*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2009. Том 50, № 2*

*УДК 517.5*

# СИСТЕМА ЭКСПОНЕНТ СО СДВИГОМ И ЗАДАЧА А. Г. КОСТЮЧЕНКО

**Б. Т. Билалов**

**Аннотация.** Вводится система экспонент со сдвигом, исследуются ее базисные свойства в $L_2$ и анализируется ее связь с задачей Костюченко.

**Ключевые слова:** система экспонент, полнота, минимальность, базисность.

Широкому кругу математиков известна следующая задача А. Г. Костюченко, поставленная в 1969 г.: доказать полноту системы $S_\alpha^+ \equiv \{e^{\alpha nt}\sin nt\}_{n\geq 1}$ в $L_2(0,\pi)$ с помощью теоретико-функциональных методов и изучить базисные свойства этой системы. Первое такое доказательство дано в 1971 г. Б. Я. Левиным [1]. Следует отметить, что система $S_\alpha \equiv \{e^{\alpha nt}\sin nt\}_{-\infty}^{+\infty}$ является набором собственных функций квадратичного пучка

$$-y''(t) + 2\alpha\lambda y'(t) + (\alpha^2+1)\lambda^2 y(t) = 0, \quad t\in(0,\pi),\ y(0)=y(\pi)=0.$$

Как известно, система $S_\alpha$ двукратно полна в $L_2[0,\pi]$ (см., например, [2, 3]). Система $S_\alpha^+$ представляет интерес и с точки зрения приложений в практических задачах. Рассмотрим нелинейную задачу оптимального управления [4]:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + f(t)\delta(x-v(t)), \quad 0<x<\pi,\ t>0,$$

$$Q(x,0) = Q_o(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{(x,0)} = Q_1(x), \quad 0<x<\pi,$$

$$Q(0,t) = Q(\pi,t) = 0, \quad t\geq 0.$$

Требуется найти такой закон изменения сосредоточенной нагрузки $f(t)$ во времени и распределение точек приложения этой нагрузки $v(t)$, чтобы струна успокоилась за заданное время $T$. Эта задача приводит к изучению проблемы моментов относительно системы $\{e^{ikt}\sin kv(t)\}_{k\geq 1}$. Таким образом, возникает потребность исследования базисных свойств систем типа $S_\alpha^+$ в различных функциональных пространствах. В связи с отмеченными вопросами базисным свойствам систем типа $S_\alpha^+$:

$$\{a(t)\varphi^n(t) - b(t)\psi^n(t)\}_{n\geq N}, \tag{1}$$

посвящено много работ (см., например, [5–9]).

Как обычно, изучение базисных свойств системы (1) редуцируется к изучению краевых задач Римана с карлемановским сдвигом на границе соответствующей области. Получающиеся при этом краевые задачи имеют специфические особенности по сравнению с известными задачами (см., например, [10, 11]). В связи с этим разные авторы по-своему изучали полученные задачи и на функции $a(t), b(t), \varphi(t), \psi(t)$, входящие в (1), налагали различные условия. При этом нужно отметить, что базисные свойства системы А. Г. Костюченко и тем более систем вида (1) не были полностью изучены.

В отличие от предшествующих работ мы для установления базисных свойств системы (1) используем аналогичные свойства относительно «двойной» системы экспонент со сдвигом:

$$\{A(t)e^{in\nu(t)}; B(t)e^{-ikt}\}_{n\geq 0, k\geq 0}, \tag{2}$$

где $A(t) \equiv |A(t)|e^{i\alpha(t)}$, $B(t) \equiv |B(t)|e^{i\beta(t)}$ — комплекснозначные на $[-\pi, \pi]$ функции, $\nu(t)$ — сдвиг отрезка $[-\pi, \pi]$.

Настоящая работа посвящена изучению базисных свойств системы (2) в пространствах $L_p \equiv L_p(-\pi, \pi)$, $1 < p < +\infty$. Ее результаты ранее были частично анонсированы в работах автора [12–14].

## 1. Основные предположения и определения

Определим базисность «двойных» систем $\{x_k^+; x_k^-\}_{k\geq 0} \subset B$ в некотором банаховом пространстве $B$ с нормой $\|\cdot\|$.

Определение 1. Систему $\{x_k^+; x_k^-\}_{k\geq 0}$ назовем *базисом в* $B$, если для любого $x \in B$ существует единственная последовательность $\{a_k^+; a_k^-\}_{k\geq 0} \subset C$ ($C$ — комплексная плоскость) такая, что

$$\left\| \sum_{k=0}^{N^+} a_k^+ x_k^+ + \sum_{k=0}^{N^-} a_k^- x_k^- - x \right\| \to 0 \quad \text{при } N^{\pm} \to \infty,$$

т. е.

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ x_k^+ + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^- x_k^-.$$

Для сравнения с классическим определением шаудерова базиса следует отметить, что если классическую систему экспонент $\{e^{int}\}_{-\infty}^{+\infty}$ представить в виде $\{e^{int}; e^{-i(n+1)t}\}_{n\geq 0}$, то она будет образовывать базис в $L_p$ в смысле этого определения.

Будем изучать базисные свойства системы (2) в двух случаях.

Случай A. (A1) $\nu' \in C^\alpha[-\pi, \pi]$ ($C^\alpha[-\pi, \pi]$ — класс Гёльдера), $\nu'(t) > 0$ $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $\nu(\pi) - \nu(-\pi) = 2\pi$, $\nu'(-\pi) = \nu'(\pi)$;

(A2) $|A(t)|^{\pm 1}, |B|^{\pm 1} \in L_\infty \equiv L_\infty(-\pi, \pi)$;

(A3) $\alpha(t)$, $\beta(t)$ кусочно непрерывные на $[-\pi, \pi]$ и $\{s_k\}_1^r$, $-\pi < s_1 < \dots < s_r < \pi$, — точки разрыва этих функций на $(-\pi, \pi)$;

(A4) $\frac{h_i}{2\pi} - \frac{1}{p} \notin \mathbb{Z}$, $i = \overline{1, r}$, где $h_i = \theta(s_i + 0) - \theta(s_i - 0)$, $\theta(t) = \beta(t) - \alpha(t)$.

Определим $\{n_i\}_1^r \subset \mathbb{Z}$ из следующих соотношений:

$$\frac{1}{p} - 1 < \frac{h_i}{2\pi} - n_i + n_{i-1} < \frac{1}{p}, \quad n_0 = 0,\ i = \overline{1, r}. \tag{3}$$

Обозначим

$$\omega = \frac{1}{2\pi}[\theta(-\pi + 0) - \theta(\pi - 0)] + n_r. \tag{4}$$

Случай B. (B1) $A(t)$, $B(t)$ кусочно непрерывные на $[-\pi, \pi]$, $\{t_k\}_i^e$ — множество точек разрыва этих функций на $(-\pi, \pi)$, причем $A(t)B(t) \neq 0$ $\forall t \in [-\pi, \pi]$;

(B2) $\nu(t) \in C[-\pi,\pi], \nu(t)$ кусочно дифференцируема и $\nu'(t)$ кусочно гёльдерова на $[-\pi,\pi]$, $\{\tau_k\}_1^m$ — соответствующие точки разрыва, причем $\nu(\pi)-\nu(-\pi) = 2\pi$, $\nu'(t) > 0$ для любого $t \in [-\pi,\pi]$ (на концах отрезка и в точках разрыва производные понимаются как односторонние);

(B3) $\{\varphi_k\}_0^r \cap \mathbb{Z} = \{\phi\}$, где

$$\varphi_k = \frac{1}{8\pi^2}[\nu_k + 2\ln|\lambda_k|]\nu_k + \frac{\pi - \arg\lambda_k}{2\pi},$$

$$\nu_0 = \ln\left|\frac{\nu'(-\pi+0)}{\nu'(\pi-0)}\right|, \quad \nu_{k=} \ln\left|\frac{\nu'(s_k+0)}{\nu'(s_k-0)}\right|, \; k=\overline{1,r},$$

$$\lambda_0 = \frac{G(-\pi+0)}{G(\pi-0)}, \;\; \lambda_k = \frac{G(s_k+0)}{G(s_k-0)}, \; k=\overline{1,r}, \;\; G(t) \equiv \frac{B(t)}{A(t)}, \;\; \{s_k\}_1^r \equiv \{t_k\}_1^e \cup \{\tau_k\}_1^m.$$

## 2. Базисность в $L_p$. Случай A

Когда сдвиг $\nu(t)$ удовлетворяет более жесткому условию, удается доказать базисность в $L_p$, а именно справедлива

**Теорема 2.** *Пусть функции $A(t), B(t)$ и $\nu(t)$ удовлетворяют условиям* (A1)–(A4), *величина $\omega$ определена формулой* (4). *Тогда система экспонент* (2) *образует базис в $L_p$ (при $p=2$ базис Рисса) только при $\frac{1}{p}-1 < \omega < \frac{1}{p}$, причем при $\omega < \frac{1}{p}-1$ она полна, но не минимальна; при $\omega > \frac{1}{p}$ минимальна, но не полна.*

Доказательство. Пусть $H_p^{\pm}$ — обычные классы Харди аналитических внутри и вне единичного круга функций соответственно. Рассмотрим следующую задачу Газемана [11] в этих классах:

$$F^+(e^{i\nu(\arg\xi)}) + G(\xi)F^-(e^{i\arg\xi}) = \frac{g(\arg\xi)}{A(\arg\xi)}, \quad F^-(\infty)=0, \; |\xi|=1 \tag{5}$$

(т. е. ищется пара аналитических функций $(F^+(z); F^-(z))$, где $F^{\pm} \in H_p^{\pm}$, некасательные граничные значения на единичной окружности которых удовлетворяют п. в. равенству (5)). Здесь $g(t) \in L_p$ — произвольная фиксированная функция и $G(\xi) \equiv \frac{B(\arg\xi)}{A(\arg\xi)}$.

По-видимому, эта задача в классах $H_p^{\pm}$ не развита (по крайней мере, автору о ее развитии неизвестно). При сделанных предположениях на функцию $\nu(t)$ сдвиг $\nu^+(\xi) \equiv e^{i\nu(\arg\xi)}$ позволяет применять метод конформного склеивания, разработанный в [11, с. 123], к решению этой задачи в классах $H_p^{\pm}$; $\nu^+(\xi)$ — сдвиг, сохраняющий ориентацию и гомеоморфно отображающий единичную окружность на себя. Из

$$\frac{d\nu^+(\xi)}{d\xi} = \frac{\nu'(\arg\xi)}{i}e^{i[\nu(\arg\xi)-\arg\xi]}, \quad |\xi|=1,$$

следует, что [15, с. 17] функция $\frac{d\nu^+(\xi)}{d\xi}$ принадлежит некоторому классу Гёльдера на единичной окружности. Так как выполнены все условия теоремы 10.4 о конформном склеивании из [11, с. 123], существуют функции $\omega^+(z)$ и $\omega^-(z)$, которые конформно отображают области $|z|<1$ и $|z|>1$ соответственно на области $D^+$ и $D^-$, разделяющиеся общей кривой Ляпунова Г, причем $\omega^+(\nu^+(\xi)) =$

$\omega^-(\xi)$, $|\xi| = 1$. Пусть $G^\pm \equiv \{z : |z|^\pm < 1\}$. Известно [16, с. 91], что функция $F^\pm(z)$ принадлежит классу Харди $H_p^\pm$ тогда и только тогда, когда функция

$$\Phi^\pm(w) \equiv F^\pm[\omega_{-1}^\pm(w)] \left[ \frac{d\omega^\pm}{dz} \bigg|_{z=\omega_{-1}^\pm(w)} \right]^{-\frac{1}{p}}$$

принадлежит классу Смирнова $E_p(D^\pm)$, где $\omega_{-1}^\pm$ — обратные к $\omega^\pm$ функции. Таким образом, в принятых обозначениях краевое условие Газемана (5) принимает вид

$$\Phi^+[\omega^+(\nu^+(\xi))] \sqrt[p]{\frac{d\omega^+}{dz}\bigg|_{z=\nu^+(\xi)}} + G(\xi)\Phi^-[\omega^-(\xi)] \sqrt[p]{\frac{d\omega^-(\xi)}{d\xi}} = \frac{g(\arg\xi)}{A(\arg\xi)}, \quad |\xi| = 1. \tag{6}$$

Пусть $w = \omega^-(\xi)$. Тогда [11, с. 123] $\omega^+\{\nu^+[\omega_{-1}^-(w)]\} \equiv w$. Следовательно, из (6) имеем

$$\Phi^+(\omega) + \widetilde{G}(w) \left[ \frac{\frac{d\omega^-}{dz}\big|_{z=\omega_{-1}^-(w)}}{\frac{d\omega+}{dz}\big|_{z=\nu^+(\omega_{-1}^-(w))}} \right]^{\frac{1}{p}} \Phi^-(w) = \tilde{g}(w), \quad w \in \Gamma, \tag{7}$$

где $\widetilde{G}(w) \equiv G(\omega_{-1}^-(w))$,

$$\tilde{g}(w) \equiv \frac{g(\arg\omega_{-1}^-(w))}{A(\arg\omega_{-1}^-(w))} \left[ \frac{d\omega+}{dz} \bigg|_{z=\nu^+(\omega_{-1}^-(w))} \right]^{-\frac{1}{p}}.$$

По результатам монографии [11, с. 125] функция $\frac{d\omega^\pm(\xi)}{d\xi}$ принадлежит некоторому классу Гёльдера на единичной окружности, причем $\frac{d\omega^\pm(\xi)}{d\xi} \neq 0$ для любого $\xi$ такого, что $|\xi| = 1$. Следуя [11], имеем $\frac{d\omega^\pm(\xi)}{d\xi} = \gamma^\pm(\xi)$, где $\gamma^\pm(\xi)$ является решением задачи Газемана (10.25) из [11, с. 124]. Тогда по теореме 10.3 из [11] $\gamma^\pm(z) = e^{\Gamma^\pm(z)}$, где $\Gamma^\pm(z)$ — соответствующие интегралы типа Коши. Таким образом, $\gamma^\pm(\xi) \neq 0$ для любого $\xi$ такого, что $|\xi| = 1$. В результате получаем задачу Римана (7) в классе Смирнова $E_p(D^\pm)$. С другой стороны, легко заметить, что

$$\Phi^-(\infty) = F^-(\infty) \left[ \frac{d\omega^-}{dz} \bigg|_{z=\infty} \right]^{-\frac{1}{p}}.$$

Из представления (10.26) работы [11] для функции $\omega^-(z)$ непосредственно следует, что $\frac{d\omega^-}{dz}|_{z=\infty} = 1$. Значит, из (5) вытекает, что $\Phi^-(\infty) = 0$. Задачу (7) будем решать по методу, разработанному в [16]. Сначала предполагаем, что выполнены условия

$$-\frac{2\pi}{q} < h_k < \frac{2\pi}{p}, \ k = \overline{0, r}; \quad h_0 = \omega. \tag{8}$$

Нетрудно заметить, что индекс $\varkappa$ задачи (7) при выполнении условий (8) и $\Phi^-(\infty) = 0$ равен нулю [16, с. 212]. Тогда по теореме 19.5 из [16] единственное решение этой задачи выражается с помощью интеграла типа Коши

$$\Phi(w) = \frac{Z(w)}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\tilde{g}(w(s))}{Z^+[w(s)]} \frac{dw(s)}{w(s) - w}, \quad w \notin \Gamma,$$

где $s$ — длина дуги, отсчитываемой от точки $\omega^+(1)$ в положительном направлении, $Z(w)$ — каноническое решение однородной задачи. Очевидно, что и задача (5) имеет единственное решение в классе Харди $H_p$, выражаемое формулой

$$F^{\pm}(z)=\Phi^{\pm}[\omega^{\pm}(z)]\left[\frac{d\omega^{\pm}}{dz}\right]^{\frac{1}{p}}=\frac{Z_0^{\pm}(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\tilde g(w(s))}{Z^+[w(s)]}\frac{dw(s)}{w(s)-w^{\pm}(z)}, \tag{9}$$

где $Z_0^{\pm}(z)=Z^{\pm}[\omega^{\pm}(z)]\left[\frac{d\omega^{\pm}}{dz}\right]^{\frac{1}{p}}$.

Очевидно, что функции $W_{s,\pm}(z)\equiv[w(s)-\omega^{\pm}(z)]^{-1}$ аналитические соответственно в областях $G^{\pm}$. Кроме того, $W_{s,-}(\infty)=0$. Разложим $W_{s,+}(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z$ соответственно вблизи нуля и в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$W_{s,+}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{W_{s,+}^{n}(0)}{n!}z^n,\quad W_{s,-}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{W_{s,-}^{(n)}(\infty)}{n!}z^{-n}.$$

Учитывая эти разложения в (9), имеем

$$F^+(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^+z^n;\quad F^-(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-z^{-n},$$

где $a_n^+=\sum\limits_{k=0}^{n}b_{n-k}^+c_k^+$, $a_n^-=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{n-k}^-c_k^-$, $Z_0^{\pm}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n^{\pm}z^{\pm n}$ — ряды Тейлора функций $Z_0^{\pm}(z)$ соответственно, а коэффициенты $\left\{c_k^{\pm}\right\}$ определены формулами

$$c_n^+=\frac{1}{2\pi n!i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\tilde g(w(s))}{Z^+[w(s)]}W_{s,+}^{(n)}(0)dw(s),\quad n\ge 0,$$

$$c_n^-=\frac{1}{2\pi n!i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\tilde g(w(s))}{Z^+[w(s)]}W_{s,-}^{(n)}(\infty)dw(s),\quad n\ge 1.$$

Ясно, что имеют место соотношения

$$\frac{r^n}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F^+(re^{it})e^{-int}\,dt=\begin{cases}a_n^+, & n\ge 0,\\ 0, & n<0,\ r<1,\end{cases}$$

$$\frac{r^{-n}}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F^-(re^{it})e^{int}\,dt=\begin{cases}a_n^-, & n\ge 1,\\ 0, & n<1,\ r>1.\end{cases}$$

По теореме Рисса [16, с. 47] имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|F^{\pm}(r^{\pm1}e^{i\theta})-F^{\pm}(e^{i\theta})|^p\,d\theta\to 0$$

при $r\to 1\pm 0$. Отсюда непосредственно следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F^+(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta=\begin{cases}a_n^+, & n\ge 0,\\ 0, & n<0,\end{cases}\quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F^-(e^{i\theta})e^{in\theta}\,d\theta=\begin{cases}a_n^-, & n\ge 1,\\ 0, & n<1.\end{cases}$$

Таким образом, в $L_p$ получаем разложения

$$F^+(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ e^{in\theta}, \quad F^-(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- e^{-in\theta}.$$

Из условий на функцию $\nu(\theta)$ непосредственно следует, что

$$F^+(e^{i\nu(\theta)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ e^{in\nu(\theta)}.$$

Тогда из краевого условия (5) выводим разложение функции $g(\theta)$ по системе (2):

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ A(\theta) e^{in\nu(\theta)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- B(\theta) e^{-in\theta}.$$

Сгруппировав и обозначив соответствующие члены через $\{h_n^{\pm}\}$ в выражениях для $\{c_n^{\pm}\}$, получаем

$$a_n^+ = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{h_n^+(t)} g(t)\, dt, \quad a_k^- = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \overline{h_k^-(t)}\, dt, \quad n \geq 0;\ k \geq 1.$$

Из произвольности функции $g(t) \in L_p$ следует, что $h_n^{\pm} \in L_q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Теперь в качестве функции $g(t)$ возьмем $A(t)e^{i\nu(t)n}$. Обратим внимание на то, что в этом случае решением задачи (5) является и функция

$$F_0(z) \equiv \begin{cases} z^n, & |z| < 1, \\ 0, & |z| > 1. \end{cases}$$

Из сравнения соответствующих коэффициентов получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} A(t) e^{in\nu(t)} \overline{h_k^+(t)}\, dt = \delta_{nk}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} A(t) e^{in\nu(t)} \overline{h_{k+1}^-(t)}\, dt = 0 \quad \forall n, k \geq 0.$$

Затем, взяв $g(t) = B(t)e^{-int}$, аналогично имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} B(t) e^{-int} \overline{h_k^+(t)}\, dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} B(t) e^{-int} \overline{h_{k+1}^-(t)}\, dt = \delta_{nk} \quad \forall n, k \geq 0,$$

где $\delta_{nk}$ — символы Кронекера. Из этих соотношений непосредственно следует минимальность системы (2) в $L_p$. Итак, доказана базисность системы (2) в $L_p$ при выполнении неравенств (8). Общий случай доказывается совершенно аналогично доказательству теоремы 1 работы [17].

Рассмотрим случай $p = 2$. Из того, что классическая система экспонент $\{e^{int}\}_{-\infty}^{+\infty}$ образует безусловный базис в $L_2$, следует сходимость биортогональных рядов $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}^+ e^{in_k\nu(t)}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^- e^{-in_k t}$ при любой перестановке членов соответственно к функциям $F^+(e^{i\nu(t)})$ и $F^-(e^{it})$ в $L_2$. Очевидно, что выполнены неравенства

$$\sup_n \|A(t)e^{i\nu(t)n}\|_2 < +\infty, \quad \inf_n \|A(t)e^{i\nu(t)n}\|_2 > 0,$$

$$\sup_n \|B(t)e^{int}\|_2 < +\infty, \quad \inf_n \|B(t)e^{int}\|_2 > 0,$$

где $\|\cdot\|_2$ — обычная норма в $L_2$. Тогда из теоремы Лорча [18, с. 381] следует, что система (2) образует базис Рисса в $L_2$. Теорема доказана.

## 3. Базисность в $L_2$. Случай B

Пусть имеют место условия (B1)–(B3). Обозначим

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{r-1}[\arg G(s_{k+1}-0) - \arg G(s_k+0)] + \frac{1}{2\pi}[\arg G(\pi-0) - \arg G(s_r+0)] + \frac{1}{2\pi}[\arg G(s_1-0) - \arg G(-\pi+0)] + \sum_{k=0}^{r}\left\{E[\varphi_k] + \frac{1}{2}\arg\lambda_k\right\},$$

где $E[x]$ — целая часть числа $x$. В этом случае снимаются жесткие условия на сдвиг $\nu(t)$. Справедлива

**Теорема 3.** *Пусть относительно функций $A(t)$, $B(t)$ и $\nu(t)$ выполнены условия* (B1)–(B3). *Тогда система* (2) *образует базис Рисса в $L_2$ только при $\varkappa = 0$; при $\varkappa > 0$ она полна, но не минимальна в $L_2$; при $\varkappa < 0$ минимальна, но не полна.*

Доказательство. Аналогично предыдущей теореме рассмотрим следующую задачу Газемана в классе Харди $H_2$:

$$F^+(e^{i\nu(t)}) = G(t)F^-(e^{it}) + \frac{g(t)}{A(t)}, \quad F^-(\infty) = 0, \quad -\pi \le t < \pi, \tag{10}$$

где $g(t) \in L_2$ — любая функция. Пусть $\omega(\xi) = e^{i\nu(\arg\xi)}$, $|\xi| = 1$. Из условия (B2) следует, что $\omega(\xi)$ — сдвиг, сохраняющий ориентацию на единичной окружности. Из $\omega'(\xi) = \frac{\nu'(\arg\xi)}{\xi}\cdot\omega(\xi)$ вытекает кусочная гёльдеровость функции $\omega'(\xi)$ на единичной окружности. Тогда по теореме 9.3 работы [19] при выполнении условий (B1)–(B3) задача (10) является нётеровой. Следуя этой работе, вычислим индекс задачи (10). Точками разрывов функций $G(\arg\xi)$ и $\omega'(\xi)$ на единичной окружности являются $\xi_0 = -1$, $\xi_k = e^{is_k}$, $k = \overline{1,r}$. Так как в нашем случае рассматривается скалярная задача, соответствующие собственные числа будут (см. [19])

$$\lambda(\xi_0) = \lambda_0 = \frac{G(-\pi+0)}{G(\pi-0)}, \quad \lambda(\xi_k) = \lambda_k = \frac{G(s_k+0)}{G(s_k-0)}, \quad k = \overline{1,r}.$$

Соответственно имеем [19]

$$\xi(\xi_k) = \ln|\omega'(\xi_k+0)| - \ln|\omega'(\xi_k-0)| = \nu_k, \quad k = \overline{0,r};$$

$$\varphi(\xi_k) = \frac{1}{8\pi^2}[\xi(\xi_k) + 2\ln|\lambda(\xi_k)|]\xi(\xi_k) + \frac{\pi - \arg\lambda(\xi_k)}{2\pi} = \frac{1}{8\pi^2}[\nu_k + 2\ln|\lambda_k|]\nu_k + \frac{\pi - \arg\lambda_k}{2\pi}, \quad k = \overline{0,r}.$$

Учитывая эти выражения и следуя теореме 9.3 работы [19], получаем, что индекс задачи (10) равен $\varkappa$.

Сначала рассмотрим случай $\varkappa = 0$. В этом случае задача (10) фредгольмова. Согласно теории краевых задач со сдвигом Газемана [11, с. 121] из условия $F^-(\infty) = 0$ следует, что однородная задача тривиально разрешима и, значит, неоднородная задача (10) разрешима при любой правой части $g \in L_2$. Как и в доказательстве теоремы 2, разложим функции $F^\pm(e^{i\varphi})$ в ряды Фурье:

$$F^+(e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ e^{int}, \quad F^-(e^{it}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- e^{-int}.$$

Таким образом,

$$I_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n^+ e^{in\nu(t)} - F^+(e^{i\nu(t)}) \right|^2 dt = \int\limits_{\nu(-\pi)}^{\nu(\pi)} \frac{1}{\nu(\nu_{-1}(\tau))} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n^+ e^{in\tau} - F^+(e^{i\tau}) \right|^2 d\tau,$$

где $\nu_{-1}(\tau)$ — обратная к $\nu(t)$ функция. Из условия (B2) следует, что $0 < c^{-1} \le \nu'(t) \le c < +\infty$ при некотором $c > 0$. Значит,

$$I_n \le c \int\limits_{\nu(-\pi)}^{\nu(\pi)} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n^+ e^{in\tau} - F^+(e^{i\tau}) \right|^2 d\tau = c \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n^+ e^{in\tau} - F^+(e^{i\tau}) \right|^2 d\tau.$$

Здесь мы использовали периодичность подынтегральной функции. Из предыдущего соотношения непосредственно следует, что $I_N \to 0$ при $N \to \infty$. В итоге функция $g(t)$ разлагается в ряд по системе (2) в $L_2$.

Покажем, что такой ряд единствен. Допустим обратное. Пусть существует другой ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^+ A(t) e^{i\nu(t)n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- B(t) e^{-int},$$

сходящийся в $L_2$ к $g(t)$. Обозначим

$$f^+(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^+ \xi^n, \quad f^-(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- \xi^{-n}, \quad |\xi| = 1.$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{|\xi|=1} f^+(\xi)\xi^k \, d\xi = 0 \quad \forall k \ge 0.$$

Тогда согласно [20, с. 121] функция $f^+(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n^+ z^n$ принадлежит классу Харди $H_1^+$ в единичном круге. Так как $f^+(\xi) \in L_2$, отсюда следует, что $f^+(z) \in H_2^+$. Из аналогичных соображений получаем, что функция $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{b_n^-} z^n$ принадлежит классу $H_2^+$, причем $f_1(0) = 0$. Тогда очевидно, что функция $f^-(z) = \overline{f_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$ принадлежит классу Харди $H_2^-$ вне единичного круга и $f^-(\infty) = 0$. Более того, $f^-(e^{it}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^- e^{-int}$. Таким образом,

$$A(t) f^+(e^{i\nu(t)}) + B(t) f^-(e^{it}) = g(t), \quad f^-(\infty) = 0, \quad -\pi \le t < 0.$$

В результате из единственности решения задачи сопряжения (10) получаем $F^{\pm}(z) \equiv f^{\pm}(z)$, т. е. $a_n^{\pm} = b_n^{\pm}$. Итак, базисность при $\varkappa = 0$ системы (2) доказана. Базисность Рисса доказывается аналогично теореме 2.

Пусть $\varkappa \ne 0$, например $\varkappa > 0$. Пусть $\varkappa = 1$. Рассмотрим систему

$$\{A(t) e^{i\nu(t)n}; \widetilde{B}(t) e^{-i(n+1)t}\}_{n \ge 0}, \tag{11}$$

где $\widetilde{B}(t) = B(t) e^{-it}$.

Пусть $\gamma_s$, $s = \overline{0,r}$, — дуги разбиения единичной окружности точками $\xi_s$, $s = \overline{0,r}$; $\{f(\xi)\}_{\gamma_s}$ — приращение функции $f(\xi)$ по дуге $\gamma_s$ в положительном направлении. В этих обозначениях формулу для $\varkappa$ можно записать в виде

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\sum_{s=0}^{r}\{\arg G(\arg\xi)\}_{\gamma_s} + \sum_{k=0}^{r}\left[E[\varphi_k] + \frac{1}{2\pi}\arg\lambda_k\right]. \tag{12}$$

Индекс, соответствующий системе (11), обозначим через $\tilde{\varkappa}$. Тогда из выражения (12) непосредственно следует, что $\tilde{\varkappa} = \varkappa - 1 = 0$. В результате по вышедоказанному система (11) образует базис в $L_2$ и, значит, система (2) полна, но не минимальна в $L_2$. Остальные случаи доказываются аналогично. Теорема доказана.

Следует отметить, что теорему 3 можно сформулировать иначе. Пусть $\theta(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ и $h_k$, $k = \overline{1,r}$, — скачки функции $\theta(t)$ в точках $s_k$, $k = \overline{1,r}$. Определим целые числа $n_i$, $i = \overline{1,r}$, из следующих условий:

$$-\frac{1}{2} < \frac{h_k}{2\pi} - \frac{1}{8\pi^2}[\nu_k + 2\ln|\lambda_k|]\nu_k + n_{k-1} - n_k < \frac{1}{2}, \quad n_0 = 0,\ k = \overline{1,r}. \tag{13}$$

Обозначим

$$\omega = \frac{1}{2\pi}[\theta(-\pi+0) - \theta(\pi-0] - \frac{1}{8\pi^2}[\nu_0 + 2\ln|\lambda_0|]\nu_0 + n_r, \tag{14}$$

где величины $\nu_k; \lambda_k$ определены из (B1)–(B3).

**Теорема 4.** *Пусть функции $A(t)$, $B(t)$ и $\nu(t)$ удовлетворяют условиям* (B1)–(B3) *и $\omega$ определена из* (13), (14). *Тогда система* (2) *образует базис Рисса в $L_2$ только при $\omega \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. При $\omega < -\frac{1}{2}$ она полна, но не минимальна; при $\omega > \frac{1}{2}$ минимальна, но не полна.*

Замечание. Базисность системы (2) инвариантна относительно разности аргументов функций $A(t)$ и $B(t)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Левин Б. Я.* Целые функции. М.: Изд-во МГУ, 1971.
2. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.
3. *Гасымов М. Г., Джавадов М. Г.* Кратная полнота части собственных и присоединенных функций дифференциальных операторных пучков // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, № 6. С. 1235–1237.
4. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
5. *Любарский Ю. И., Ткаченко В. А.* О системе $\{e^{\alpha n z}\sin nz\}_{n\geq 1}$ // Функцион. анализ и его прил. 1984. Т. 18, № 2. С. 69–70.
6. *Любарский Ю. И., Ткаченко В. А.* Полнота и минимальность специальных систем функций на множествах в комплексной плоскости. Харьков, 1985, 29 с. (Препринт / ФТИНТ АН УССР, № 33–85).
7. *Любарский Ю. И.* Полнота и минимальность систем функций вида $\{a(t)\varphi^n(t) - b(t)\times\psi^n(t)\}_{n\geq N}$ // Теория функций, функцион. анализ и их прил. Харьков, 1988. № 44. С. 77–86.
8. *Любарский Ю. И.* Свойства систем линейных комбинаций степеней // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, № 6. С. 1–69.
9. *Шкаликов А. А.* Сильно демпфированные пучки операторов и разрешимость соответствующих операторно-дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1988. Т. 135, № 1. С. 96–118.

**10.** *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
**11.** *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977.
**12.** *Билалов Б. Т.* Базисность некоторой системы экспонент со сдвигом // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 15–19.
**13.** *Билалов Б. Т.* Базисные свойства некоторых систем экспонент и степеней со сдвигом // Докл. РАН. 1994. Т. 344, № 4. С. 416–419.
**14.** *Билалов Б. Т.* О базисности системы $\{e^{i\sigma nx}\sin nx\}_1^\infty$ и экспонент со сдвигом // Докл. РАН. 1995. Т. 345, № 2. С. 151–152.
**15.** *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
**16.** *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975.
**17.** *Билалов Б. Т.* Базисные свойства некоторых систем экспонент, косинусов и синусов // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 264–273.
**18.** *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
**19.** *Карлович Ю. И., Кравченко В. Г.* Алгебра сингулярных интегральных операторов с кусочно непрерывными коэффициентами и кусочно гладким сдвигом на сложном контуре // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, № 5. С. 1030–1077.
**20.** *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

*Статья поступила 20 октября 2006 г.*

Билалов Билал Тельман оглы
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ул. Ф. Агаева, 9, Баку Az-1141, Азербайджан
b_bilalov@mail.ru