{2r}}{}^*\omega_k\left(\mathscr{B}^r f, \frac{1}{\nu}\right)_{p,\alpha},$$

откуда $E_\nu(f)_{p,\alpha} \le \frac{c_2}{\nu^{2r}}{}^*\omega_k\left(\mathscr{B}^r f, \frac{1}{\nu}\right)_{p,\alpha}$, где $c_2 = cc_1\max\{1, A^{2m}\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Butzer P. L., Berens H.* Semi-groups of operators and approximation. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967.
2. *Терехин А. П.* Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд-во Саратовского гос. университета, 1975. С. 3–28.
3. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973.
4. *Löfstróm J., Peetre J.* Approximation theorems connected with generalized translations // Math. Ann. 1969. V. 181. P. 255–268.
5. *Потапов М. К.* О применении оператора обобщенного сдвига в теории приближений // Вестн. МГУ. Сер. I. Математика, механика. 1998. № 3. С. 38–48.
6. *Ditzian Z., Totik V.* Moduli of smoothness. New York etc.: Springer-Verl., 1987.
7. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, № 2. С. 102–143.
8. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.
9. *Trimèche K.* Generalized harmonic analysis and wavelet packets. Amsterdam: Gordon and Breach Sci. Publ., 2000.
10. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Мат. сб. 1955. Т. 36, № 2. С. 299–310.
11. *Платонов С. С.* Аналоги неравенств Бернштейна и Никольского для одного класса целых функций экспоненциального типа // Докл. РАН. 2004. Т. 398, № 2. С. 168–171.
12. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
13. *Никольский С. М., Лизоркин П. И.* Классы функций, построенных на основе усреднений // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 181–197.
14. *Лизоркин П. И.* Классы функций, построенные на основе усреднений по сферам // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1990. Т. 192. С. 122–139.
15. *Ляхов Л. Н.* Пространства B-потенциалов Рисса // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 3. С. 278–280.
16. *Trimèche K.* Transmutation operators and mean-periodic functions associated with differential operators // Math. Reports. 1988. V. 4, N 1. P. 1–282.
17. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
18. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
19. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990.
20. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
21. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1970. Т. II.
22. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. II.

Статья поступила 18 августа 2006 г.

Платонов Сергей Сергеевич
Петрозаводский гос. университет, математический факультет,
пр. Ленина, 33, Петрозаводск 185640
platonov@psu.karelia.ru